ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Том 22

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Москва ★ 1958

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 3—14

И. М. ВИНОГРАДОВ

ОСОБЫЙ СЛУЧАЙ ОЦЕНКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ

Дано улучшение оценок статьи (1) для сумм вида

$$\sum_{p \leqslant P} e^{2\pi i k f(p)}, \quad f(x) = A_n x^n + \ldots + A_1 x,$$

в случае, когда общее наименьшее кратное знаменателей рациональных приближений к коэффициентам $A_n, \ldots, A_1$ не превосходит P^ν, где $\nu = n^{-1}$.

Обозначения. c — положительное постоянное, ε — произвольно малое положительное постоянное, θ — число с условием $|\theta| \leqslant 1$.

$A \ll B$ при положительном B обозначает, что $|A| \leqslant cB$.

p — переменное, пробегающее простые числа.

$\pi(x)$ — число простых чисел, не превосходящих x.

k — целое положительное.

P — целое, $P \geqslant c_0$, где c_0 достаточно велико.

n — целое постоянное, $n \geqslant 12$, $\nu = n^{-1}$, $A_n, \ldots, A_1$ — вещественные, $f(x) = A_n x^n + \ldots + A_1 x$. Пользуясь в дальнейшем приближениями к числам $A_n, \ldots, A_1$ посредством несократимых дробей

$$\frac{a_n}{q_n}, \ldots, \frac{a_1}{q_1}$$

с положительными $q_n, \ldots, q_1$, будем обозначать общее наименьшее кратное чисел $q_n, \ldots, q_1$ буквою Q.

В работе (1) была дана общая теорема об оценке сумм вида

$$\sum_{p \leqslant P} e^{2\pi i k f(p)}.$$

Однако в случае $Q \leqslant P^\nu$ эта теорема дает грубые результаты. Здесь мы выводим новую теорему, дающую в указанном случае результаты приблизительно того же типа, какие получаются в аналогичном случае из теоремы 1,а указанной работы для сумм вида

$$\sum_{x \leqslant P} e^{2\pi i k f(x)},$$

где x пробегает числа натурального ряда.

ЛЕММА 1 (van der Corput). *Пусть M и M_1 — целые, $M < M_1$ и в интервале $M \leqslant x \leqslant M_1$ задана дважды дифференцируемая вещественная функция $f(x)$ с условиями*

$$0 \leqslant f'(x) \leqslant 0{,}5, \quad f''(x) \geqslant 0.$$

Тогда, беря одновременно знаки + или же знаки —, имеем:

$$\sum_{x=M}^{M_1} e^{\pm 2\pi i f(x)} = \int_{M}^{M_1} e^{\pm 2\pi i f(x)} dx + 2\theta.$$

ЛЕММА 2 [лемма 2 работы (1)]. *Пусть* $0 < \alpha < \beta \leqslant 1$,

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} e^{2\pi i \varphi(x)}\, dx, \quad \varphi(x) = u_n x^n + \ldots + u_1 x,$$

где $u_n, \ldots, u_1$ — *вещественные и* u_0 *обозначает наибольшее из чисел* $|u_n|, \ldots, |u_1|$. *Тогда имеем:*

$$|I| \leqslant \max(1{,}18\ u_0^{-\nu}).$$

ЛЕММА 3. *Пусть* $b > 2$, $0 \leqslant a < b$, $0 < q \leqslant \sqrt{b}$, $(\eta, q) = 1$, $0 \leqslant \eta < Q$. *Тогда имеем:*

$$\sum_{a < q\xi + \eta \leqslant b} \tau(q\xi + \eta) \ll \frac{b-a}{q} \ln b + \sqrt{b}.$$

Доказательство. Лемма тривиальна.

ЛЕММА 4. *Пусть* $b > 2$ *и* l — *целое положительное. Тогда имеем:*

$$\sum_{0 < \xi \leqslant b} (\tau(\xi))^l \ll b (\ln b)^{2^l - 1}.$$

Доказательство. Эта лемма есть частный случай леммы 17 гл. I книги (2).

ЛЕММА 5 (Loo — Keng Hua). *Пусть* $A_n, \ldots, A_1$ — *рациональные несократимые дроби с положительными знаменателями, имеющими общим наименьшим кратным число* Q. *Тогда имеем:*

$$\sum_{x=1}^{Q} e^{2\pi i f(x)} \ll Q^{1-\nu+\varepsilon}.$$

ЛЕММА 6. *Пусть*

$$\Phi(\eta, v_1, v) = \frac{kB_n(v_1^n - v^n)}{q_n} \eta^n + \ldots + \frac{kB_1(v_1 - v)}{q_1} \eta,$$

$$(B_n, \ldots, B_1, Q) = 1,$$

причем v_1 *и* v *пробегают системы наименьших неотрицательных вычетов по модулю* Q, *взаимно простых с* Q. *Тогда имеем:*

$$\sum_{v_1} \sum_{v} \left| \sum_{\eta=0}^{Q-1} e^{2\pi i \Phi(\eta, v_1, v)} \right| \ll Q^{3-\nu+\varepsilon'} (k, Q)^{\nu}.$$

Доказательство. Доказательства этой леммы мы не приводим; оно является повторением вывода оценки суммы G в доказательстве леммы 12 работы (1).

ЛЕММА 7. *Пусть при каждом* s, *взятом из ряда* $n, \ldots, 1$, *имеет место свое равенство вида*

$$A_s = \frac{a_s}{q_s} + \frac{\delta_s}{P^s}, \quad (a_s, q_s) = 1, \quad 0 < q_s, \quad |\delta_s| \leqslant P^{\nu},$$

причем $Q \leqslant P^{\nu}$. *Пусть, далее,* $k \leqslant P^{3\nu^2}$ *и* t *обозначает положительное число, взаимно простое с* Q. *Пусть, наконец,*

$$S = \sum_{y} \psi(y) \sum_{x} e^{2\pi i k f(t^2 xy)}, \quad |\psi(y)| \leqslant \tau(y),$$

где x *и* y *пробегают возрастающие последовательности целых положительных чисел, взаимно простых с* Q, *и суммирование распространяется на область*

$$c' P^{0,25-c} t^{-1} < y \leqslant c'' P^{0,5} t^{-1}, \tag{1}$$

$$0 < t^2 yx \leqslant P,$$

где $c \leqslant 18^{-1}$. *Тогда имеем:*

$$S \ll \frac{P}{t^{1,1}} (\ln P)^2 Q^{-0,5\nu+\varepsilon} (k, Q)^{\nu}.$$

В случае, когда по меньшей мере для одного $s = s'$ *выполняется неравенство* $|\delta_{s'}| \geqslant 1$, *имеем также:*

$$S \ll \frac{P}{t^{1,1}} (\ln P)^2 Q^{-0,5\nu+\varepsilon} |\delta_{s'}|^{-0,5\nu}.$$

Доказательство. Достаточно рассматривать лишь случай $t \leqslant P^{\nu^2}$, так как в противном случае лемма тривиальна. Интервал (1) можно подразделить на $\ll \ln P$ интервалов вида

$$cY < y \leqslant Y, \quad 0{,}25 < c \leqslant 0{,}5. \tag{2}$$

Часть S' суммы S, отвечающую интервалу (2), можно представить в виде:

$$S' = \sum_{0 < x \leqslant X} \; \sum_{cY < y \leqslant Y_x} \psi(y) e^{2\pi i k f(t^2 xy)},$$

$$X = \frac{P}{t^2 cY}, \quad Y_x = \min\left(\frac{P}{t^2 x}, Y\right).$$

Далее, находим:

$$S'^2 \ll X \sum_{0 < x \leqslant X} \; \sum_{cY < y_1 \leqslant Y_x} \; \sum_{cY < y \leqslant Y_x} \psi(y_1) \psi(y) e^{2\pi i F(x, y_1, y)},$$

$$F(x, y_1, y) = kf(t^2 xy_1) - kf(t^2 xy),$$

где, в указанных границах, x пробегает уже все целые числа. Меняя порядок суммирования, находим:

$$S'^2 \ll X \sum_{cY < y_1 \leqslant Y} \; \sum_{cY < y \leqslant Y} \psi(y_1) \psi(y) S_{y_1, y},$$

$$S_{y_1, y} = \sum_{0 < x \leqslant x_1} e^{2\pi i F(x, y_1, y)},$$

$$x_1 = \min\left(\frac{P}{t^2 y_1}, \frac{P}{t^2 y}\right).$$

При $0 \leqslant \eta < Q$, $(Q, \eta) = 1$ рассмотрим сумму

$$S_{\eta} = \sum_{0 < Q\xi + \eta \leqslant x_1} e^{2\pi i F(Q\xi + \eta, y_1, y)}.$$

Здесь имеем:

$$F(Q\xi+\eta, y_1, y) = \Phi + \lambda(\xi),$$

$$\Phi = \Phi(\eta, y_1, y) = \frac{ka_n}{q_n} t^{2n}(y_1^n - y^n)\eta^n + \cdots + \frac{ka_1}{q_1}(y_1 - y)\eta,$$

$$\lambda(\xi) = \frac{k\delta_n\, t^{2n}(y_1^n - y^n)}{P^n}(Q\xi+\eta)^n + \cdots + \frac{k\delta_1 t^2 (y_1 - y)}{P}(Q\xi+\eta) = \sigma(Q\xi+\eta).$$

Легко найдем, что $|\lambda'(\xi)| < 0{,}5$. Кроме того, интервал $-\eta Q^{-1} \leqslant \xi \leqslant \leqslant (x_1-\eta)Q^{-1}$ можно разбить на не более чем $2n-2$ интервала, в каждом из которых $\lambda'(\xi)$ монотонна и не обращается в нуль внутри интервала. Поэтому (лемма 1)

$$S_\eta = e^{2\pi i\Phi}\int\limits_{-\eta Q^{-1}}^{(x_1-\eta)Q^{-1}} e^{2\pi i\lambda(\xi)}\,d\xi + O(1) = \frac{x_1}{Q}\,Ue^{2\pi i\Phi} + O(1),$$

$$U = \int\limits_0^1 e^{2\pi i\sigma(x_1 z)}dz,$$

$$S_{y_1,y} = \frac{x_1}{Q}UV + O(Q), \quad V = V_{v_1,v} = \sum_\eta e^{2\pi i\Phi(\eta, v_1, v)},$$

где v_1 и v — наименьшие неотрицательные вычеты чисел y_1 и y по модулю Q.

Отсюда находим:

$$S'^2 \ll \frac{X^2}{Q}\sum_{cY<y_1\leqslant Y}\;\sum_{cY<y\leqslant Y}\tau(y_1)\tau(y)\left(|U|\,|V_{v_1,v}| + \frac{Q^2}{X}\right). \tag{3}$$

Замечая, что $|U| \leqslant 1$, из неравенства (3) выводим:

$$S'^2 \ll \frac{X^2}{Q}\sum_{v_1}\sum_{v}\left(|V_{v_1,v}| + \frac{Q^2}{X}\right)H_{v_1,v},$$

$$H_{v_1,v} = \sum_{\substack{cY<y_1\leqslant Y\\ y_1\equiv v_1 \pmod Q}}\;\sum_{\substack{cY<y\leqslant Y\\ y\equiv v \pmod Q}}\tau(y_1)\tau(y),$$

откуда, применяя лемму 3 и затем лемму 6, находим:

$$H_{v_1,v} \ll \frac{Y^2}{Q^2}(\ln P)^2,$$

$$S'^2 \ll \frac{X^2Y^2}{Q^3}(\ln P)^2\sum_{v_1}\sum_{v}\left(|V_{v_1,v}| + \frac{Q^2}{X}\right) \ll X^2Y^2(\ln P)^2 Q^{-\nu+\varepsilon}(k, Q)^\nu.$$

Отсюда тривиально выводим первое утверждение нашей леммы.

Теперь рассмотрим случай, когда по меньшей мере для одного значения $s = s'$ выполняется неравенство $|\delta_{s'}| \geqslant 1$. Здесь для модуля коэффициента при $x^{s'}$ функции $\sigma(x_1 z)$ имеем неравенство:

$$\left|\frac{k\delta_{s'}\, t^{2s'}(y_1^{s'} - y^{s'})}{P^{s'}}\,x_1^{s'}\right| \gg \frac{k\,|\delta_{s'}|\,|y_1 - y|}{Y}.$$

Следовательно, полагая $N = Yk^{-1}|\delta_{s'}|^{-1}$, будем иметь:

$$U \ll \min(1, N^{\nu}|y_1 - y|^{-\nu})$$

(при $y_1 = y$ имеем $U \ll 1$). Из (3) следует:

$$S'^2 \ll \frac{X^2}{Q}\sum_{v_1}\sum_{v} W_{v_1,v},$$

$$W_{v_1,v} = \sum_{\substack{cY<y_1\leqslant Y\\ y_1\equiv v_1 (\mathrm{mod}\, Q)}} \sum_{\substack{cY<y\leqslant Y\\ y\equiv v (\mathrm{mod}\, Q)}} \tau(y_1)\tau(y)\left(|V_{v_1,v}|\min(1, N^{\nu}|y_1 - y|^{-\nu}) + \frac{Q^2}{X}\right).$$

Сначала оценим часть $W(y_1)$ суммы $W_{v_1,v}$, отвечающую данному y_1. Сумма слагаемых суммы $W(y_1)$ с условием $|y_1 - y| \leqslant N$ будет (лемма 3)

$$\ll \tau(y_1)\left(|V_{v_1,v}| + \frac{Q^2}{X}\right)\left(\frac{N}{Q}\ln P + \sqrt{Y}\right).$$

При целом r с условием $0{,}5\,N < 2^r \leqslant Y$ сумма слагаемых суммы $W(y_1)$ с условием $2^r < |y_1 - y| \leqslant 2^{r+1}$ будет

$$\ll \tau(y_1)\left(|V_{v_1,v}|N^{\nu}2^{-r\nu} + \frac{Q^2}{X}\right)\left(\frac{2^r}{Q}\ln P + \sqrt{Y}\right).$$

Поэтому

$$W(y_1) \ll \frac{Y}{Q}\ln P\left(|V_{v_1,v}|k^{-\nu}|\delta_{s'}|^{-\nu} + \frac{Q^2}{X}\right)\tau(y_1),$$

$$W_{v_1,v} \ll \frac{Y^2}{Q^2}(\ln P)^2\left(|V_{v_1,v}|k^{-\nu}|\delta_{s'}|^{-\nu} + \frac{Q^2}{X}\right),$$

откуда, применяя лемму 6, находим:

$$S'^2 \ll \frac{X^2Y^2(\ln P)^2}{Q^3}\left(k^{-\nu}|\delta_{s'}|^{-\nu}\sum_{v_1}\sum_{v}|V_{v_1,v}| + \frac{Q^4}{X}\right) \ll$$

$$\ll X^2Y^2(\ln P)^2k^{-\nu}|\delta_{s'}|^{-\nu}Q^{-\nu+\varepsilon}(k, Q)^{\nu},$$

$$S \ll \frac{P}{t^2}(\ln P)^2|\delta_{s'}|^{-0,5\,\nu}Q^{-0,5\nu+\varepsilon}.$$

ЛЕММА 8. *Пусть при каждом s, взятом из ряда $n, \ldots, 1$, имеет место свое равенство вида*

$$A_s = \frac{a_s}{q_s} + \frac{\delta_s}{P^s}, \quad (a_s, q_s) = 1, \quad 0 < q_s, \quad |\delta_s| \leqslant P^{\nu},$$

причем $Q \leqslant P^{\nu}$. Пусть, далее,

$$P^{0,75} < M < P, \quad 2M \leqslant M' < 4M, \quad k \leqslant P^{3\nu^2},$$

$$U = \sum_{\substack{M<w\leqslant M'\\ dw\leqslant P}}\sum e^{2\pi i k f(dw)},$$

где d пробегает возрастающую последовательность положительных чисел, взаимно простых с Q, а w пробегает числа натурального ряда, взаимно простые с Q. Тогда имеем:

$$U \ll P(k, Q)^{\nu}Q^{-\nu+\varepsilon}.$$

В случае, когда по меньшей мере для одного $s = s'$ выполняется неравенство $|\delta_{s'}| \geqslant 1$, имеем также:

$$U \ll P\, |\delta_{s'}|^{-\nu} Q^{-\nu+\varepsilon} \ln P.$$

Доказательство. На первом утверждении этой леммы мы останавливаться не будем, так как оно является непосредственным следствием леммы 13 работы (1). Докажем второе утверждение.

Имеем:

$$U = \sum_{d \leqslant PM^{-1}} \sum_{t \diagdown Q} \mu(t)\, S_{d,t},$$

$$S_{d,t} = \sum_{\substack{M < tz \leqslant M' \\ dtz \leqslant P}} e^{2\pi i k f(dtz)}.$$

При $t > P^{3\nu^2}$ имеем $S_{d,t} \ll MP^{-3\nu^2}$. Рассмотрим случай $t \leqslant P^{3\nu^2}$.

Находим:

$$S_{d,t} = \sum_{N_1 < z \leqslant N_2} e^{2\pi i k f(dtz)},$$

$$N_1 = Mt^{-1}, \quad N_2 = \min(M't^{-1}, Pd^{-1}t^{-1}).$$

Пусть $0 \leqslant \eta < Q$, $(Q, \eta) = 1$. Рассмотрим сумму

$$S_v = \sum_{N_1 < Q\xi + \eta \leqslant N_2} e^{2\pi i k f(dt(Q\xi+\eta))}.$$

Здесь имеем:

$$kf(dt(Q\xi + \eta)) = \Phi + \lambda(\xi),$$

$$\Phi = \Phi(\eta) = \frac{ka_n}{q_n} d^n t^n \eta^n + \cdots + \frac{ka_1}{q_1} dt\eta,$$

$$\lambda(\xi) = \frac{\delta_n}{P^n} kd^n t^n (Q\xi + \eta)^n + \cdots + \frac{\delta_1}{P} kdt(Q\xi + \eta) = \sigma(Q\xi + \eta).$$

Но легко найдем, что

$$|\lambda'(\xi)| < 0{,}5.$$

Кроме того, интервал $(N_1 - \eta)Q^{-1} \leqslant \xi \leqslant (N_2 - \eta)Q^{-1}$ можно разбить на не более чем $2n - 2$ интервала, в каждом из которых $\lambda'(\xi)$ монотонна и не обращается в нуль внутри интервала. Поэтому (лемма 1)

$$S_v = e^{2\pi i \Phi(\eta)} \int\limits_{(N_1-\eta)Q^{-1}}^{(N_2-\eta)Q^{-1}} e^{2\pi i \lambda(\xi)} d\xi + O(1) =$$

$$= e^{2\pi i \Phi(\eta)} \frac{N_2}{Q} \int\limits_{N_1 N_2^{-1}}^{1} e^{2\pi i \sigma(N_2 z)} dz + O(1),$$

$$S_{d,t} = \sum_{\eta=0}^{Q-1} e^{2\pi i \Phi(\eta)} \frac{N_2}{Q} \int\limits_{N_1 N_2^{-1}}^{1} e^{2\pi i \sigma(N_2 z)} dz + O(Q).$$

Но, согласно леммам 2 и 5, отсюда получим:

$$S_{d,t} \ll \frac{M}{Qt} Q^{1-\nu+\varepsilon'} k^{\nu} \min(1, Pd^{-1}M^{-1}k^{-\nu} |\delta_{s'}|^{-\nu}) +$$

$$+ Q \ll Pd^{-1} |\delta_{s'}|^{-\nu} Q^{-\nu+\varepsilon'}, \quad U \ll P |\delta_{s'}|^{-\nu} Q^{-\nu+\varepsilon} \ln P.$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть при каждом s, взятом из ряда $n, \ldots, 1$, имеет место свое равенство вида*

$$A_s = \frac{a_s}{q_s} + \frac{\delta_s}{P^s}, \quad (a_s, q_s) = 1, \quad 0 < q_s, \quad |\delta_s| \leqslant P^{\nu},$$

причем $Q \leqslant P^{\nu}$, $k \leqslant P^{3\nu^2}$. Тогда, полагая

$$S = \sum_{p \leqslant P} e^{2\pi i k f(p)},$$

будем иметь:

$$S \ll P e^{19 (\ln \ln P)^2} (k, Q)^{0,5\nu} Q^{-0,5\nu+\varepsilon}.$$

В случае, когда по меньшей мере для одного $s = s'$ выполняется неравенство $|\delta_{s'}| \geqslant 1$, имеем также:

$$S \ll P e^{19 (\ln \ln P)^2} |\delta_{s'}|^{-0,5\nu} Q^{0,5\nu+\varepsilon}.$$

Доказательство. Доказательства этой теоремы мы не приводим, так как оно отличается от доказательства леммы 16 работы ([1]) лишь тем, что вместо лемм 12 и 13 работы ([1]) здесь мы применяем леммы 7 и 8 настоящей работы (взяв $c = 18^{-1}$).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть при каждом s, взятом из ряда $n, \ldots, 1$, имеет место свое равенство вида*

$$A_s = \frac{a_s}{q_s} + \frac{\delta_s}{P^s}, \quad (a_s, q_s) = 1, \quad 0 < q_s, \quad |\delta_s| \leqslant P^{\nu},$$

причем $k \leqslant P^{3\nu^2}$, $Q \leqslant H$, $H = e^{\sqrt{\ln P}}$. Тогда, полагая

$$S = \sum_{p \leqslant P} e^{2\pi i k f(p)},$$

имеем:

$$S \ll P (\ln P)^2 Q^{-0,5\nu+\varepsilon} (k, Q)^{0,5\nu}.$$

В случае, когда по меньшей мере для одного значения $s = s'$ выполняется неравенство $|\delta_{s'}| \geqslant 1$, имеем также:

$$S \ll P (\ln P)^2 Q_{\sqcup}^{-0,5\nu+\varepsilon} |\delta_{s'}|^{-0,5\nu} + PH^{-1}.$$

Доказательство. Пусть D обозначает произведение всех простых чисел, не превосходящих H^4, не делящих Q, d пробегает делители числа D, r пробегает числа натурального ряда, взаимно простые с DQ, m пробегает числа натурального ряда, взаимно простые с Q. Имеем:

$$\sum_{r \leqslant P} e^{2\pi i k f(r)} = \sum \sum_{dm \leqslant P} \mu(d) e^{2\pi i k f(dm)}. \quad (4)$$

Пусть $r_\varkappa$ пробегает значения r, имеющие ровно $\varkappa$ различных простых делителей и пусть

$$S_\varkappa = \sum_{r_\varkappa \leqslant P} e^{2\pi i k f(r_\varkappa)}.$$

При $\varkappa > 1$ легко находим:

$$S_\varkappa = \frac{1}{\varkappa} \sum_{\substack{r_1 \leqslant \sqrt{P} \\ r_1 r_{\varkappa-1} \leqslant P}} \sum e^{2\pi i k f(r_1 r_{\varkappa-1})} + \frac{1}{\varkappa} \sum_{\substack{r_{\varkappa-1} \leqslant \sqrt{P} \\ r_1 r_{\varkappa-1} \leqslant P}} \sum e^{2\pi i k f(r_1 r_{\varkappa-1})} -$$

$$- \frac{1}{\varkappa} \sum_{\substack{r_1 \leqslant \sqrt{P} \\ r_{\varkappa-1} \leqslant \sqrt{P}}} \sum e^{2\pi i k f(r_1 r_{\varkappa-1})} + O\left(\frac{P}{\varkappa H^4}\right). \qquad (5)$$

Далее мы рассмотрим лишь сумму

$$S_0 = \sum_{\substack{\rho \leqslant \sqrt{P} \\ \rho\rho' \leqslant P}} \sum e^{2\pi i f(\rho\rho')},$$

где для простоты положено $r_1 = \rho$, $r_{\varkappa-1} = \rho'$. Две другие суммы, стоящие в правой части равенства (5), рассматриваются аналогично. Интервал $H < \rho \leqslant \sqrt{P}$ можно подразделить на $\ll \ln P$ интервалов вида

$$R_0 < \rho \leqslant R, \quad 0{,}25 \leqslant R_0 \leqslant 0{,}5\, R. \qquad (6)$$

Часть S' суммы S_0, отвечающую интервалу (6), можно представить в виде

$$S' = \sum_{0 < \rho' \leqslant L_1} \sum_{R_0 < \rho \leqslant R_2} e^{2\pi i k f(\rho\rho')},$$

$$L_1 = P R_0^{-1}, \quad R_2 = \min(R, P\rho'^{-1}).$$

Далее находим:

$$S'^2 \ll L_1 \sum_{0 < \rho'' \leqslant L_1} \sum_{R_0 < \rho_1 \leqslant R_2} \sum_{R_0 < \rho \leqslant R_2} e^{2\pi i F},$$

$$F = F(\rho'', \rho_1, \rho) = kf(\rho_1 \rho'') - kf(\rho\rho''),$$

где ρ'' пробегает уже все без исключения целые числа в указанных границах и ρ_1 пробегает те же значения, что и ρ. Меняя порядок суммирования, отсюда находим:

$$S'^2 \ll L_1 \sum_{R_0 < \rho_1 \leqslant R} \sum_{R_0 < \rho \leqslant R} S_{\rho_1, \rho},$$

$$S_{\rho_1, \rho} = \sum_{0 < \rho'' \leqslant L} e^{2\pi i F}, \quad L = \min\left(\frac{P}{\rho_1}, \frac{P}{\rho}\right).$$

При $0 \leqslant \eta < Q$, $(Q, \eta) = 1$ рассмотрим сумму

$$S_\eta = \sum_{0 < Q\xi + \eta \leqslant L} e^{2\pi i F(Q\xi + \eta, \rho_1, \rho)}.$$

Здесь имеем:

$$F(Q\xi+\eta, \rho_1, \rho) = \Phi + \lambda(\xi),$$

$$\Phi = \Phi(\eta, \rho_1, \rho) = \frac{ka_n}{q_n}(\rho_1^n - \rho^n)\eta^n + \cdots + \frac{ka_1}{q_1}(\rho_1 - \rho)\eta,$$

$$\lambda(\xi) = \frac{k\delta_n(\rho_1^n - \rho^n)}{P^n}(Q\xi+\eta)^n + \cdots + \frac{k\delta_1(\rho_1-\rho)}{P}(Q\xi+\eta) = \sigma(Q\xi+\eta).$$

Легко находим, что $|\lambda'(\xi)| < 0,5$. Кроме того, интервал $-\eta Q^{-1} < \xi \leqslant \leqslant (L-\eta)Q^{-1}$ можно разбить на не более чем $2n-2$ интервала, в каждом из которых $\lambda'(\xi)$ монотонна и не обращается в нуль внутри интервала. Поэтому (лемма 1)

$$S_\eta = e^{2\pi i\Phi}\int\limits_{-\eta Q^{-1}}^{(L-\eta)Q^{-1}} e^{2\pi i\lambda(\xi)}d\xi + O(1) = \frac{L}{Q}Ue^{2\pi i\Phi} + O(1),$$

$$U = U_{\rho_1, \rho} = \int\limits_0^1 e^{2\pi i\sigma(Lz)}dz,$$

$$S_{\rho_1,\rho} = \frac{L}{Q}UV + O(Q),$$

$$V = V_{v_1,v} = \sum_{\eta=0}^{Q-1} e^{2\pi i\Phi(\eta, v_1, v)},$$

где v_1 и v — наименьшие неотрицательные вычеты чисел ρ_1 и ρ по модулю Q. Следовательно,

$$S'^2 \ll \frac{LL_1}{Q}\sum_{v_1}\sum_{v}|V_{v_1,v}|W_{v_1,v} + O(L_1R^2Q),$$

$$W_{v_1,v} = \sum_{\substack{R_0<\rho\leqslant R\\ \rho_1\equiv v_1 (\mathrm{mod}\ Q)}}\ \sum_{\substack{R_0<\rho\leqslant R\\ \rho\equiv v (\mathrm{mod} Q)}} |U_{\rho_1,\rho}|.$$

Замечая, что $|U_{\rho_1,\rho}| \leqslant 1$, отсюда выводим (лемма 7):

$$W_{v_1,v} \ll \frac{R^2}{Q^2}, \quad S'^2 \ll P^2Q^{-\nu+\varepsilon}(k, Q)^\nu,$$

$$S' \ll PQ^{-0,5\nu+\varepsilon}(k, Q)^{0,5\nu}, \qquad S_0 \ll P\ln PQ^{-0,5\nu+\varepsilon}(k, Q)^{0,5\nu}.$$

Такие же оценки мы получим и для двух других сумм правой части равенства (5). Левая часть равенства (4) примет вид ($\varkappa \leqslant 0,25\sqrt{\ln P}$):

$$S = O(P\ln P\ln\ln PQ^{-0,5\nu+\varepsilon}(k, Q)^{0,5\nu}).$$

Теперь рассмотрим случай, когда по меньшей мере для одного значения $s = s'$ справедливо неравенство $|\delta_{s'}| \geqslant 1$. Здесь для модуля коэффициента при $z^{s'}$ функции $\sigma(Lz)$ имеем:

$$\left|\frac{k\delta_{s'}(\rho_1^{s'} - \rho^{s'})}{P^{s'}}L^{s'}\right| \gg k|\delta_{s'}|\left|\frac{\rho_1-\rho}{R}\right|.$$

Поэтому (лемма 2) находим:

$$|U_{\rho_1,\rho}| \ll \min(1, R^{\nu}k^{-\nu}|\delta_{s'}|^{-\nu}|\rho_1-\rho|^{-\nu}).$$

Пусть $W(\rho_1)$ — часть суммы $W_{v_1,v}$, отвечающая данному значению ρ_1. Сумма слагаемых суммы $W(\rho_1)$ с условием $|\rho_1-\rho| \leqslant Q$ будет $\ll 1$. При целом h с условием $0{,}5Q < 2^h \leqslant R$ сумма слагаемых суммы $W(\rho_1)$ с условием $2^h < |\rho_1-\rho| \leqslant 2^{h+1}$ будет

$$\ll \frac{2^h}{Q} R^{\nu}k^{-\nu}|\delta_{s'}|^{-\nu}2^{-h\nu}.$$

Поэтому

$$W(\rho_1) \ll 1 + \frac{R}{Q}k^{-\nu}|\delta_{s'}|^{-\nu}, \quad W_{v_1,v} \ll \frac{R^2}{Q^2}k^{-\nu}|\delta_{s'}|^{-\nu} + \frac{R}{Q},$$

$$S'^2 \ll \left(\frac{P^2}{Q^3}k^{-\nu}|\delta_{s'}|^{-\nu} + \frac{P^2}{RQ^2}\right)\min(Q^{3-\nu+\varepsilon}(k,Q)^{\nu}, Q^3) \ll$$

$$\ll P^2k^{-\nu}|\delta_{s'}|^{-\nu}Q^{-\nu+\varepsilon}(k,Q)^{\nu} + \frac{P^2Q}{R},$$

$$S' \ll PQ^{-0,5\nu+\varepsilon}|\delta_{s'}|^{-0,5\nu} + PH^{-1,5},$$

$$S_0 \ll P\ln PQ^{-0,5\nu+\varepsilon}|\delta_{s'}|^{-0,5\nu} + P\ln PH^{-1,5}.$$

Левая часть равенства (4) примет вид:

$$S + O(P\ln P\ln\ln PQ^{-0,5\nu+\varepsilon}|\delta_{s'}|^{-0,5\nu} + P\ln P\ln\ln PH^{-1,5}).$$

Далее, оценим сумму S'' слагаемых правой части равенства (4) с условием

$$d \geqslant P^{0,25}.$$

Если $\varkappa$ — число различных простых делителей числа d, удовлетворяющего этому условию, то имеем:

$$H^{4\varkappa} \geqslant P^{0,25}, \quad \varkappa > \frac{1}{16}\sqrt{\ln P}, \quad \tau(d) \geqslant 2^{\frac{1}{16}\sqrt{\ln P}}.$$

Интервал $P^{0,25} < d \leqslant P$ можно подразделить на $\ll \ln P$ интервалов вида

$$d' < d \leqslant d'', \quad 2d' \leqslant d'' \leqslant 4d'. \tag{7}$$

Часть суммы S'', отвечающая интервалу (7), будет (лемма 4)

$$\ll \sum_{d'<d\leqslant d''} \frac{P}{d}\frac{(\tau(d))^{24}}{2^{1,5\sqrt{\ln P}}} \ll \frac{P(\ln P)^{2^{24}-1}}{2^{1,5\sqrt{\ln P}}}.$$

Следовательно,

$$S'' \ll \frac{P(\ln P)^{2^{24}}}{2^{1,5\sqrt{\ln P}}} \ll \frac{P}{H}.$$

Наконец, оценим сумму S''' оставшихся слагаемых правой части равенства (4). Достаточно рассматривать лишь значения m с условием $P^{0,75} < m$. Интервал $P^{0,75} < m \leqslant P$ можно подразделить на $\ll \ln P$ интервалов вида

$$M < m \leqslant M', \quad P^{0,75} < M < P, \quad 2M \leqslant M' \leqslant 4M. \tag{8}$$

Часть $U(M)$ суммы S''', отвечающая интервалу (8). с условием, что рассматриваются только значения d с $\mu(d)=1$, или только значения d с $\mu(d)=-1$, по умножении на $\mu(d)$ будет иметь вид:

$$U = \sum_{\substack{M<m\leqslant M' \\ dm\leqslant P}} e^{2\pi ikf(dm)}.$$

Применяя лемму 8, получим:

$$U \ll PQ^{-\nu+\varepsilon}(k, Q)^{\nu},$$

$$S''' \ll P\ln PQ^{-\nu+\varepsilon}(k, Q)^{\nu},$$

а в случае, когда по меньшей мере для одного $s=s'$ выполняется неравенство $|\delta_{s'}|\geqslant 1$, получим также:

$$U \ll P\ln PQ^{-\nu+\varepsilon}|\delta_{s'}|^{-\nu},$$

$$S''' \ll P(\ln P)^2 Q^{-\nu+\varepsilon}|\delta_{s'}|^{-\nu}.$$

Замечание 1. Теоремы 1 и 2 этой работы представляют собой не что иное, как усовершенствование оценки теоремы 2 работы (1) для точек первого класса указанной теоремы. Следует, далее, отметить, что теорему 2 достаточно применять лишь в случае $|\delta_{s'}|\leqslant H$ (когда теорема 1 недостаточно точна), причем в указанном случае слагаемое PH^{-1}, стоящее в правой части неравенства для S, можно отбросить.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть при каждом s, взятом из ряда $n, \ldots, 1$, имеет место свое равенство вида*

$$A_s = \frac{a_s}{q_s} + \frac{\delta_s}{P^s}, \quad (a_s, q_s)=1, \quad 0<q_s, \quad |\delta_s|\leqslant P^{\nu},$$

причем $Q\leqslant P^{\nu}$. Тогда при любом σ, удовлетворяющем условию $0<\sigma\leqslant 1$, для числа $T(\sigma)$ дробей вида

$$\{f(p)\}, \quad p\leqslant P,$$

с условием $0\leqslant\{f(p)\}<\sigma$ будем иметь:

$$T(\sigma)=\sigma\pi(P)+O(\Delta)$$

(O — постоянное, не зависит от σ), где, полагая

$$H = e^{\sqrt{\ln P}},$$

можно брать.

$$\Delta = P(\ln P)^3 Q^{-0,5\nu+\varepsilon} \quad \text{в случае } Q\leqslant H,$$

$$\Delta = Pe^{20(\ln\ln P^2)} Q^{0,5\nu+\varepsilon} \quad \text{в противном случае.}$$

Если же по меньшей мере для одного $s = s'$ выполняется неравенство $|\delta_{s'}| \geqslant 1$, то можно брать также

$$\Delta = P(\ln P)^3 Q^{-0,5\nu+\varepsilon} |\delta_{s'}|^{-0,5\nu} \quad \textit{в случае } Q \leqslant H, \quad |\delta_{s'}| \leqslant H,$$

$$\Delta = Pe^{20(\ln\ln P)^2} Q^{-0,5\nu+\varepsilon} |\delta_{s'}|^{-0,5\nu} \textit{ в противном случа .}$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2,а работы (¹).

Замечание 2. Следует отметить, что мой метод в соединении с некоторыми элементами метода V. Brun'а позволяет значительно улучшить оценки теорем 1 и 2 (следовательно, и теоремы 3) в случае $Q < H$. Однако на этом случае я останавливаться не буду; хорошие (даже несколько более точные) оценки здесь можно получить уже и без помощи моего метода, пользуясь известными результатами теории распределения простых чисел в арифметических прогрессиях.

Поступило
20. IX. 1957

ЛИТЕРАТУРА

[1] Виноградов И. М., Тригонометрические суммы, содержащие значения многочлена, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 21 (1957), 145—170.

[2] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, Избранные труды, АН СССР (1952), 237—331.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 15–48

Н. Н. БОГОЛЮБОВ и В. С. ВЛАДИМИРОВ

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Для обобщенных функций $F_r(x)$ и $F_a(x)$, $x = (x_0, \ldots, x_3)$, обращающихся в нуль соответственно при $x \leqslant 0$ и $x \geqslant 0$, преобразования Фурье которых $\widetilde{F}_j(p)$, $j = r, a$, совпадают в некоторой области G^0, доказано существование функции комплексных переменных $k_0, \ldots, k_3$, аналитической в некоторой области G и совпадающей с $\widetilde{F}_j(p)$ при вещественных p из G^0 (теорема I). Пользуясь этим результатом, авторы доказывают основную теорему III, которая находит применение в теоретической физике при выводе так называемых дисперсионных соотношений.

Введение

В последнее время в теоретической физике приобрели важное значение так называемые дисперсионные соотношения [см. (1), (2)], дающие связь между вещественной и мнимой частями некоторой комплекснозначной (вообще говоря, обобщенной) функции $\widetilde{f}(p)$:

$$\operatorname{Re} \widetilde{f}(p) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \widetilde{f}(p')}{p' - p} dp'.$$

Для получения такого рода соотношений применяется формула Коши, в связи с чем возникает проблема аналитического продолжения функции $\widetilde{f}(p)$ в комплексную область.

Первые результаты в этом направлении были получены в работе (6), где на случай обобщенных функций была обобщена теорема Палей — Винера, и в работе (3), где на случай обобщенных функций была обобщена известная [см. (4)] теорема о том, что функция $\widetilde{f}(p)$ из $L^2(-\infty, \infty)$ имеет аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость такое, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{f}(p + iq)|^2 dp < K,$$

тогда и только тогда, когда ее преобразование Фурье $f(x)$ обращается в нуль при $x < 0$. При этом аналитическое продолжение обладает свойствами:

$$\widetilde{f}(p + iq) \xrightarrow[q \to +0]{} \widetilde{f}(p) \qquad \text{(в смысле обобщенных функций)},$$

$$|\widetilde{f}(p + iq)| \leqslant A_0(\delta) |p|^m + A_1(\delta) |p|^{m-1} + \cdots + A_m(\delta) \text{ при } q \geqslant \delta > 0,$$

где m — целое положительное число, A_i — вещественные постоянные, зависящие только от δ.

Однако при числе независимых переменных >1 такого рода теоремы (см. замечание I к теореме I) недостаточны для вывода дисперсионных соотношений. В работе (2) (Математическое дополнение) доказан ряд теорем об аналитическом продолжении обобщенных функций многих переменных. Типичной из них является теорема, приведенная в замечании V к теореме I. Там же доказана теорема III в предположении, что требуемая область аналитичности (4.7) характеризуется числами α из промежутка $\left[0,2\sqrt{\frac{M}{M+\mu}\cdot\mu}\right]$, где $M \geqslant \mu > 0$.

В первой части настоящей работы доказывается общая теорема I об аналитическом продолжении обобщенных функций многих переменных. Метод доказательства таков, что он без труда может быть распространен и на другие случаи (см. замечание II к теореме I). Во второй части при помощи теоремы I доказывается основная теорема III. При этом область аналитичности (4.7) расширяется для всех α из промежутка $[0,2\sqrt{2\mu}]$, если $M > 2\mu$.

Введем ряд определений и понятий.

Пусть x обозначает точку n-мерного эвклидова пространства R_n, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Обозначим через S множество бесконечно дифференцируемых функций, убывающих на бесконечности вместе со всеми своими производными быстрее, чем любой полином (основные функции). Вводя в S топологию при помощи счетного числа норм

$$\|\varphi\|_N = \sup_{\substack{x \\ |M|\leq N}} (1+|x_1|+\cdots+|x_n|)^N \, |D_x^M \varphi(x)|,$$

$$N = 0, 1, \ldots, \quad \varphi \in S,$$

мы, тем самым, превращаем S в линейное топологическое (счетно-нормированное) пространство. Символом

$$D_x^M \varphi(x), \quad |M| = N,$$

мы обозначаем все производные $\varphi(x)$ по x порядка N.

Обобщенной функцией f [в смысле Соболева — Шварца (5), (6), (7)] назовем всякий линейный непрерывный функционал (f, φ) над пространством S основных функций; при этом для обобщенной функции f будем употреблять обозначения:

$$f(x), \quad \int f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Эти обобщенные функции совпадают с обобщенными функциями, определенными в работах (8) и (9).

Обозначим через Φ_N пополнение S по N-й норме; тогда

$$\Phi_0 \supset \Phi_1 \supset \Phi_2 \supset \ldots, \quad S = \bigcap \Phi_N.$$

Для соответствующих сопряженных пространств (линейных функционалов) S^* и Φ_N^* справедливы соотношения:

$$\Phi_0^* \subset \Phi_1^* \subset \Phi_2^* \subset \ldots, \quad S^* = \bigcup \Phi_N^*.$$

Итак, всякая обобщенная функция $f(x)$ принадлежит некоторому Φ_N^*. Наименьшее число N такое, что данная обобщенная функция $f(x) \in \Phi_N^*$,

назовем ее порядком. Таким образом, всякая обобщенная функция $f(x)$, первоначально рассматриваемая как линейный функционал над S, может быть продолжена на Φ_N, где N — ее порядок.

Будем говорить, что последовательность обобщенных функций $f_n(x)$ (слабо) сходится к обобщенной функции $f(x)$, если для любой основной функции $\varphi(x)$

$$\int f_n(x)\varphi(x)\,dx \to \int f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Носителем непрерывной функции $\varphi(x)$ назовем замыкание множества точек x, для которых $\varphi(x) \neq 0$. Скажем, что обобщенная функция $f(x)$ равна нулю в открытом множестве G, если

$$\int f(x)\varphi(x)\,dx = 0$$

всякий раз, когда $\varphi(x)$ имеет свой носитель в G.

Условимся говорить, что некоторое выражение

$$f(k, x), \quad k = (k_1, k_2, \ldots, k_m),$$

является обобщенной функцией относительно (вещественной) переменной x и аналитической в области G_1 относительно (комплексной) переменной k, если при всех φ из S выражение

$$\int f(k, x)\varphi(x)\,dx$$

есть аналитическая функция в области G_1.

Наконец, условимся об обозначениях при $n = 4$. Через $x, p, q, \ldots$ мы будем обозначать вещественные точки из R_4, например:

$$x = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0, \vec{x}), \quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3).$$

Соответственно через k, k' будем обозначать комплексные точки

$$k = (k_0, k_1, k_2, k_3) = (k_0, \vec{k}), \quad \vec{k} = (k_1, k_2, k_3), \quad k = p + iq.$$

Символом xk будем обозначать форму

$$xk = x_0k_0 - \vec{x}\vec{k}, \quad \vec{x}\vec{k} = \sum_{1\leqslant s\leqslant 3} x_s k_s.$$

В частности, $x^2 = x_0^2 - \vec{x}^2$. Через $|\vec{x}|$ и $|\vec{k}|$ будем обозначать соответственно длины векторов $\vec{x}$ и $\vec{k}$:

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x}^2}, \quad |\vec{k}| = \sqrt{\sum_{1\leqslant s\leqslant 3} |k_s|^2}.$$

Преобразование Фурье $\tilde{f}(p)$ обобщенной функции $f(x)$ определим по формуле

$$\tilde{f}(p) = \int f(x)\,e^{ipx}\,dx,$$

где $px = p_0x_0 - \vec{p}\vec{x}$.

Символами $x \leqslant 0$, $x \geqslant 0$ мы будем обозначать области:

$$x \leqslant 0, \quad \text{если } x_0 < 0, \quad \text{или} \quad |x_0| < |\vec{x}|,$$

$$x \geqslant 0, \quad \text{если } x_0 > 0, \quad \text{или} \quad |x_0| < |\vec{x}|.$$

§ 1

ЛЕММА 1. *Пусть данная обобщенная функция $\tilde{f}(p)$, $p = (p_0, \vec{p})$, обращается в нуль в области*

$$G^0: \left\{c_1 - \sqrt{\gamma_1^2 \vec{p}^2 + c_2^2} < p_0 < c_3 + \sqrt{\gamma_2^2 \vec{p}^2 + c_4^2}\right\}, \quad \gamma_i \geqslant 0.$$

Возьмем положительные числа α и ε и введем функцию комплексного переменного $k = (k_0, \vec{k}) = (p_0 + iq_0, \vec{p} + i\vec{q})$:

$$\tilde{f}(k, \alpha, \varepsilon) = \int f(x) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\alpha} x_0^2 - \varepsilon \vec{x}^2 + ikx\right) dx, \tag{1.1}$$

где $f(x)$ — обратное преобразование Фурье функции $\tilde{f}(p)$,

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \tilde{f}(p') e^{-ip'x} dp'. \tag{1.2}$$

Обозначим через G^* область точек $k^* = (p_0, \vec{k}) = (p_0, \vec{p} + i\vec{q})$, удовлетворяющих одновременно неравенствам:

$$G^*: \left\{c_1 - \sqrt{\gamma_1^2 e(|\vec{p}| - |\vec{q}|) + c_2^2} < p_0 < c_3 + \sqrt{\gamma_2^2 e(|\vec{p}| - |\vec{q}|) + c_4^2}\right\},$$

где функция $e(\xi)$ равна ξ^2 при $\xi > 0$ и 0 при $\xi < 0$. Тогда для любого компакта K^*, лежащего в области G^*, существуют такие положительные числа α и δ, что при $\varepsilon \to +0$

$$D_k^n \tilde{f}(k, \alpha, \varepsilon) \to 0, \quad |n| = 0, 1, 2, \ldots,$$

равномерно для всех k из компакта

$$K^* \times \{|q_0| \leqslant \delta\}. \tag{1.3}$$

Доказательство. В целях сокращения записи установим лемму для случая, когда область G^0 есть совокупность точек p, удовлетворяющих неравенству

$$p_0 < a + \sqrt{\gamma^2 \vec{p}^2 + b^2}. \tag{1.4}$$

Общий случай рассматривается аналогично.

Докажем сначала, что соответствующая область G^* есть сумма монотонно возрастающей последовательности областей G_α^*,

$$G_\alpha^* = \bigcup_{0 < \beta < \alpha} G_{\alpha,\beta}^*, \quad \alpha > 0, \tag{1.5}$$

где область $G_{\alpha,\beta}^*$ определяется неравенством:

$$G_{\alpha,\beta}^*: \left\{\frac{\alpha}{\alpha - \beta}(p_0 - a)^2 + \frac{\vec{q}^2}{\beta} < b^2 + \frac{\gamma^2}{1 + \beta\gamma^2} \vec{p}^2\right\}.$$

Так как при каждом β, $0<\beta<\alpha$, функция $\frac{\alpha}{\alpha-\beta}$ монотонно убывает, то из (1.5) вытекает, что последовательность областей G_α^* монотонно возрастает. Поэтому

$$\bigcup_{\alpha>0} G_\alpha^* = \lim_{\alpha\to+\infty} G_\alpha^* = \bigcup_{\beta>0} G_{\infty,\beta}^*. \tag{1.6}$$

Но

$$G_{\infty,\beta}^*: \left\{(p_0-a)^2+\frac{\vec{q}^2}{\beta}<b^2+\frac{\gamma^2}{1+\beta\gamma^2}\vec{p}^2\right\}.$$

Докажем теперь, что

$$\bigcup_{\beta>0} G_{\infty,\beta}^* = G^*. \tag{1.7}$$

Для этого достаточно вычислить огибающую семейства поверхностей

$$f(k^*,\beta)\equiv b^2+\frac{\gamma^2}{1+\beta\gamma^2}\vec{p}^2-\frac{\vec{q}^2}{\beta}-(p_0-a)^2=0$$

при условии, что $\beta>0$. Имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial\beta}=\frac{\vec{q}^2}{\beta^2}-\frac{\gamma^4\vec{p}^2}{(1+\beta\gamma^2)^2}=0,$$

откуда следует, что или $\beta=+\infty$, или

$$\beta\gamma^2=\frac{|\vec{q}|}{|\vec{p}|-|\vec{q}|}, \text{ если } |\vec{p}|\geqslant|\vec{q}|.$$

Подставляя найденные значения β в уравнение $f(k^*,\beta)=0$, получим искомые уравнения огибающей: или

$$(p_0-a)^2<b^2,$$

или

$$(p_0-a)^2<\gamma^2(|\vec{p}|-|\vec{q}|)^2+b^2, \quad \text{если } |\vec{p}|\geqslant|\vec{q}|.$$

Соответствующая сумма по β областей $f(k^*,\beta)>0$ будет равна: или

$$(p_0-a)^2<b^2, \quad \text{если } |\vec{p}|<|\vec{q}|,$$

или

$$(p_0-a)^2<\gamma^2(|\vec{p}|-|\vec{q}|)^2+b^2, \quad \text{если } |\vec{p}|\geqslant|\vec{q}|.$$

Вводя функцию $e(\xi)$, получаем:

$$\bigcup_{\beta>0}\{f(k^*,\beta)>0\}\doteq\{(p_0-a)^2<\gamma^2 e(|\vec{p}|-|\vec{q}|)+b^2\}.$$

Таким образом, равенство (1.7) доказано. А тогда из (1.6) и (1.7) имеем:

$$G^*=\lim_{\alpha\to+\infty} G_\alpha^*. \tag{1.8}$$

Так как компакт K^* лежит в области G^*, а последовательность областей G_α^* монотонно возрастает по α, то из (1.8) следует, что найдется такое $\alpha>0$, для которого

$$K^*\subset G_\alpha^*. \tag{1.9}$$

Полученное α мы и зафиксируем для дальнейших рассуждений.

Заметим, что при любом $\varepsilon > 0$ функция $\widetilde{f}(k, \alpha, \varepsilon)$, определяемая формулой (1.1), может рассматриваться как значение функционала $f(x)$ на основной функции

$$\exp\left(-\frac{\varepsilon}{\alpha} x_0^2 - \varepsilon \vec{x}^2 + ikx\right),$$

а потому является аналитической функцией переменной k.

Принимая во внимание (1.2), получим из (1.1):

$$\widetilde{f}(k, \alpha, \varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int f(p') \left\{\int \exp\left[-\frac{\varepsilon}{\alpha} x_0^2 - \varepsilon \vec{x}^2 + i(k-p')x\right] dx\right\} dp' =$$

$$= \frac{\sqrt{\alpha}}{2^4 \pi^2 \varepsilon^2} \int f(p') \exp\left[-\frac{\alpha(k_0 - p_0')^2 + (\vec{k} - \vec{p}')^2}{4\varepsilon}\right] dp'. \qquad (1.10)$$

Возьмем некоторое достаточно малое положительное число d и построим бесконечно дифференцируемую функцию $v_d(p')$, равную 0 в области

$$p_0' < a - 2d + \sqrt{\gamma^2 \vec{p}'^2 + b^2}$$

и равную 1 вне области*

$$p_0' < a - d + \sqrt{\gamma^2 \vec{p}'^2 + b^2}. \qquad (1.11)$$

Отметим, что при каждом k функции

$$\exp\left[-\frac{\alpha(k_0 - p_0')^2 + (\vec{k} - \vec{p}')^2}{4\varepsilon}\right], \quad v_d(p') \exp\left[-\frac{\alpha(k_0 - p_0')^2 + (\vec{k} - \vec{p}')^2}{4\varepsilon}\right]$$

суть основные. Их разность отлична от нуля в области (1.11), содержащейся в области (1.4). Но, по условию, в области (1.4) сама обобщенная функция $\widetilde{f}(p')$ равна нулю. Поэтому соотношение (1.10) можно переписать в виде:

$$\widetilde{f}(k, \alpha, \varepsilon) = \int \widetilde{f}(p') H(k, p'; \alpha, \varepsilon) dp', \qquad (1.12)$$

где

$$H(k, p'; \alpha, \varepsilon) = \frac{\sqrt{\alpha}}{2^4 \pi^2 \varepsilon^2} v_d(p') \exp\left[-\frac{\alpha(k_0 - p_0')^2 + (\vec{k} - \vec{p}')^2}{4\varepsilon}\right]. \qquad (1.13)$$

В силу (1.9), (1.5) и леммы Бореля — Лебега, компакт K^* можно покрыть конечным числом областей $G^*_{\alpha, \beta}$. Возьмем одну из этих областей и изучим поведение последовательности $H(k, p'; \alpha, \varepsilon)$ при $\varepsilon \to +0$, когда k принадлежит

$$[K^* \cap G^*_{\alpha, \beta}] \times \{|q_0| \leqslant \delta\}, \qquad (1.14)$$

где δ — малое положительное число, которое будет выбрано ниже.

В силу свойств функции $v_d(p')$, достаточно ограничиться областью

$$p_0' \geqslant a - 3d + \sqrt{\gamma^2 \vec{p}'^2 + b^2}. \qquad (1.15)$$

* Такие функции существуют [см., например, (10)].

Так как

$$k^* = (p_0, \vec{p} + i\vec{q}) \in K^* \cap G^*_{\alpha, \beta},$$

то существуют такие достаточно малые положительные числа d и d_1, не зависящие от k^*, что

$$b^2 + \frac{\gamma^2}{1+\beta\gamma^2}\vec{p}^2 - \frac{\alpha}{\alpha-\beta}(p_0 - a + 3d)^2 - \frac{\vec{q}^2}{\beta} \geqslant d_1. \tag{1.16}$$

Оценим снизу выражение

$$\operatorname{Re}\left[\alpha\left(k_0 - p'_0\right)^2 + (\vec{k} - \vec{p}')^2\right] = \alpha(p_0 - a + 3d)^2 + \alpha\left(p'_0 - a + 3d\right)^2 + \vec{p}^2 +$$
$$+ \vec{p}'^2 - \vec{q}^2 - 2\alpha(p_0 - a + 3d)(p'_0 - a + 3d) - 2\vec{p}\vec{p}' - \alpha q_0^2$$

при всех k из (1.14) и p' из (1.15).

Пусть m и n — положительные числа, которые будут выбраны ниже. На основании неравенства Буняковского имеем:

$$\alpha(p_0 - a + 3d)(p'_0 - a + 3d) + \vec{p}\vec{p}' \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\vec{p}'^2 + m(p'_0 - a + 3d)^2}\sqrt{\vec{p}^2 + \frac{\alpha^2}{m}(p_0 - a + 3d)^2}.$$

Принимая во внимание это соотношение, получим:

$$\operatorname{Re}[\alpha(k_0 - p'_0)^2 + (\vec{k} - \vec{p}')^2] \geqslant \alpha(p_0 - a + 3d)^2 + \alpha(p'_0 - a + 3d)^2 + \vec{p}^2 + \vec{p}'^2 -$$
$$- \vec{q}^2 - \alpha q_0^2 - 2\sqrt{\vec{p}'^2 + m(p'_0 - a + 3d)^2}\sqrt{\vec{p}^2 + \frac{\alpha^2}{m}(p_0 - a + 3d)^2} \geqslant$$
$$\geqslant \alpha(p_0 - a + 3d)^2 + \alpha(p'_0 - a + 3d)^2 + \vec{p}^2 + \vec{p}'^2 -$$
$$- \vec{q}^2 - \alpha q_0^2 - 2\sqrt{\vec{p}'^2 + m(p'_0 - a + 3d)^2}\cdot\sqrt{\vec{p}^2 + \frac{\alpha^2}{m}(p_0 - a + 3d)^2} -$$
$$- n\left[\sqrt{\vec{p}'^2 + m(p'_0 - a + 3d)^2} - \frac{1}{n}\sqrt{\vec{p}^2 + \frac{\alpha}{m}(p_0 - a + 3d)^2}\right]^2 =$$
$$= (\alpha - nm)(p'_0 - a + 3d)^2 + \left(\alpha - \frac{\alpha^2}{nm}\right)(p_0 - a + 3d)^2 +$$
$$+ \vec{p}^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \vec{p}'^2(1 - n) - \vec{q}^2 - \alpha q_0^2.$$

Выберем теперь числа m и n из условий:

$$(\alpha - nm)\gamma^2 = n - 1, \quad \alpha > nm.$$

Обозначая $\alpha - nm = \beta$ и учитывая (1.16), получим:

$$\operatorname{Re}[\alpha(k_0 - p'_0)^2 + (\vec{k} - \vec{p}')^2] \geqslant \beta\left[(p'_0 - a + 3d)^2 - \gamma^2\vec{p}'^2 + \frac{\gamma^2\vec{p}^2}{1+\beta\gamma^2} -\right.$$
$$\left. - \frac{\alpha}{\alpha-\beta}(p_0 - a + 3d)^2 - \frac{\vec{q}^2}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}q_0^2\right] \geqslant$$
$$\geqslant \beta\left[\frac{d_1}{2} + (p'_0 - a + 3d)^2 - \gamma^2\vec{p}'^2 - b^2\right],$$

если выбрать

$$|q_0| \leqslant \sqrt{\frac{d_1\beta}{2\alpha}} = \delta.$$

Таким образом, в области (1.15) получаем оценку:

$$\left|\exp\left[-\frac{\alpha(k_0-p_0')^2+(\vec{k}-\vec{p}')^2}{4\varepsilon}\right]\right| \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left\{-\frac{\beta}{4\varepsilon}\left[\frac{d_1}{2}+(p_0'-a+3d)^2-\gamma^2\vec{p}'^2-b^2\right]\right\}. \qquad (1.17)$$

Оценка (1.17) справедлива при всех k из (1.14); числа d, d_1 и δ зависят от β. Так как компакт K^* покрывается конечным числом областей $G^*_{\lambda,\beta}$, то можно считать, выбирая β, d, d_1 и δ наименьшими, что эта оценка справедлива при всех k из (1.3).

Мы докажем сейчас, что все нормы основной функции (1.13) для всех k из (1.3) имеют оценки:

$$\|H(k, p'; \alpha, \varepsilon)\|_N \leqslant c_N \varepsilon^{-2-N} \exp\left(-\frac{\beta d_1}{8\varepsilon}\right), \quad N=0, 1, 2, \ldots. \qquad (1.18)$$

В силу свойств функции $v_a(p')$, мы можем ограничиться рассмотрением функции $H(k, p'; \alpha, \varepsilon)$ в области

$$p_0' \geqslant a-2d+\sqrt{\gamma^2\vec{p}'^2+b^2}. \qquad (1.19)$$

Так как режущая экспонента в (1.13) при дифференцировании по p' остается неизменной, то из (1.17) и (1.19) следует, что для доказательства (1.18) достаточно установить конечность выражений

$$|p_0'|^N \exp\left\{\frac{\beta}{4\varepsilon}\left[-(p_0'-a+3d)^2+\gamma^2\vec{p}'^2+b^2\right]\right\}, \quad N=0, 1, 2, \ldots,$$

при условии (1.19). Действительно,

$$|p_0'|^N \exp\left\{\frac{\beta}{4\varepsilon}\left[-(p_0'-a+3d)^2+\gamma^2\vec{p}'^2+b^2\right]\right\} \leqslant$$
$$\leqslant |p_0'|^N \exp\left\{\frac{\beta}{4\varepsilon}\left[(p_0'-a+2d)^2-(p_0'-a+3d)^2\right]\right\} =$$
$$= |p_0'|^N \exp\left[-\frac{d\beta}{2\varepsilon}\left(p_0'-a+\frac{5}{2}d\right)\right] \leqslant c_N.$$

Из (1.12) и (1.18) следует, что

$$\tilde{J}(k, \alpha, \varepsilon) \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to +0$$

равномерно для всех k из (1.3). Совершенно аналогично доказывается, что

$$D_k^n \tilde{J}(k, \alpha, \varepsilon) \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to +0, \quad |n| = 1, 2, \ldots,$$

равномерно для всех k из (1.3). Лемма доказана.

ЛЕММА II. *Пусть даны две обобщенные функции $F_r(x)$ и $F_a(x)$, удовлетворяющие условиям:*

$$F_r(x)=0, \quad \text{если } x \leqslant 0, \qquad F_a(x)=0, \quad \text{если } x \geqslant 0,$$

и пусть их порядки не превосходят числа N. Пусть, далее, $\vec{\lambda}$ и $\vec{\mu}$ — любые вещественные векторы, причем

$$|\vec{\lambda}| \leqslant 1, \qquad (1.20)$$

a и b — любые вещественные числа. Тогда функции комплексного переменного z

$$\widetilde{F}_j(z, \vec{\lambda}\sqrt{(z-a)(z-b)}+\vec{\mu};\ \alpha, \varepsilon) =$$
$$= \int F_j(x) \exp\left[-\frac{\varepsilon}{\alpha}x_0^2 - \varepsilon\vec{x}^2 + izx_0 - i\vec{\lambda}\vec{x}\sqrt{(z-a)(z-b)} - i\vec{\mu}\vec{x}\right]dx$$
$$(j = r, a) \tag{1.21}$$

растут не быстрее, чем некоторый полином степени $2N$ (с коэффициентами, непрерывно зависящими от $(\vec{\lambda}, \vec{\mu})$) соответственно в областях

$$\operatorname{Im} z \geqslant 0 \quad \textit{при} \quad j = r \quad \textit{и} \quad \operatorname{Im} z \leqslant 0 \quad \textit{при} \quad j = a.$$

Доказательство. Возьмем некоторое положительное число d и введем бесконечно дифференцируемую функцию $\varphi(t)$ такую, что

$$\varphi(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < -2d, \quad \varphi(t) = 1 \quad \text{при} \quad t > -d. \tag{1.22}$$

Возьмем некоторое $R > 0$ и рассмотрим при $|z| \geqslant R$ основные функции

$$\exp\left[-\frac{\varepsilon}{\alpha}x_0^2 - \varepsilon\vec{x}^2 + izx_0 - i\vec{\lambda}\vec{x}\sqrt{(z-a)(z-b)} - i\vec{\mu}\vec{x}\right],$$
$$H(x, z) = \varphi(|z|x_0)\,\varphi[|z|^2(x_0^2 - \vec{x}^2)] \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{\varepsilon}{\alpha}x_0^2 - \varepsilon\vec{x}^2 + izx_0 - i\vec{\lambda}\vec{x}\sqrt{(z-a)(z-b)} - i\vec{\mu}\vec{x}\right].$$

Их разность равна нулю, если

$$x_0 \geqslant -\frac{d}{|z|}, \quad x_0^2 \geqslant x^2 - \frac{d}{|z|^2}.$$

Но в области, где $x_0 < 0$, или $x_0^2 < \vec{x}^2$, обращается в нуль сама функция $F_r(x)$. Поэтому выражение (1.21) для $j = r$ может быть записано в виде:

$$\widetilde{F}_r(z, \vec{\lambda}\sqrt{(z-a)(z-b)}+\vec{\mu};\ \alpha, \varepsilon) = \int F_r(x)\,H(x, z)\,dx. \tag{1.23}$$

Изучим функцию $-x_0 \operatorname{Im} z + \vec{\lambda}\vec{x}\operatorname{Im}\sqrt{(z-a)(z-b)}$ при условии, что

$$x_0 \geqslant -\frac{2d}{|z|}, \quad x_0^2 \geqslant \vec{x}^2 - \frac{2d}{|z|^2}, \quad \operatorname{Im} z \geqslant 0, \quad |z| \geqslant R. \tag{1.24}$$

В силу (1.20), имеем:

$$-x_0 \operatorname{Im} z + \vec{\lambda}\vec{x}\operatorname{Im}\sqrt{(z-a)(z-b)} \leqslant$$
$$\leqslant -x_0 \operatorname{Im} z + |\vec{x}|\left|\operatorname{Im}\sqrt{(z-a)(z-b)}\right|. \tag{1.25}$$

Обозначая $z = |z|e^{i\theta}$, где $|z| \geqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, получим:

$$\left|\operatorname{Im}\sqrt{(z-a)(z-b)}\right| = \operatorname{Im}\left[|z|e^{i\theta}\sqrt{\left(1-\frac{a}{|z|}e^{-i\theta}\right)\left(1-\frac{b}{|z|}e^{-i\theta}\right)}\right] \leqslant$$
$$\leqslant |z|\sin\theta + \frac{|a+b|}{2} + O\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

Отсюда следует, что для данных a и b можно выбрать такое большое число R и такое число $\sigma > 0$, что при всех $|z| \geqslant R$ будет:

$$|\operatorname{Im}\sqrt{(z-a)(z-b)}| \leqslant |z|\sin\theta + \sigma.$$

Отсюда, из (1.24) и (1.25) получаем:

$$\begin{aligned} &-x_0 \operatorname{Im} z + \vec{\lambda}\vec{x} \operatorname{Im}\sqrt{(z-a)(z-b)} \leqslant \\ &\leqslant [-x_0|z| + \sqrt{x_0^2|z|^2 + 2d}]\sin\theta + \sigma|\vec{x}| \leqslant \\ &\leqslant 2d + \sqrt{2d + 4d^2} + \sigma|\vec{x}| = c + \sigma|\vec{x}|. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Принимая во внимание (1.22) и (1.26), получаем:

$$\|H(x, z)\|_N \leqslant c_N(|z|^{2N} + 1). \tag{1.27}$$

Оценка (1.27) получена при $|z| \geqslant R$, но ясно, что она справедлива и при $|z| < R$.

Так как порядок обобщенной функции $F_r(x)$ не превосходит N, то из (1.23) и (1.27) следует, что при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$

$$|\widetilde{F}_r(z, \vec{\lambda}\sqrt{(z-a)(z-b)} + \vec{\mu}; \alpha, \varepsilon)| \leqslant A_N(|z|^{2N} + 1).$$

Аналогично изучается и функция $\widetilde{F}_a$. Лемма доказана.

§ 2

Применим леммы, доказанные в § 1, к установлению следующей теоремы.

ТЕОРЕМА I. *Пусть даны две обобщенные функции $F_r(x)$ и $F_a(x)$, удовлетворяющие условиям:*

$$F_r(x) = 0, \text{ если } x \leqslant 0, \quad F_a(x) = 0, \text{ если } x \geqslant 0;$$

$$\widetilde{F}_r(p) - \widetilde{F}_a(p) = 0, \text{ если } p \in G^0,$$

где $\widetilde{F}_j(p)$ есть преобразование Фурье функции $F_j(x)$, $j = r, a$, и область G^0 есть совокупность точек $p = (p_0, \vec{p})$, удовлетворяющих неравенствам:

$$G^0: \left\{ c_1 - \sqrt{\gamma_1^2\vec{p}^{\,2} + c_2^2} < p_0 < c_3 + \sqrt{\gamma_2^2\vec{p}^{\,2} + c_4^2} \right\}, \quad \gamma_i \geqslant 0.$$

Пусть, далее, порядки обобщенных функций $\widetilde{F}_j(p)$ не превосходят числа N, и пусть a и b — любые вещественные числа такие, что $a < b$. Обозначим через $G(a, b)$ множество комплексных точек $k = (k_0, \vec{k}) = (p_0 + iq_0, \vec{p} + i\vec{q})$, удовлетворяющих неравенству

$$|\vec{q}| < |\operatorname{Im}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}|, \tag{2.1}$$

а также обладающих тем свойством, что при всех ξ, $a \leqslant \xi \leqslant b$, выполнены неравенства:

$$c_1 - \sqrt{\gamma_1^2 e[T(k, a, b, \xi)] + c_2^2} < \xi < c_3 + \sqrt{\gamma_2^2 e[T(k, a, b, \xi)] + c_4^2}, \tag{2.2}$$

где

$$T(k, a, b, \xi) = \left| \vec{p} - \vec{q}\, \frac{\operatorname{Re} \sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}}{\operatorname{Im} \sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}} \right| - \frac{\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}}{\operatorname{Im} \sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}}\, |\vec{q}|. \quad (2.3)$$

Тогда существует функция $\widetilde{\Phi}(k)$ *комплексного переменного* k, *аналитическая в области* G, *где*

$$G = \bigcup_{a<b} G(a, b),$$

такая, что при всех вещественных $p = (p_0, \vec{p})$ *из области* G^0

$$\widetilde{\Phi}(p) = \widetilde{F}_r(p) = \widetilde{F}_a(p). \quad (2.4)$$

Кроме того, в достаточно малой окрестности любой точки области G *имеет место интегральное представление*

$$\widetilde{\Phi}(k) = \sum_{j=r,a} \int \widetilde{F}_j(p') \widetilde{H}_j(k, p')\, dp', \quad (2.5)$$

где функции $\widetilde{H}_j(k, p')$ *обладают следующими свойствами: при каждом* p *они являются аналитическими относительно* k *в рассматриваемой окрестности; при каждом* k *из этой окрестности они принадлежат пространству* Φ_N *и, наконец, являются «универсальными» для всех обобщенных функций* $\widetilde{F}_j(p)$, *удовлетворяющих условиям теоремы.*

Доказательство. Прежде чем переходить к доказательству теоремы, установим следующие соотношения между областями G^0, G^* и G:

$$G \cap \{q_0 = 0\} \subset G^*, \quad (2.6)$$

$$G^0 = G^* \cap \{\vec{q} = \vec{0}\} = G \cap \{q_0 = 0,\ \vec{q} = \vec{0}\}, \quad (2.7)$$

где область G^* определена в лемме I.

Действительно, пусть точка $k^* = (p_0, \vec{k})$ принадлежит $G \cap \{q_0 = 0\}$. Это значит, что k^* принадлежит $G(a, b) \cap \{q_0 = 0\}$. Но тогда из (2.1) имеем: $a < p_0 < b$. Полагая в неравенствах (2.2) и (2.3) $\xi = p_0$, получаем, что $k^* \in G^*$. Включение (2.6) доказано.

Первое из равенств (2.7) очевидно. Из (2.6) следует:

$$G \cap \{q_0 = 0,\ \vec{q} = \vec{0}\} \subset G^* \cap \{\vec{q} = \vec{0}\}.$$

Докажем обратное включение, а с ним и соответствующее равенство (2.7).

Пусть

$$p = (p_0, \vec{p}) \in G^* \cap \{\vec{q} = \vec{0}\}.$$

Тогда при достаточно малом $\eta > 0$ все точки $(p_0 + \alpha, \vec{p})$, где $|\alpha| \leqslant \eta$, будут принадлежать G^*. Но, в силу (2.1) — (2.3), это значит, что

$$p \in G(p_0 - \eta, p_0 + \eta) \subset G \cap \{q_0 = 0,\ \vec{q} = \vec{0}\}.$$

Пусть a и b — любые вещественные числа, причем $a < b$. Докажем, что все утверждения теоремы справедливы для области $G(a, b)$.

Пусть K — любой компакт, содержащийся в области $G(a, b)$. Тогда найдется такое достаточно малое положительное число σ, что компакт

K_1 — множество точек k, удаленных от компакта K на расстояние, не превосходящее σ,— содержится в $G(a, b)$. Предполагаем компакт K таким, чтобы все его подмножества, рассматриваемые ниже, были не пусты.

Обозначим через K^* и K_1^* сечение плоскостью $q_0 = 0$ соответственно компактов K и K_1,

$$K^* = K \cap \{q_0 = 0\}, \quad K_1^* = K_1 \cap \{q_0 = 0\}.$$

Из (2.6) следует, что $K_1^* \subset G^*$. Но тогда из определения областей $G(a, b)$ и G^* следует существование такого достаточно малого положительного числа η, что имеют место утверждения:

1) компакт

$$K_1^* + \bigcup_{k \in K_1} \left[\xi, \vec{p} + \vec{q}\, \frac{\pm \sqrt{(\xi - a)(\xi - b)} - \operatorname{Re} \sqrt{(k_0 - a)(k_0 - b)}}{\operatorname{Im} \sqrt{(k_0 - a)(k_0 - b)}},\ a - \eta \leqslant \xi \leqslant b + \eta\right] \tag{2.8}$$

содержится в области G^*;

2) при всех $k^* = (p_0, \vec{k})$ из K_1^* выполнены неравенства

$$a + \eta \leqslant p_0 \leqslant b - \eta. \tag{2.9}$$

Возьмем положительные числа α и ε и введем функции комплексного переменного $k = (k_0, \vec{k})$

$$\begin{gathered} \widetilde{F}_j(k, \alpha, \varepsilon) = \int F_j(x) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\alpha} x_0^2 - \varepsilon \vec{x}^2 + ikx\right) dx, \quad j = r,\ a, \\ \widetilde{f}(k, \alpha, \varepsilon) = \widetilde{F}_r(k, \alpha, \varepsilon) - \widetilde{F}_a(k, \alpha, \varepsilon). \end{gathered} \tag{2.10}$$

Применим лемму I к функции

$$\widetilde{f}(p) = \widetilde{F}_r(p) - \widetilde{F}_a(p)$$

и к компакту (2.8). Тогда получим, что существуют такие положительные числа α и δ, что при $\varepsilon \to +0$ имеют место следующие соотношения:

$$\widetilde{f}\left[\xi, \vec{p} + \vec{q}\, \frac{\pm \sqrt{(\xi - a)(\xi - b)} - \operatorname{Re} \sqrt{(k_0 - a)(k_0 - b)}}{\operatorname{Im} \sqrt{(k_0 - a)(k_0 - b)}},\ \alpha,\ \varepsilon\right] \to 0 \tag{2.11}$$

равномерно для всех ξ, $a - \eta \leqslant \xi \leqslant b + \eta$, и k из K_1;

$$\frac{d\widetilde{f}}{d\xi}\left[\xi, \vec{p} + \vec{q}\, \frac{\pm \sqrt{(\xi - a)(\xi - b)} - \operatorname{Re} \sqrt{(k_0 - a)(k_0 - b)}}{\operatorname{Im} \sqrt{(k_0 - a)(k_0 - b)}},\ \alpha,\ \varepsilon\right] \to 0 \tag{2.12}$$

равномерно для всех ξ, $a + \eta \leqslant \xi \leqslant b - \eta$ и k из K_1;

$$\widetilde{f}(k, \alpha, \varepsilon) \to 0 \tag{2.13}$$

равномерно для всех k из $K_1^* \times \{|q_0| \leqslant \delta\}$.

Найденные числа α и δ, зависящие только от компакта K, зафиксируем для дальнейших рассуждений.

Заметим, что функции $\widetilde{F}_j(k, \alpha, \varepsilon)$, рассматриваемые как значения функционалов $F_j(x)$ на основной функции

$$\exp\left(-\frac{\varepsilon}{\alpha} x_0^2 - \varepsilon \vec{x}^2 + ikx\right), \quad \varepsilon > 0, \quad \alpha > 0,$$

суть целые аналитические функции комплексного переменного $k = (k_0, k_1, k_2, k_3)$.

Фиксируем точку $k' = (k'_0, \vec{k}') = (p'_0 + iq'_0, \vec{p}' + i\vec{q}')$ из компакта K и возьмем положительное число $\rho < \min\left(\frac{\delta}{3}, \frac{\sigma}{4}\right)$. Обозначим через $G(k')$ окрестность точки k', состоящую из точек $k = (k_0, \vec{k}) = (p_0 + iq_0, \vec{p} + i\vec{q})$ таких, что

$$G(k'): \left\{|k_s - k'_s| < \frac{\rho}{3}, \ s = 0, 1, 2, 3\right\}.$$

Тогда при достаточно малом ρ область

$$|k_s - k'_s| < 2\rho, \quad s = 0, 1, 2, 3, \tag{2.14}$$

будет содержаться в K_1, ибо

$$\sum_{0 \leqslant s \leqslant 3} |k_s - k'_s|^2 < 16\rho^2 < \sigma^2.$$

По теореме Коши, при всех k из $G(k')$ имеем:

$$\widetilde{F}_j(k, \alpha, \varepsilon) = \left(\frac{\rho}{2\pi}\right)^4 \int\limits_{0 \leqslant \theta_s \leqslant 2\pi} \widetilde{F}_j(k'_0 + \rho e^{i\theta_0}, \vec{k}' + \vec{\nu} + \rho e^{i\vec{\theta}}, \alpha, \varepsilon) \times$$
$$\times \frac{e^{i\theta_0}\, d\theta_0}{k'_0 + \rho e^{i\theta_0} - k_0} \prod_{1 \leqslant s \leqslant 3} \frac{e^{i\theta_s}\, d\theta_s}{k'_s + \nu_s + \rho e^{i\theta_s} - k_s} \tag{2.15}$$

при любом вещественном векторе $\vec{\nu}$, для которого

$$|\nu_s| \leqslant \frac{\rho}{3}, \quad s = 1, 2, 3.$$

Заметим, что при всех $\vec{\nu}$, $|\nu_s| \leqslant \frac{\rho}{3}$, и $\theta = (\theta_0, \vec{\theta}) = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$, $0 \leqslant \theta_s \leqslant 2\pi$, точки

$$(k'_0 + \rho e^{i\theta_0}, \vec{k}' + \vec{\nu} + \rho e^{i\vec{\theta}}) \tag{2.16}$$

содержатся в области (2.14), а следовательно, и в K_1. Кроме того, при всех k из $G(k')$ имеют место неравенства:

$$\begin{gathered} |k'_0 + \rho e^{i\theta_0} - k_0| > \frac{2}{3}\rho, \\ |k'_s + \nu_s + \rho e^{i\theta_s} - k_s| \geqslant |\rho e^{i\theta_s}| - |\nu_s| - |k_s - k'_s| > \frac{1}{3}\rho. \end{gathered} \tag{2.17}$$

Пусть $v(\vec{\nu})$ — бесконечно дифференцируемая функция, обращающаяся в нуль вне куба $|\nu_s| \leqslant \frac{\rho}{3}$ и такая, что

$$\int v(\vec{\nu})\, d\vec{\nu} = 1. \tag{2.18}$$

Тогда, в силу (2.17), функция

$$w(k, \vec{\nu}, \theta) = \left(\frac{\rho}{2\pi}\right)^4 \frac{e^{i\theta_0}}{k'_0 + \rho e^{i\theta_0} - k_0} \prod_{1 \leqslant s \leqslant 3} \frac{e^{i\theta_s}}{k'_s + \nu_s + \rho e^{i\theta_s} - k_s} v(\vec{\nu}) \tag{2.19}$$

является аналитической относительно k в области $G(k')$ при всех рассматриваемых $\vec{\nu}$ и θ. Кроме того, при всех θ и k из $G(k')$ эта функ-

ция — бесконечно дифференцируемая и финитная относительно $\vec{\nu}$.

Принимая во внимание независимость функций (2.15) от вектора $\vec{\nu}$, в силу (2.18) и (2.19) получим:

$$\widetilde{F}_j(k, \alpha, \varepsilon) = \int \widetilde{F}_j(k'_0 + \rho e^{i\theta_0}, \vec{k}' + \vec{\nu} + \rho e^{i\vec{\theta}}, \alpha, \varepsilon)\, w(k, \vec{\nu}, \theta)\, d\theta\, d\vec{\nu} =$$
$$= \int\limits_{q'_0 + \rho \sin\theta_0 > 0} \widetilde{F}_r(k'_0 + \rho e^{i\theta_0}, \vec{k}' + \vec{\nu} + \rho e^{i\vec{\theta}}, \alpha, \varepsilon)\, w(k, \vec{\nu}, \theta)\, d\theta\, d\vec{\nu} +$$
$$+ \int\limits_{q'_0 + \rho \sin\theta_0 < 0} \widetilde{F}_a(k'_0 + \rho e^{i\theta_0}, \vec{k}' + \vec{\nu} + \rho e^{i\vec{\theta}}, \alpha, \varepsilon)\, w(k, \vec{\nu}, \theta)\, d\theta\, d\vec{\nu} + T_j(k, \alpha, \varepsilon), \quad (2.20)$$

где

$$T_r(k, \alpha, \varepsilon) = \int\limits_{q'_0 + \rho \sin\theta_0 < 0} \widetilde{f}(k'_0 + \rho e^{i\theta_0}, \vec{k}' + \vec{\nu} + \rho e^{i\vec{\theta}}, \alpha, \varepsilon)\, w(k, \vec{\nu}, \theta)\, d\theta\, d\vec{\nu}, \quad (2.21)$$

$$T_a(k, \alpha, \varepsilon) = -\int\limits_{q'_0 + \rho \sin\theta_0 > 0} \widetilde{f}(k'_0 + \rho e^{i\theta_0}, \vec{k}' + \vec{\nu} + \rho e^{i\vec{\theta}}, \alpha, \varepsilon)\, w(k, \vec{\nu}, \theta)\, d\theta\, d\vec{\nu}. \quad (2.22)$$

Для того чтобы получить выражение для

$$\widetilde{F}_j(k'_0 + \rho e^{i\theta_0}, \vec{k}' + \vec{\nu} + \rho e^{i\vec{\theta}}, \alpha, \varepsilon),$$

построим вспомогательные функции $f_j(z, \varepsilon)$ одного комплексного переменного z, положив

$$f_j(z, \varepsilon) = \varphi(z)\, \widetilde{F}_j[z, \vec{\lambda}\sqrt{(z-a)(z-b)} + \vec{\mu}, \alpha, \varepsilon], \qquad j = r,\ a. \quad (2.23)$$

Вещественные векторы $\vec{\lambda}$ и $\vec{\mu}$ выберем из условия

$$\vec{k}' + \vec{\nu} + \rho e^{i\vec{\theta}} = \vec{\lambda}\sqrt{(k'_0 + \rho e^{i\theta_0} - a)(k'_0 + \rho e^{i\theta_0} - b)} + \vec{\mu}, \quad (2.24)$$

т. е.

$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{q}' + \rho\, \overrightarrow{\sin\theta}}{\operatorname{Im}\sqrt{(k'_0 + \rho e^{i\theta_0} - a)(k'_0 + \rho e^{i\theta_0} - b)}},$$
$$\vec{\mu} = \vec{p}' + \vec{\nu} + \rho\, \overrightarrow{\cos\theta} - (\vec{q}' + \rho\, \overrightarrow{\sin\theta})\, \frac{\operatorname{Re}\sqrt{(k'_0 + \rho e^{i\theta_0} - a)(k'_0 + \rho e^{i\theta_0} - b)}}{\operatorname{Im}\sqrt{(k'_0 + \rho e^{i\theta_0} - a)(k'_0 + \rho e^{i\theta_0} - b)}}. \quad (2.25)$$

Так как точки (2.16) принадлежат K_1, то, в силу (2.1), выбранный в (2.25) вектор $\vec{\lambda}$ будет удовлетворять условию

$$|\vec{\lambda}| < 1. \quad (2.26)$$

Предположим, что функция $\varphi(z)$ обладает следующими свойствами:

1) она является аналитической на всей плоскости комплексного переменного z за исключением линии разреза

$$\operatorname{Im} z = 0, \quad c \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant d \quad (c > b,\ \eta < c - b); \quad (2.27)$$

2) убывает вместе со всеми своими производными при $|z| \to \infty$ не медленнее, чем z^{-N_1}, где число N_1 может быть выбрано достаточно большим и, во всяком случае, $N_1 \geqslant 2N + 1$;

3) если $\operatorname{Im} z \to \pm 0$, то равномерно на каждом конечном интервале переменной $\xi = \operatorname{Re} z$

$$\frac{d^i\varphi(z)}{dz^i} \to \frac{d^i\varphi_j(\xi)}{d\xi^i}, \quad j = r,\ a, \quad i = 0,\ 1, \ldots,$$

где предельные функции $\varphi_r(\xi) \equiv \varphi(\xi + 0)$ и $\varphi_a(\xi) \equiv \varphi(\xi - 0)$ непрерывны со всеми своими производными на всей вещественной оси.

Заметим, что из 1) следует:

$$\varphi_r(\xi) = \varphi_a(\xi) = 0, \quad \text{если } \xi < c, \tag{2.28}$$

а из 2) следуют оценки при $|\xi| \to \infty$:

$$\left| \frac{d^i\varphi_j(\xi)}{d^i\xi} \right| \leqslant A_i |\xi|^{-N_1}, \quad j = r,\ a, \quad i = 0,\ 1, \ldots; \tag{2.29}$$

4) $\varphi(k_0' + \rho e^{i\theta_0}) \neq 0$ при всех θ_0, $0 \leqslant \theta_0 \leqslant 2\pi$.

Функции $\varphi(z)$, удовлетворяющие условиям 1) — 4), существуют; это будут, например, функции вида $\int\limits_c^d \frac{g(\xi)}{(z-\xi)^{N_1}}\, d\xi$, где $g(\xi)$ — функции вещественного переменного ξ, обладающие непрерывными производными всех порядков в интервале $[c, d]$ и обращающиеся в нуль со всеми своими производными в граничных точках этого интервала.

Если разрезать плоскость комплексного переменного z по линиям

$$\operatorname{Im} z = 0, \quad -\infty < \operatorname{Re} z \leqslant a, \quad b \leqslant \operatorname{Re} z < \infty, \tag{2.30}$$

то в разрезанной таким образом плоскости функции $f_j(z, \varepsilon)$ будут однозначными и принимающими при этом разные значения на противоположных берегах разреза (2.30). Это обстоятельство является нежелательным для дальнейших рассуждений. Поэтому вместо функций $f_j(z, \varepsilon)$ мы будем рассматривать функции

$$f_{j1}(z, \varepsilon) = \frac{\varphi(z)}{2} [\widetilde{F}_j(z, \vec{\lambda}\sqrt{(z-a)(z-b)} + \vec{\mu}, \alpha, \varepsilon) + \widetilde{F}_j(z, -\vec{\lambda}\sqrt{(z-a)(z-b)} + \vec{\mu}, \alpha, \varepsilon)],$$

$$f_{j2}(z, \varepsilon) = \frac{\varphi(z)}{2\sqrt{(z-a)(z-b)}} [\widetilde{F}_j(z, \vec{\lambda}\sqrt{(z-a)(z-b)} + \vec{\mu}, \alpha, \varepsilon) - \widetilde{F}_j(z, -\vec{\lambda}\sqrt{(z-a)(z-b)} + \vec{\mu}, \alpha, \varepsilon)].$$

Тогда

$$f_j(z, \varepsilon) = f_{j1}(z, \varepsilon) + \sqrt{(z-a)(z-b)}\, f_{j2}(z, \varepsilon). \tag{2.31}$$

Заметим, что, в силу свойства 1), функции $\varphi(z)$, введенные функции $f_{ji}(z, \varepsilon)$, $j = r,\ a$, $i = 1,\ 2$, являются аналитическими при всех z, кроме линии разреза (2.27). Далее, так как выполнено условие (2.26), то из леммы II и из свойства 2) функции $\varphi(z)$ при всех $\varepsilon > 0$ следуют оценки:

$$|f_{ji}(z, \varepsilon)| \leqslant \frac{c(\varepsilon)}{1 + |z|}, \tag{2.32}$$

причем при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ считаем $j = r$ и при $\operatorname{Im} z \leqslant 0$ считаем $j = a$.

Принимая во внимание (2.32), по теореме Коши получим:

$$f_{ji}(z, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{ri}(\xi + 0, \varepsilon) - f_{ai}(\xi - 0, \varepsilon)}{\xi - z} d\xi,$$

где при $\operatorname{Im} z > 0$ считаем $j = r$ и при $\operatorname{Im} z < 0$ считаем $j = a$.

В силу (2.31), получим далее:

$$f_j(z, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{r1}(\xi + 0, \varepsilon) - f_{a1}(\xi - 0, \varepsilon)}{\xi - z} d\xi +$$

$$+ \frac{\sqrt{(z-a)(z-b)}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{r2}(\xi + 0, \varepsilon) - f_{a2}(\xi - 0, \varepsilon)}{\xi - z} d\xi.$$

Продолжим наши рассуждения, полагая в последнем равенстве $z = k_0' + \rho e^{i\theta_0}$. При этом мы считаем $j = r$ при $q_0' + \rho \sin \theta_0 > 0$ и $j = a$ при $q_0' + \rho \sin \theta_0 < 0$. Принимая во внимание (2.23) и свойства функции $\varphi(z)$, получим:

$$\widetilde{F}_j[k_0' + \rho e^{i\theta_0}, \vec{\lambda} \sqrt{(k_0' + \rho e^{i\theta_0} - a)(k_0' + \rho e^{i\theta_0} - b)} + \vec{\mu}, \alpha, \varepsilon] =$$

$$= \frac{1}{4\pi i \varphi(k_0' + \rho e^{i\theta_0})} \int_{-\infty}^{\infty} \{\widetilde{F}_r[\xi, \vec{\lambda}\sqrt{(\xi - a)(\xi - b)} + \vec{\mu}, \alpha, \varepsilon]\, \varphi_r(\xi) -$$

$$- \widetilde{F}_a[\xi, \vec{\lambda}\sqrt{(\xi - a)(\xi - b)} + \vec{\mu}, \alpha, \varepsilon] \cdot \varphi_a(\xi) +$$

$$+ \widetilde{F}_r[\xi, -\vec{\lambda}\sqrt{(\xi - a)(\xi - b)} + \vec{\mu}, \alpha, \varepsilon]\, \varphi_r(\xi) -$$

$$- \widetilde{F}_a[\xi, -\vec{\lambda}\sqrt{(\xi - a)(\xi - b)} + \vec{\mu}, \alpha, \varepsilon]\, \varphi_a(\xi)\} \frac{d\xi}{\xi - k_0' - \rho e^{i\theta_0}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{(k_0' + \rho e^{i\theta_0} - a)(k_0' + \rho e^{i\theta_0} - b)}}{4\pi i \varphi(k_0' + \rho e^{i\theta_0})} \int_{-\infty}^{\infty} \{\widetilde{F}_r[\xi, \vec{\lambda}\sqrt{(\xi - a)(\xi - b)} + \vec{\mu}, \alpha, \varepsilon]\, \varphi_r(\xi) -$$

$$- \widetilde{F}_a[\xi, \vec{\lambda}\sqrt{(\xi - a)(\xi - b)} + \vec{\mu}, \alpha, \varepsilon]\, \varphi_a(\xi) -$$

$$- \widetilde{F}_r[\xi, -\vec{\lambda}\sqrt{(\xi - a)(\xi - b)} + \vec{\mu}, \alpha, \varepsilon]\, \varphi_r(\xi) +$$

$$+ \widetilde{F}_a[\xi, -\vec{\lambda}\sqrt{(\xi - a)(\xi - b)} + \vec{\mu}, \alpha, \varepsilon]\, \varphi_a(\xi)\} \frac{d\xi}{(\xi - k_0' - \rho e^{i\theta_0})\sqrt{(\xi - a)(\xi - b)}}. \quad (2.33)$$

На основании (2.24), из (2.33) получим:

$$\widetilde{F}_j(k_0' + \rho e^{i\theta_0}, \vec{k}' + \vec{\nu} + \rho e^{i\vec{\theta}}, \alpha, \varepsilon) =$$

$$= \sum_{\substack{i = r,\, a \\ \varkappa = \pm 1}} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{F}_i[\xi, \vec{g}_\varkappa(\xi, \theta) + \vec{\nu}, \alpha, \varepsilon] \frac{\psi_{i\varkappa}(\xi, \theta_0)}{\xi - k_0' - \rho e^{i\theta_0}} d\xi +$$

$$+ \sum_{\varkappa = \pm 1} \int_{a-\eta}^{b+\eta} \widetilde{f}[\xi, \vec{g}_\varkappa(\xi, \theta) + \vec{\nu}, \alpha, \varepsilon] \frac{\psi_\varkappa(\xi, \theta_0)}{\xi - k_0' - \rho e^{i\theta_0}} d\xi, \quad (2.34)$$

где, в силу (2.25) и (2.28),

$$\psi_{i\varkappa}(\xi, \theta_0) = \left[1 + \varkappa \sqrt{\frac{(k_0' + \rho e^{i\theta_0} - a)(k_0' + \rho e^{i\theta_0} - b)}{(\xi - a)(\xi - b)}}\right] \frac{\varphi_i(\xi)\, h(\xi)}{4\pi i \varphi(k_0' + \rho e^{i\theta_0})}, \quad (2.35)$$

$$\psi_\varkappa(\xi, \theta_0) = \left[1 + \varkappa \sqrt{\frac{(k_0' + \rho e^{i\theta_0} - a)(k_0' + \rho e^{i\theta_0} - b)}{(\xi - a)(\xi - b)}}\right] \frac{\varphi(\xi)[1 - h(\xi)]}{4\pi i \varphi(k_0' + \rho e^{i\theta_0})}, \quad (2.36)$$

$$\vec{g}_\varkappa(\xi, \theta) = \vec{p}' + \rho \overrightarrow{\cos\theta} +$$

$$+ (\vec{q}' + \rho \overrightarrow{\sin\theta}) \frac{\varkappa\sqrt{(\xi - a)(\xi - b)} - \operatorname{Re}\sqrt{(k_0' + \rho e^{i\theta_0} - a)(k_0' + \rho e^{i\theta_0} - b)}}{\operatorname{Im}\sqrt{(k_0' + \rho e^{i\theta_0} - a)(k_0' + \rho e^{i\theta_0} - b)}}. \quad (2.37)$$

Функция $h(\xi)$ бесконечно дифференцируема и такова, что

$$\begin{aligned} h(\xi) &= 1 \quad \text{при } \xi < a - \eta, \quad \xi > b + \eta, \\ h(\xi) &= 0 \quad \text{при } a - \frac{\eta}{2} < \xi < b + \frac{\eta}{2}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Принимая во внимание (2.34), из (2.20) при всех $k \in G(k')$ получим:

$$\widetilde{F}_j(k, \alpha, \varepsilon) = \sum_{\substack{i = r, a \\ \varkappa = \pm 1}} \int \widetilde{F}_i[\xi, \vec{g}_\varkappa(\xi, \theta_0) + \vec{\nu}, \alpha, \varepsilon] \frac{\psi_{i\varkappa}(\xi, \theta_0) w(k, \vec{\nu}, \theta)}{\xi - p_0' - \rho e^{i\theta_0}} d\theta \, d\xi \, d\vec{\nu} +$$

$$+ \sum_{\varkappa = \pm 1} \int_{0 \leqslant \theta_s \leqslant 2\pi} \int_{|\nu_s| \leqslant \frac{\rho}{3}} \int_{a - \eta}^{b + \eta} \widetilde{f}[\xi, \vec{g}_\varkappa(\xi, \theta) + \vec{\nu}, \alpha, \varepsilon] \times$$

$$\times \frac{\psi_\varkappa(\xi, \theta_0) w(k, \vec{\nu}, \theta)}{\xi - p_0' - \rho e^{i\theta_0}} d\xi \, d\vec{\nu} \, d\theta + T_j(k, \alpha, \varepsilon). \quad (2.39)$$

Отметим, что, в силу (2.19), (2.35) и (2.37), функции

$$\widetilde{H}_{i\varkappa}(k, p'') = \int_{0 \leqslant \theta_s \leqslant 2\pi} \frac{\psi_{i\varkappa}(p_0'', \theta_0) w[k, \vec{p}'' - \vec{g}_\varkappa(p_0'', \theta), \theta]}{p_0'' - k_0' - \rho e^{i\theta_0}} d\theta$$

$$(i = r, a, \quad \varkappa = \pm 1) \quad (2.40)$$

при каждом p'' являются аналитическими относительно k в области $G(k')$ и при каждом k из $G(k')$ принадлежат пространству Φ_N, если только число N_1, фигурирующее в (2.29), выбрано достаточно большим.

Действительно, знаменатель в (2.40) может обратиться в нуль только при

$$p_0'' = p_0' + \rho \cos\theta_0, \quad q_0' + \rho \sin\theta_0 = 0. \quad (2.41)$$

Так как $k' = (p_0' + iq_0', \vec{k}') \in K$, то из (2.41) следует, что при достаточно малом ρ точки

$$(p_0' + \rho\cos\theta_0, \vec{k}' + \vec{\nu} + \rho e^{i\vec{\theta}}) \in K_1^*.$$

Но тогда из (2.10) и (2.41) следует, что точки p_0'', в которых знаменатель в (2.40) может обратиться в нуль, заключены в интервале $[a + \eta, b - \eta]$, а этот интервал фактически исключается множителем $h(p_0'')$ [см. (2.38)], входящим в выражения $\psi_{i\varkappa}(p_0'', \theta_0)$; функции $\vec{g}_\varkappa(p_0'', \theta)$ при этом будут вещественными.

Принимая во внимание сказанное, имеем при $\varepsilon \to +0$:

$$\int \widetilde{F}_j [\xi, \vec{g}_\varkappa (\xi, \theta) + \vec{\nu}, \alpha, \varepsilon] \psi_{j\varkappa} (\xi, \theta_0) \frac{w(k, \vec{\nu}, \theta)}{\xi - k'_0 - \rho e^{i\theta_0}} d\xi \, d\vec{\nu} \, d\theta =$$

$$= \int \widetilde{F}_j (p'', \alpha, \varepsilon) \widetilde{H}_{j\varkappa} (k, p'') \, dp'' \to \int \widetilde{F}_j (p'') \widetilde{H}_{j\varkappa} (k, p'') \, dp'' \qquad (2.42)$$

равномерно для всех $k \in G(k')$.

Далее, в силу (2.36) и (2.37), при всех $\vec{\nu}$, $|\nu_s| \leqslant \frac{\rho}{3}$ и θ, $0 \leqslant \theta_s \leqslant 2\pi$, получим неравенство:

$$\left| \int\limits_{a-\eta}^{b+\eta} \widetilde{f} [\xi, \vec{g}_\varkappa (\xi, \theta) + \vec{\nu}, \alpha, \varepsilon] \frac{\psi_\varkappa (\xi, \theta_0)}{\xi - k'_0 - \rho e^{i\theta_0}} d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \sup_{a-\eta \leqslant \xi \leqslant b+\eta} |\widetilde{f} [\xi, \vec{g}_\varkappa (\xi, \theta) + \vec{\nu}, \alpha, \varepsilon]| +$$

$$+ c_2 \sup_{a+\eta \leqslant \xi \leqslant b-\eta} \left| \frac{d\widetilde{f}}{d\xi} [\xi, \vec{g}_\varkappa (\xi, \theta) + \vec{\nu}, \alpha, \varepsilon] \right|.$$

Вспоминая, что точки (2.16) принадлежат K_1, заключаем отсюда и из (2.37), (2.11) и (2.12), что при $\varepsilon \to +0$

$$\left| \int \int\limits_{a-\eta}^{b+\eta} \widetilde{f} [\xi, \vec{g}_\varkappa (\xi, \theta) + \vec{\nu}, \alpha, \varepsilon] \frac{\psi_\varkappa (\xi, \theta_0) \, w(k, \vec{\nu}, \theta)}{\xi - k'_0 - \rho e^{i\theta_0}} d\xi \, d\vec{\nu} \, d\theta \right| \to 0 \qquad (2.43)$$

равномерно для всех k из $G(k')$.

Из (2.21) и (2.22) следует:

$$T_r (k, \alpha, \varepsilon) = 0 \text{ при } q'_0 \geqslant \rho, \quad T_a (k, \alpha, \varepsilon) = 0 \text{ при } q'_0 \leqslant -\rho. \qquad (2.44)$$

Пусть теперь

$$k' \in K \cap \{|q'_0| \leqslant \rho\}.$$

Тогда при достаточно малом ρ, $\rho < \frac{\delta}{3}$, точки (2.16) будут содержаться в $\overset{\bullet}{K_1} \times \{|q_0| \leqslant \delta\}$. Но тогда, в силу (2.13), (2.19), (2.21) и (2.22), при $\varepsilon \to +0$ имеем:

$$|T_j (k, \alpha, \varepsilon)| \to 0 \qquad (2.45)$$

равномерно для всех $k \in G(k')$.

Принимая во внимание (2.42) — (2.45), из (2.39) при $\varepsilon \to +0$ получим:

$$\widetilde{F}_r (k, \alpha, \varepsilon) \to \sum_{j=r, a} \int \widetilde{F}_j (p'') \widetilde{H}_j (k, p'') \, dp'' \equiv \widetilde{\Phi}_r (k) \qquad (2.46)$$

равномерно для всех $k \in G(k')$, где $k' \in K \times \{q'_0 \geqslant -\rho\}$;

$$\widetilde{F}_a (k, \alpha, \varepsilon) \to \sum_{j=r, a} \int \widetilde{F}_j (p'') \widetilde{H}_j (k, p'') \, dp'' \equiv \widetilde{\Phi}_a (k) \qquad (2.47)$$

равномерно для всех $k \in G(k')$, где $k' \in K \cap \{q'_0 \leqslant \rho\}$.

В формулах (2.46) и (2.47) введено обозначение:

$$\widetilde{H}_j (k, p'') = \widetilde{H}_{j+} (k, p'') + \widetilde{H}_{j-} (k, p''). \qquad (2.48)$$

Покрывая компакт K конечным числом окрестностей $G(k')$, мы видим из (2.46) и (2.47), что последовательность аналитических по k функций $F_j(k, \alpha, \varepsilon)$ равномерно сходится к аналитической (теорема Вейерштрасса) функции $\widetilde{\Phi}_j(k)$ соответственно при $j=r$ на компакте $K \cap \{q'_0 \geqslant -\rho\}$ и при $j=a$ на компакте $K \cap \{q'_0 \leqslant \rho\}$. Так как упомянутые компакты имеют непустое пересечение и компакт K — произвольный в $G(a, b)$, то отсюда заключаем о существовании единой аналитической в $G(a, b)$ функции $\widetilde{\Phi}(k)$ такой, что

$$\widetilde{\Phi}(k) = \widetilde{\Phi}_r(k) \text{ при } q_0 \geqslant 0,$$
$$\widetilde{\Phi}(k) = \widetilde{\Phi}_a(k) \text{ при } q_0 \leqslant 0. \tag{2.49}$$

Докажем равенства (2.4). Пусть точки $p = (p_0, \vec{p})$ принадлежат $K \cap \{q_0 = 0, \vec{q} = \vec{0}\}$. Тогда из (2.7) следует, что

$$K \cap \{q_0 = 0, \vec{q} = \vec{0}\} \subset G^0 \cap G(a, b).$$

Следовательно, по условию теоремы, при этих p, когда $\varepsilon \to +0$, имеем:

$$\widetilde{F}_j(p, \alpha, \varepsilon) \to \widetilde{F}_r(p) = \widetilde{F}_a(p), \tag{2.50}$$

причем стремление к пределу имеет место в слабом смысле. Принимая во внимание (2.46), (2.47) и (2.49), получаем из (2.50):

$$\widetilde{\Phi}(p) = \widetilde{\Phi}_r(p) = \widetilde{\Phi}_a(p) = \widetilde{F}_r(p) = \widetilde{F}_a(p)$$

при всех p из $K \cap \{q_0 = 0, \vec{q} = \vec{0}\}$. Так как компакт K произвольный, то из (2.7) следует, что равенства (2.4) имеют место для всех p из

$$G(a, b) \cap \{q_0 = 0, \vec{q} = \vec{0}\}. \tag{2.51}$$

Поскольку область G есть сумма областей $G(a, b)$, теорема справедлива и для всей области G. При этом, в силу (2.7) и (2.51), равенства (2.4) имеют место при p из

$$\bigcup_{a<b} G(a, b) \cap \{q_0 = 0, \vec{q} = \vec{0}\} = G \cap \{q_0 = 0, \vec{q} = \vec{0}\} = G^0.$$

Представление (2.5) в окрестности $G(k')$ следует из соотношений (2.46), (2.47) и (2.49). Теорема доказана полностью.

Замечание I. Область аналитичности функции $\widetilde{\Phi}(k)$ можно расширить, прибавляя к области G еще область

$$|\vec{q}| < |q_0|. \tag{2.52}$$

Действительно, очевидно, что функции

$$\widetilde{F}_j(k) = \int F_j(x) e^{ikx} dx, \quad j = r, a,$$

являются аналитическими соответственно в областях: $q_0 > |\vec{q}|$ при $j=r$ и $q_0 < -|\vec{q}|$ при $j=a$ *. Поэтому область аналитичности функции $\widetilde{\Phi}(k)$

* Этот и более общие результаты содержатся в работах ([12]) и ([13]), где устанавливается связь между замкнутой выпуклой оболочкой носителя обобщенной функции $F(x)$ и ростом ее преобразования Лапласа $\widetilde{F}(ip)$. Для функций из L_2 по этому поводу см. также ([11]), гл. VI, § 9.

есть

$$G:\{|\vec{q}|<q_0\}.$$

Замечание II. Из доказательства теоремы I следует общий алгоритм для вычисления области аналитичности в случае произвольной области G^0. Пусть даны две обобщенные функции $F_r(x)$ и $F_a(x)$, обращающиеся в нуль соответственно в областях $x \leqslant 0$ и $x \geqslant 0$, и пусть $\widetilde{F}_r(p)-\widetilde{F}_a(p)=0$ в области G^0.

Для области G^0 вычисляем область G^* аналогично тому, как это делалось при доказательстве леммы I. Пусть область G^* определяется совокупностью уравнений $\varphi_i(p_0, \vec{p}, \vec{q})>0$, где φ_i непрерывные функции своих аргументов. Тогда соответствующая область аналитичности будет суммой областей $G(a, b)$, где

$$G(a, b):\left\{\begin{array}{c}|\vec{q}|<\left|\operatorname{Im}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}\right|, \\ \varphi_i\left(\xi, \vec{p}-\vec{q}\,\frac{\operatorname{Re}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}}{\operatorname{Im}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}},\ \vec{q}\,\frac{\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}}{\operatorname{Im}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}}\right)>0, \quad a \leqslant \xi \leqslant b.\end{array}\right\}$$

Замечание III. Пользуясь предыдущим замечанием, нетрудно получить следующий результат [см. ([2]), Математическое дополнение]. Пусть функции $F_j(x)$ удовлетворяют условиям замечания II и область G^0 есть шар радиуса η с центром в точке $p=0$. Тогда существует функция $\widetilde{\Phi}(k)$, аналитическая в области $|k_s|<\rho$, $s=0, 1, 2, 3$ (ρ — некоторое число, меньшее η) и такая, что

$$\widetilde{\Phi}(p)=\widetilde{F}_j(p), \quad |p_s|<\rho.$$

Функция $\widetilde{\Phi}(k)$ представима в виде

$$\widetilde{\Phi}(k)=\sum_{j=r, a} \int \widetilde{F}_j(p') \widetilde{H}_j(k, p')\, dp',$$

где $\widetilde{H}(k, p')$ — аналитическая функция k в области $|k_s|<\rho$.

Замечание IV. Из предыдущего замечания получаем такой результат: если функции $F_j(x)$ удовлетворяют условиям замечания II, то для любого компактного множества K^0, лежащего в G^0, существует функция $\widetilde{\Phi}(k)$, аналитическая в области $K^0 \times \left\{|q_0| \leqslant \delta, \ |\vec{q}| \leqslant \delta\right\}$, где δ — некоторое положительное число, зависящее от K^0, и такая, что

$$\widetilde{\Phi}(p)=\widetilde{F}_j(p), \quad p \in K^0.$$

Замечание V. Из теоремы I, в частности, при $\gamma_1=\gamma_2=0$ получается следующий результат [см. ([2]), Математическое дополнение]. Пусть обобщенные функции $F_j(x)$, $j=r, a$, обладают следующими свойствами:

$$F_r(x)=0, \text{ если } x \leqslant 0, \quad F_a(x)=0, \text{ если } x \geqslant 0;$$

$$\widetilde{F}_r(p)-\widetilde{F}_a(p)=0, \text{ если } a<p_0<b.$$

Тогда существует функция $\widetilde{\Phi}(k)$, аналитическая в области

$$|\operatorname{Im}\vec{k}| < |\operatorname{Im}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}|$$

и такая, что при всех $p=(p_0, \vec{p})$, для которых $a<p_0<b$, имеют место равенства:

$$\widetilde{\Phi}(p)=\widetilde{F}_r(p)=\widetilde{F}_a(p).$$

Замечание VI. Пусть выполнены условия теоремы I. Фиксируем вещественное p_3 и воспользуемся замечанием V. Тогда можно утверждать, что соответствующая функция $\widetilde{\Phi}(k_0, k_1, k_2, p_3)$ аналитична относительно (k_0, k_1, k_2) в области

$$|\operatorname{Im} k_1|^2+|\operatorname{Im} k_2|^2<|\operatorname{Im}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}|^2,$$

где

$$a=c_1-\sqrt{\gamma_1^2 p_3^2+c_2^2}, \qquad b=c_3+\sqrt{\gamma_2^2 p_3^2+c_4^2}.$$

Замечание VII. Можно доказать следующее утверждение. Пусть обобщенные функции $F_j(x)$ удовлетворяют условиям теоремы I и, сверх того, обладают инвариантностью по отношению к группе пространственных вращений. Тогда область аналитичности функции $\widetilde{\Phi}(k)$ есть

$$|\operatorname{Im}\vec{k}|<|\operatorname{Im}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}|,$$

где

$$a=c_1-\sqrt{\gamma_1^2 T^2+c_2^2}, \qquad b=c_3+\sqrt{\gamma_2^2 T^2+c_4^2},$$

$$T^2=(\operatorname{Re}\vec{k})^2-\frac{(\operatorname{Re}\vec{k}\ \operatorname{Im}\vec{k})^2}{(\operatorname{Im}\vec{k})^2} \quad \text{при } \operatorname{Im}\vec{k}\neq\vec{0},$$

$$T^2=(\operatorname{Re}\vec{k})^2 \qquad \text{при } \operatorname{Im}\vec{k}=\vec{0}.$$

Для доказательства необходимо зафиксировать $T^2=p_3^2$, применить замечания IV и VI и учесть групповое свойство функций, которые зависят от $\vec{p}$ только посредством $\vec{p}^2$.

§ 3

Применим теорему I к доказательству следующей теоремы.

ТЕОРЕМА II. *Пусть даны четыре обобщенные функции:*

$$F_{ij}(x_1, x_2, t), \quad x_1=(x_{10}, \vec{x}_1), \quad x_2=(x_{20}, \vec{x}_2), \quad i, j=r, a,$$

инвариантные по отношению к пространственным вращениям и отражениям и удовлетворяющие, кроме того, условиям:

$$\left.\begin{aligned} F_{rr}(x_1, x_2, t)&=0, \quad \text{если } x_1\leqslant 0, \quad \text{или } x_2\leqslant 0,\\ F_{ra}(x_1, x_2, t)&=0, \quad \text{если } x_1\leqslant 0, \quad \text{или } x_2\geqslant 0,\\ F_{ar}(x_1, x_2, t)&=0, \quad \text{если } x_1\geqslant 0, \quad \text{или } x_2\leqslant 0,\\ F_{aa}(x_1, x_2, t)&=0, \quad \text{если } x_1\geqslant 0, \quad \text{или } x_2\geqslant 0,\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{F}_{rj}(p_1, p_2, t)-\widetilde{F}_{aj}(p_1, p_2, t)&=0, \quad \text{если } p_1\in G_t^0, \quad j=r, a,\\ F_{ir}(p_1, p_2, t)-\widetilde{F}_{ia}(p_1, p_2, t)&=0, \quad \text{если } p_2\in G_t^0, \quad i=r, a,\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

$$\widetilde{F}_{ij}(p_1, p_2, t) = 0, \quad \textit{если}\ t < \frac{1}{2}(M+\mu), \tag{3.3}$$

где область G_t^0 *есть множество точек* $p = (p_0, \vec{p})$, *удовлетворяющих неравенствам:*

$$G_t^0: \left\{(p_0+t)^2 < \vec{p}^2 + (M+\mu)^2, \quad (p_0-t)^2 < \vec{p}^2 + 9\mu^2\right\}, \tag{3.4}$$

и M *и* μ — *некоторые положительные числа, причем*

$$M > 2\mu. \tag{3.5}$$

Тогда при каждом $V \leqslant \mu^2$ существует число $\rho > 0$ и функция $\widetilde{\Phi}(z_1, z_2, \ldots, z_5, t)$, которая является обобщенной относительно t и аналитической относительно $z = (z_1, z_2, \ldots, z_5)$ в области Z_0,

$$Z_0: \begin{cases} |z_1 - M^2| \leqslant \rho\mu^2, \ |z_2 - M^2| \leqslant \rho\mu^2, \ |z_3 - \tau| \leqslant \rho\mu^2, \ |z_4 - \tau| \leqslant \rho\mu^2, \\ |z_5 + \alpha^2| \leqslant \rho^2\mu^2\left(\frac{M}{t}\right)^2, \quad V \leqslant \tau \leqslant \mu^2, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\sqrt{2}\mu, \end{cases}$$

причем в области вещественных p_1 и p_2, для которых точки $z = (z_1, z_2, \ldots, z_5)$, где

$$z_1 = (p_{10}+t)^2 - \vec{p}_1^2, \quad z_2 = (p_{20}+t)^2 - \vec{p}_2^2, \quad z_3 = (p_{10}-t)^2 - \vec{p}_1^2,$$

$$z_4 = (p_{20}-t)^2 - \vec{p}_2^2, \quad z_5 = (p_{10}-p_{20})^2 - (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2,$$

лежат в области Z_0, имеют место равенства:

$$\widetilde{\Phi}(z, t) = \widetilde{F}_{ij}(p_1, p_2, t), \quad i, j = r, a. \tag{3.6}$$

Кроме того,

$$\widetilde{\Phi}(z, t) = 0 \ \text{при}\ t < \frac{1}{2}(M+\mu). \tag{3.7}$$

Доказательство. Докажем теорему в предположении, что обобщенные функции F_{ij} непрерывны и полиномиально ограничены относительно t. Рассматривая обобщенные функции $F_{ij}(x_1, x_2, t)$ как обобщенные относительно (x_1, x_2) функции, зависящие от параметра t, мы видим, что порядки этих обобщенных функций ограничены числом, не зависящим от t.

Пусть $\varphi(x_2)$ — произвольная основная функция. Тогда обобщенные относительно x_1 функции

$$F_{ij}(x_1, t) = \int F_{ij}(x_1, x_2, t)\,\varphi(x_2)\,dx_2, \quad i, j = r, a, \tag{3.8}$$

обладают, в силу (3.1) — (3.3), свойствами:

$$F_{rj}(x_1, t) = 0, \ \text{если}\ x_1 \leqslant 0, \quad F_{aj}(x_1, t) = 0, \ \text{если}\ x_1 \geqslant 0;$$

$$\widetilde{F}_{rj}(p_1, t) - \widetilde{F}_{aj}(p_1, t) = 0, \ \text{если}\ p_1 \in G_t^0,$$

$$\widetilde{F}_{ij}(p_1, t) = 0, \ \text{если}\ t < \frac{1}{2}(M+\mu).$$

Кроме того, порядки обобщенных функций $\widetilde{F}_{ij}(p_1, t)$ ограничены числом, не зависящим от t и $\varphi(x_2)$. Условия теоремы I выполнены. Следовательно, существуют функции $\widetilde{\Phi}_j(k_1, t)$, аналитические относительно k_1 в области G_t и такие, что

$$\widetilde{\Phi}_j(p_1, t) = \widetilde{F}_{ij}(p_1, t), \text{ если } p_1 \in G_t^0, \tag{3.9}$$

$$\widetilde{\Phi}_j(k_1, t) = 0, \text{ если } t < \frac{1}{2}(M+\mu). \tag{3.10}$$

В окрестности каждой точки области G_t функции $\widetilde{\Phi}_j(k_1, t)$ представимы в виде

$$\widetilde{\Phi}_j(k_1, t) = \sum_{i=r,\, a} \int \widetilde{F}_{ij}(p_1', t)\, \widetilde{H}_i(k_1, p_1')\, dp_1', \tag{3.11}$$

где функции $\widetilde{H}_i(k_1, p_1')$ не зависят от $\varphi(x_2)$ и t и обладают свойствами, сформулированными в теореме I.

Докажем, что функции $\widetilde{H}_i(k_1, p_1')$ в (3.11) действительно могут быть выбраны не зависящими от t. Пусть окрестность $G(k')$ точки k' принадлежит области G_{t_1}, $t_1 > \frac{1}{2}(M+\mu)$, и в этой окрестности имеет место представление

$$\widetilde{\Phi}_j(k_1, t_1) = \sum_{i=r,\, a} \int \widetilde{F}_{ij}(p_1', t_1)\, \widetilde{H}_i(k_1, p_1', t_1)\, dp_1'.$$

Рассмотрим t из промежутка $\left[\frac{1}{2}(M+\mu),\ t_1\right]$. Так как при $t \geqslant \frac{1}{2}(M+\mu)$ области G_t^0 и G_t монотонно убывают с возрастанием t, то

$$G(k') \subset G_t, \quad \frac{1}{2}(M+\mu) \leqslant t \leqslant t_1.$$

В силу того, что порядки обобщенных функций $\widetilde{F}_{ij}(p_1, t)$ ограничены числом, не зависящим от t, а функции $\widetilde{H}_i$ — «универсальные», то, полагая $\widetilde{H}_i(k_1, p_1', t) = \widetilde{H}_i(k_1, p_1', t_1)$, $\frac{1}{2}(M+\mu) \leqslant t \leqslant t_1$, мы видим, что функции

$$\widetilde{\Phi}_j(k_1, t) = \sum_{i=r,a} \int \widetilde{F}_{ij}(p_1', t)\, \widetilde{H}_i(k_1, p_1', t_1)\, dp_1', \quad t \leqslant t_1$$

удовлетворяют требуемым условиям в окрестности $G(k')$ и функции $\widetilde{H}_i$ не зависят от t при $t \leqslant t_1$.

Согласно теореме I, в нашем случае область G_t представляет собой соединение областей $G_t(a, b)$, $G_t = \bigcup_{a<b} G_t(a, b)$, где $G_t(a, b)$ есть множество комплексных точек $k = (k_0, \vec{k}) = (p_0 + iq_0, \vec{p} + i\vec{q})$, удовлетворяющих неравенству

$$|\vec{q}| < \left|\operatorname{Im} \sqrt{(k_0 - a)(k_0 - b)}\right|, \tag{3.12}$$

а также обладающих тем свойством, что при всех ξ, $a \leqslant \xi \leqslant b$, выполнены неравенства:

$$(\xi + t)^2 < e\left\{\left|\vec{p} - \vec{q}\,\frac{\operatorname{Re}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}}{\operatorname{Im}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}}\right| - \frac{\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}}{|\operatorname{Im}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}|}\,|\vec{q}\,|\right\} + (M+\mu)^2,$$

$$(\xi - t)^2 < e\left\{\left|\vec{p} - \vec{q}\,\frac{\operatorname{Re}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}}{\operatorname{Im}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}}\right| - \frac{\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}}{|\operatorname{Im}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}|}\,|\vec{q}\,|\right\} + 9\mu^2. \tag{3.13}$$

Из (3.8) — (3.11) следует, что существуют функции $\widetilde{\Phi}_j(k_1, x_2, t)$, аналитические относительно k_1 в G_t и обобщенные относительно x_2, такие, что

$$\widetilde{\Phi}_j(p_1, x_2, t) = \widetilde{F}_{ij}(p_1, x_2, t), \text{ если } p_1 \in G_t^0, \tag{3.14}$$

$$\widetilde{\Phi}_j(k_1, x_2, t) = 0, \text{ если } t < \frac{1}{2}(M+\mu), \tag{3.15}$$

$$\widetilde{\Phi}_j(k_1, x_2, t) = \sum_{i=r,\,a} \int \widetilde{F}_{ij}(p_1', x_2, t)\, \widetilde{H}_i(k_1, p_1')\, dp_1'. \tag{3.16}$$

Кроме того, из (3.1), (3.2), (3.15) и (3.16) при всех $k_1 \in G_t$ имеем:

$$\widetilde{\Phi}_r(k_1, x_2, t) = 0, \text{ если } x_2 \leqslant 0, \quad \widetilde{\Phi}_a(k_1, x_2, t) = 0, \text{ если } x_2 \geqslant 0,$$

$$\widetilde{\Phi}_r(k_1, p_2, t) - \widetilde{\Phi}_a(k_1, p_2, t) = 0, \text{ если } p_2 \in G_t^0,$$

$$\widetilde{\Phi}_j(k_1, p_2, t) = 0, \text{ если } t < \frac{1}{2}(M+\mu),$$

причем порядки обобщенных функций $\widetilde{\Phi}_j(k_1, p_2, t)$ ограничены числом, не зависящим от k_1 и t.

Таким образом, условия теоремы I выполнены. Значит, существует функция $\widetilde{\Phi}(k_1, k_2, t)$, аналитическая относительно k_2 в области G_t при каждом k_1 из G_t, такая, что

$$\widetilde{\Phi}(k_1, p_2, t) = \widetilde{\Phi}_j(k_1, p_2, t), \text{ если } p_2 \in G_t^0, \tag{3.17}$$

$$\widetilde{\Phi}(k_1, k_2, t) = 0 \text{ при } t < \frac{1}{2}(M+\mu), \tag{3.18}$$

$$\widetilde{\Phi}(k_1, k_2, t) = \sum_{j=r,\,a} \int \widetilde{\Phi}_j(k_1, p_2', t)\, \widetilde{H}_j(k_2, p_2')\, dp_2'. \tag{3.19}$$

Равенства (3.14) — (3.19) показывают, что при каждом t существует функция $\widetilde{\Phi}(k_1, k_2, t)$, аналитическая относительно (k_1, k_2) в области $G_t \times G_t$ и такая, что

$$\widetilde{\Phi}(p_1, p_2, t) = \widetilde{F}_{ij}(p_1, p_2, t), \text{ если } (p_1, p_2) \in G_t^0 \times G_t^0, \tag{3.20}$$

причем в окрестности любой точки области $G_t \times G_t$ имеет место интегральное представление:

$$\widetilde{\Phi}(k_1, k_2, t) = \sum_{i,\, j=r,\,a} \int \widetilde{F}_{ij}(p_1', p_2', t)\, \widetilde{H}_i(k_1, p_1')\, \widetilde{H}_j(k_2, p_2')\, dp_1' dp_2'. \tag{3.21}$$

Воспользуемся условием инвариантности по отношению к пространственным вращениям и отражениям. Ввиду этого условия, функции

$$F_{ij}(x_1, x_2, t), \quad \widetilde{F}_{ij}(p_1, p_2, t)$$

также обладают свойством инвариантности относительно пространственных вращений и отражений. Следовательно, функция $\widetilde{\Phi}(k_1, k_2, t)$ зависит от (k_1, k_2) лишь посредством пяти переменных:

$$k_{10}, \; k_{20}, \quad \vec{k}_1^2, \quad \vec{k}_2^2, \quad \vec{k}_1 \vec{k}_2.$$

Вместо них мы можем ввести эквивалентную систему переменных $z = (z_1, z_2, \ldots, z_5)$, положив

$$z_1 = (k_{10} + t)^2 - \vec{k}_1^2, \quad z_2 = (k_{20} + t)^2 - \vec{k}_2^2, \quad z_3 = (k_{10} - t)^2 - \vec{k}_1^2,$$
$$z_4 = (k_{20} - t)^2 - \vec{k}_2^2, \quad z_5 = (k_{10} - k_{20})^2 - (\vec{k}_1 - \vec{k}_2)^2, \tag{3.22}$$

так что

$$\widetilde{\Phi}(k_1, k_2, t) = \widetilde{\Phi}(k_{10}, k_{20}, \vec{k}_1^2, \vec{k}_2^2, \vec{k}_1 \vec{k}_2, t) = \widetilde{\Phi}(z, t). \tag{3.23}$$

Из (3.22) получаем:

$$\left.\begin{aligned} & k_{10} = \frac{z_1 - z_3}{4t}, \qquad k_{20} = \frac{z_2 - z_4}{4t}, \\ & \vec{k}_1^2 = t^2 - \frac{z_1 + z_3}{2} + \left(\frac{z_1 - z_3}{4t}\right)^2, \quad \vec{k}_2^2 = t^2 - \frac{z_2 + z_4}{2} + \left(\frac{z_2 - z_4}{4t}\right)^2, \\ & (\vec{k}_1 - \vec{k}_2)^2 = -z_5 + \left(\frac{z_1 - z_2 - z_3 + z_4}{4t}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

Пусть $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ — два произвольных взаимно перпендикулярных единичных вектора. Тогда векторы $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$ могут быть представлены в виде

$$\vec{k}_1 = A(z, t)\vec{e}_1 + C(z, t)\vec{e}_2, \quad \vec{k}_2 = B(z, t)\vec{e}_1 - C(z, t)\vec{e}_2, \tag{3.25}$$

где, в силу (3.24), функции A, B и C удовлетворяют соотношениям:

$$A^2 + C^2 = t^2 - \frac{z_1 + z_3}{2} + \left(\frac{z_1 - z_3}{4t}\right)^2,$$
$$B^2 + C^2 = t^2 - \frac{z_2 + z_4}{2} + \left(\frac{z_2 - z_4}{4t}\right)^2,$$
$$(A - B)^2 + 4C^2 = -z_5 + \left(\frac{z_1 - z_2 - z_3 + z_4}{4t}\right)^2.$$

Это дает:

$$\left.\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\sqrt{4t^2 - z_1 - z_2 - z_3 - z_4 + z_5 + 2\left(\frac{z_1 - z_3}{4t}\right)^2 + 2\left(\frac{z_2 - z_4}{4t}\right)^2 - \left(\frac{z_1 - z_2 - z_3 + z_4}{4t}\right)^2} \pm$$
$$\pm \frac{1}{2} \frac{\frac{z_2 + z_4 - z_1 - z_3}{2} + \left(\frac{z_1 - z_3}{4t}\right)^2 - \left(\frac{z_2 - z_4}{4t}\right)^2}{\sqrt{4t^2 - z_1 - z_2 - z_3 - z_4 + z_5 + 2\left(\frac{z_1 - z_3}{4t}\right)^2 + 2\left(\frac{z_2 - z_4}{4t}\right)^2 - \left(\frac{z_1 - z_2 - z_3 + z_4}{4t}\right)^2}}, \tag{3.26}$$

$$C^2 = \frac{1}{4}\left\{-z_5 + \left(\frac{z_1 - z_2 - z_3 + z_4}{4t}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{\left[\frac{z_2 + z_4 - z_1 - z_3}{2} + \left(\frac{z_1 - z_3}{4t}\right)^2 - \left(\frac{z_2 - z_4}{4t}\right)^2\right]^2}{4t^2 - z_1 - z_2 - z_3 - z_4 + z_5 + 2\left(\frac{z_1 - z_3}{4t}\right)^2 + 2\left(\frac{z_2 - z_4}{4t}\right)^2 - \left(\frac{z_1 - z_2 - z_3 + z_4}{4t}\right)^2}\right\}.$$

Обозначая $z^0 = (M^2, M^2, \tau, \tau, -\alpha^2)$, получаем из (3.26):

$$A(z^0, t) = B(z^0, t) = \varphi(t, \tau, \alpha) = \sqrt{\left(t + \frac{M^2 - \tau}{4t}\right)^2 - M^2 - \frac{\alpha^2}{4}},$$
$$C(z^0, t) = \frac{\alpha}{2}. \tag{3.27}$$

Докажем следующее предложение: при достаточно малом ρ преобразование (3.24) — (3.25) преобразует область Z_0 в область $G_t \times G_t$ при $t \geqslant \frac{1}{2}(M+\mu)$.

Рассмотрим сначала случай, когда t, τ и α таковы, что

$$\varphi^2(t,\ \tau,\ \alpha) = \left(t + \frac{M^2-\tau}{4t}\right)^2 - M^2 - \frac{\alpha^2}{4} \geqslant \delta, \tag{3.28}$$

где δ — фиксированное положительное число. Из (3.26) и (3.27) следует при условии (3.28), что при всех z из области Z_0 выполнены неравенства:

$$\begin{gathered} |A(z,\ t) - A(z^0,\ t)| \leqslant \frac{C}{t}\rho, \quad |B(z,\ t) - B(z^0,\ t)| \leqslant \frac{C}{t}\rho, \\ |C(z,\ t) - C(z^0,\ t)| = \left|\sqrt{C^2(z,\ t)} - \sqrt{C^2(z^0,\ t)}\right| \leqslant \frac{C}{t}\rho. \end{gathered} \tag{3.29}$$

В силу (3.24), (3.25), (3.27) и (3.29), достаточно доказать, что область переменных k_1 и k_2, для которых

$$\left|k_{10} - \frac{M^2-\tau}{4t}\right| \leqslant \frac{c_1}{t}\rho, \quad \left|k_{20} - \frac{M^2-\tau}{4t}\right| \leqslant \frac{c_1}{t}\rho,$$

$$\left|\vec{k}_1 - \varphi(t,\ \tau,\ \alpha)\vec{e}_1 - \frac{\alpha}{2}\vec{e}_2\right| \leqslant \frac{c_1}{t}\rho, \quad \left|\vec{k}_2 - \varphi(t,\ \tau,\ \alpha)\vec{e}_1 + \frac{\alpha}{2}\vec{e}_2\right| \leqslant \frac{c_1}{t}\rho,$$

содержится в $G_t \times G_t$. Наше утверждение будет доказано, если мы покажем, что точки

$$\left[\frac{M^2-\tau}{4t} + k_0',\ \varphi(t,\ \tau,\ \alpha)\vec{e}_1 \pm \frac{\alpha}{2}\vec{e}_2 + \vec{k}'\right],$$

где $k' = (k_0',\ \vec{k}')$ — комплексный вектор такой, что $|k_0'| \leqslant \frac{\rho_1}{t}$, $|\vec{k}'| \leqslant \frac{\rho_1}{t}$ (ρ_1 — достаточно малое положительное число, не зависящее от τ, α и t), содержатся в области

$$G_t(a,\ b), \quad a = \frac{M^2-\tau}{4t} - \frac{2\rho_1}{t}, \quad b = \frac{M^2-\tau}{4t} + \frac{2\rho_1}{t}. \tag{3.30}$$

Обратимся к неравенствам (3.12) и (3.13), определяющим область $G_t(a,\ b)$. Замечая, что в нашем случае

$$k_0 = \frac{M^2-\tau}{4t} + k_0',\ \ \vec{p}^2 = \varphi^2(t,\ \tau,\ \alpha) + \frac{\alpha^2}{4} + O(\rho_1) = \left(t + \frac{M^2-\tau}{4t}\right)^2 - M^2 + O(\rho_1),$$

$$|\vec{q}| = |\operatorname{Im}\vec{k}'| \leqslant \frac{\rho_1}{t} < \sqrt{3}\,\frac{\rho_1}{t} \leqslant \left|\operatorname{Re}\sqrt{\frac{4\rho_1^2}{t^2} - k_0'^2}\right| = \left|\operatorname{Im}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}\right|,$$

$$\left(\frac{M^2-\tau}{4t} + \frac{\rho_1}{t} + t\right)^2 < (M+\mu)^2 + \left(t + \frac{M^2-\tau}{4t}\right)^2 - M^2 + O(\rho_1),$$

$$\left(\frac{M^2-\tau}{4t} - \frac{2\rho_1}{t} - t\right)^2 < 9\mu^2 + \left(t + \frac{M^2-\tau}{4t}\right)^2 - M^2 + O(\rho_1),$$

убеждаемся в справедливости неравенств (3.12) и (3.13) при достаточно малом ρ_1, причем ρ_1 может быть выбрано не зависящим от α, τ и t (ρ_1 зависит от V).

Рассмотрим теперь случай, когда

$$\varphi^2(t,\ \tau,\ \alpha) = \left(t + \frac{M^2-\tau}{4t}\right)^2 - M^2 - \frac{\alpha^2}{4} \leqslant \delta, \tag{3.31}$$

откуда

$$t \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{M^2+\frac{\alpha^2}{4}+\delta}+\frac{1}{2}\sqrt{\tau+\frac{\alpha^2}{4}+\delta}, \quad \tau \geqslant -\delta-\frac{\alpha^2}{4}.$$

В этом случае, в силу (3.25), (3.27) и равномерной непрерывности функций A, B и C на любом компактном множестве, достаточно установить, что каждая точка компакта

$$\left[\frac{M^2-\tau}{4t}, \varphi(t, \tau, \alpha)\vec{e}_1 \pm \frac{\alpha}{2}\vec{e}_2\right], \quad -\delta-\frac{\alpha^2}{4} \leqslant \tau \leqslant \mu^2, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\sqrt{2}\mu, \qquad (3.32)$$

вместе с некоторой своей окрестностью принадлежит области G_t при каждом t из промежутка

$$\frac{1}{2}(M+\mu) \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{M^2+\frac{\alpha^2}{4}+\delta}+\frac{1}{2}\sqrt{\tau+\frac{\alpha^2}{4}+\delta}. \qquad (3.33)$$

При преобразовании (3.22) компакт (3.32) перейдет в компакт

$$(M_-^2, M^2, \tau, \tau, -\alpha^2), \quad -\delta-\frac{\alpha^2}{4} \leqslant \tau \leqslant \mu^2, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\sqrt{2}\mu. \qquad (3.34)$$

Окрестность компакта (3.32) перейдет в соответствующую окрестность компакта (3.34). Покрывая, согласно лемме Бореля — Лебега, компакт (3.34) конечным числом окрестностей, выберем наименьшую из них и соответствующее число ρ, которое с учетом случая (3.28) и определит область Z_0.

Точки (3.32), для которых выполнены неравенства $0 \leqslant \varphi^2(t, \tau, \alpha) \leqslant \delta$, очевидно, принадлежат области $G_t(a, b)$, где a и b определены в (3.30).

Осталось рассмотреть тот случай, когда в (3.31) $\delta = 0$. Мы докажем, что в этом случае точки (3.32) принадлежат более узкой области, чем G_t, а именно:

$$\left\{\begin{array}{l} |\vec{q}| < \left|\operatorname{Im}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}\right|, \\ (\xi+t)^2 < (M+\mu^2), \quad (\xi-t)^2 < 9\mu^2, \quad a \leqslant \xi \leqslant b, \end{array}\right\}$$

т. е.

$$|\vec{q}| < \left|\operatorname{Im}\sqrt{(k_0+3\mu-t)(k_0-M-\mu+t)}\right|. \qquad (3.35)$$

Заметим, что область (3.35) не пуста, если t принадлежит промежутку (3.33). Действительно, тогда

$$t \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{M^2+2\mu^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mu < \frac{1}{2}(M+4\mu).$$

В силу (3.31), (3.32) и (3.35), для доказательства достаточно установить справедливость неравенства

$$M^2+\frac{\alpha^2}{4}-\left(t+\frac{M^2-\tau}{4t}\right)^2 < \left(\frac{M^2-\tau}{4t}-t+3\mu\right)\left(M+\mu-t-\frac{M^2-\tau}{4t}\right)$$

при всех t, τ и α, удовлетворяющих неравенствам:

$$\left(t+\frac{M^2-\tau}{4t}\right)^2-M^2-\frac{\alpha^2}{4} \leqslant 0, \quad t \geqslant \frac{1}{2}(M+\mu), \quad \tau \leqslant \mu^2,$$
$$0 \leqslant \alpha \leqslant 2\sqrt{2}\mu. \qquad (3.36)$$

Обозначая

$$f(t, \tau, \alpha) = \left(\frac{M^2-\tau}{4t} - t + 3\mu\right)\left(M + \mu - t - \frac{M^2-\tau}{4t}\right) - M^2 - \frac{\alpha^2}{4} +$$
$$+ \left(t + \frac{M^2-\tau}{4t}\right)^2 = \frac{M^2-\tau}{4t}(M + 2t - 2\mu) + 2t^2 + 3\mu(M+\mu) -$$
$$- t(M + 4\mu) - M^2 - \frac{\alpha^2}{4}, \tag{3.37}$$

имеем:

$$\frac{\partial f(t, \tau, \alpha)}{\partial \tau} = -\frac{M - 2\mu + 2t}{4t} < 0 \tag{3.38}$$

области (3.36). Кроме того, учитывая (3.5), имеем:

$$f\left(\frac{M+\mu}{2}, \mu^2, \alpha\right) = 2\mu^2 - \frac{\alpha^2}{4} \geqslant 0,$$

$$\frac{\partial f(t, \mu^2, \alpha)}{\partial t} = 4t - M - 4\mu - \frac{(M^2-\mu^2)(M-2\mu)}{4t^2} \geqslant (M - 2\mu)\left(1 - \frac{M-\mu}{M+\mu}\right) > 0.$$

Последние неравенства показывают, что $f(t, \mu^2, \alpha) \geqslant 0$ на границе $\tau = \mu^2$ области (3.36), причем знак равенства имеет место только в точке $t = \frac{1}{2}(M+\mu)$, $\alpha = 2\sqrt{2}\,\mu$. Учитывая (3.38), заключаем, что

$$f(t, \tau, \alpha) > 0$$

для всех точек области (3.36), кроме точки

$$t = \frac{1}{2}(M+\mu), \quad \tau = \mu^2, \quad \alpha = 2\sqrt{2}\,\mu. \tag{3.39}$$

Однако если обратиться к неравенствам (3.12) и (3.13), то мы увидим что точки (3.32), соответствующие значениям (3.39) для параметров t, τ и α, лежат вместе со своей окрестностью в области $G_{\frac{1}{2}(M+\mu)}$.

Итак, область Z_0 является областью аналитичности функции $\widetilde{\Phi}(z, t)$ и, в силу (3.18), (3.20), (3.22) и (3.23), имеют место равенства (3.6) и (3.7).

Докажем, что построенная функция $\widetilde{\Phi}(z, t)$ является обобщенной относительно t. Для этого достаточно доказать, что при всех $z \in Z_0$ функция

$$\widetilde{\Phi}\left(\frac{z_1 - z_3}{4t}, A(z, t)\vec{e}_1 + C(z, t)\vec{e}_2, \frac{z_2 - z_4}{4t}, B(z, t)\vec{e}_1 - C(z, t)\vec{e}_2, t\right) \tag{3.40}$$

является непрерывной относительно t и обобщенной при больших положительных t, $t > C$. Непрерывность по t следует из представления (3.21), а также из (3.23) и (3.24). Для доказательства того, что выражение (3.40) есть обобщенная функция t при $t > C$, достаточно доказать это утверждение для функции

$$\widetilde{\Phi}\left(\frac{M^2-\tau}{4t} + k'_{10}, \varphi(t, \tau, \alpha)\vec{e}_1 + \frac{\alpha}{2}\vec{e}_2 + \vec{k}'_1,\right.$$
$$\left.\frac{M^2-\tau}{4t} + k'_{20}, \varphi(t, \tau, \alpha)\vec{e}_1 - \frac{\alpha}{2}\vec{e}_2 + \vec{k}'_2, t\right)$$

при всех рассматриваемых τ и α и при

$$|k'_{i0}| \leqslant \frac{\rho_1}{t}, \quad |\vec{k}'_i| \leqslant \frac{\rho_1}{t}, \quad i = 1, 2.$$

Согласно определению, это значит, что необходимо доказать, что функция

$$\widetilde{\Phi}\left(\frac{M^2-\tau}{4t}+\frac{k'_{10}}{t},\ \varphi\vec{e}_1+\frac{\alpha}{2}\vec{e}_2+\frac{\vec{k}'_1}{t},\ \frac{M^2_*-\tau}{4t}+\frac{k'_{20}}{t},\ \varphi\vec{e}_1-\frac{\alpha}{2}\vec{e}_2+\frac{\vec{k}'_2}{t},t\right) \tag{3.41}$$

есть обобщенная функция t при всех $|k'_{i0}|\leqslant\rho_1$ и $|\vec{k}'_i|\leqslant\rho_1$. Но, по доказанному, функция (3.41) есть аналитическое продолжение обобщенных относительно (p'_1, p'_2) функций

$$\widetilde{F}_{ij}\left(\frac{M^2-\tau}{4t}+\frac{p'_{10}}{t},\ \varphi\vec{e}_1+\frac{\alpha}{2}\vec{e}_2+\frac{\vec{p}'_1}{t},\ \frac{M^2-\tau}{4t}+\frac{p'_{20}}{t},\ \varphi\vec{e}_1-\frac{\alpha}{2}\vec{e}_2+\frac{\vec{p}'_2}{t},t\right). \tag{3.42}$$

Принимая во внимание, что, в силу (3.27), функция $\varphi(t,\tau,\alpha)$ при $t>C$ бесконечно дифференцируема и полиномиально ограничена со всеми своими производными по t, а также принимая во внимание полиномиальную ограниченность функций $\widetilde{F}_{ij}(p_1, p_2, t)$ по t, заключаем, что функции (3.42) являются обобщенными относительно (p_1, p_2, t) при $t>C$. Следовательно, их аналитическое продолжение (3.41) является обобщенной функцией t, причем, в силу замечания III к теореме I,

$$\widetilde{\Phi}\left(\frac{M^2-\tau}{4t}+\frac{k'_{10}}{t},\ \varphi\vec{e}_1+\frac{\alpha}{2}\vec{e}_2+\frac{\vec{k}'_1}{t},\ \frac{M^2-\tau}{4t}+\frac{k'_{20}}{t},\ \varphi\vec{e}_1-\frac{\alpha}{2}\vec{e}_2+\frac{\vec{k}'_2}{t},\ t\right)=$$
$$=\sum_{i,j}\int\widetilde{F}_{ij}\left(\frac{M^2-\tau}{4t}+\frac{p'_{10}}{t},\ \varphi\vec{e}_1+\frac{\alpha}{2}\vec{e}_2+\frac{\vec{p}_1}{t},\ \frac{M^2-\tau}{4t}+\frac{p'_{20}}{t},\right.$$
$$\left.\varphi\vec{e}_1-\frac{\alpha}{2}\vec{e}_2+\frac{\vec{p}_2}{t},\ t\right)\widetilde{H}(k_1, k_2, p'_1, p'_2)\,dp'_1\,dp_2, \tag{3.43}$$

если $|k'_{i0}|\leqslant\rho_1$, $|\vec{k}'_i|\leqslant\rho_1$.

Таким образом, теорема справедлива для случая, когда функции $F_{ij}(x_1, x_2, t)$ непрерывны и полиномиально ограничены по t. Чтобы рассмотреть общий случай, возьмем последовательность бесконечно дифференцируемых функций $\delta_\varepsilon(t, t_1)$, $\varepsilon>0$, таких, что

$$\left.\begin{aligned} &\delta_\varepsilon(t,t_1)=\delta_\varepsilon(t_1,t)\geqslant 0, \quad \int\delta_\varepsilon(t,t_1)\,dt_1=1,\\ &\delta_\varepsilon(t,t_1)=0,\ \text{если}\ t_1<\max\left(t-\frac{\varepsilon}{|t|},\ t-\frac{\varepsilon}{\mu}\right),\\ &t_1>\min\left(t+\frac{\varepsilon}{|t|},\ t+\frac{\varepsilon}{\mu}\right), \end{aligned}\right\} \tag{3.44}$$

$$\|\delta_\varepsilon(t,t_1)\|_N\leqslant C_\varepsilon(1+|t|^{N_1}), \tag{3.45}$$

$$\delta_\varepsilon(t,t_1)\to\delta(t-t_1)\ \text{при}\ \varepsilon\to+0. \tag{3.46}$$

Введем функции

$$F_{ij}(x_1,x_2,t,\varepsilon)=\int F_{ij}(x_1,x_2,t)\,\delta_\varepsilon(t,t_1)\,dt_1, \quad ij=r, a,$$

являющиеся обобщенными относительно (x_1, x_2), бесконечно дифференцируемыми и, в силу (3.45), полиномиально ограниченными относительно t. Заметим, что порядки обобщенных относительно (x_1, x_2) функций

$F_{ij}(x_1, x_2, t, \varepsilon)$ ограничены числом, не зависящим от t и ε. Из (3.46) имеем при $\varepsilon \to +0$:

$$F_{ij}(x_1, x_2, t, \varepsilon) \to F_{ij}(x_1, x_2, t), \quad \widetilde{F}_{ij}(p_1, p_2, t, \varepsilon) \to \widetilde{F}_{ij}(p_1, p_2, t).$$

Функции $F_{ij}(x_1, x_2, t, \varepsilon)$ удовлетворяют условиям (3.1). Кроме того, из (3,3), (3.5) и (3.44) следует, что

$$\widetilde{F}_{ij}'(p_1, p_2, t, \varepsilon) = 0, \quad \text{если} \quad t < \frac{1}{2}(M + \mu) - \frac{4\varepsilon}{3\mu}.$$

Считая $\varepsilon < \frac{3}{16}\mu^2$ и замечая, что при $t \geqslant \frac{1}{2}M + \frac{1}{4}\mu$ область G_t^0 монотонно убывает с увеличением t, получаем из (3.2) и (3.44):

$$\widetilde{F}_{rj}(p_1, p_2, t, \varepsilon) - \widetilde{F}_{aj}(p_1, p_2, t, \varepsilon) = 0, \text{ если } p_1 \in G^0_{t+\frac{\varepsilon}{t}}, \quad j = r, a,$$

$$\widetilde{F}_{ir}(p_1, p_2, t, \varepsilon) - \widetilde{F}_{ia}(p_1, p_2, t, \varepsilon) = 0, \text{ если } p_2 \in G^0_{t+\frac{\varepsilon}{t}}, \quad i = r, a,$$

для $t \geqslant \frac{1}{2}(M + \mu) - \frac{4\varepsilon}{3\mu}$.

Применяя к построенным функциям $F_{ij}(x_1, x_2, t, \varepsilon)$, $\widetilde{F}_{ij}(p_1, p_2, t, \varepsilon)$ доказанные выше результаты и переходя в соответствующих формулах (3.21) и (3.43) к пределу при $\varepsilon \to +0$, убеждаемся в справедливости теоремы в общем случае.

§ 4

Применим теорему II к доказательству нашей основной теоремы.

ТЕОРЕМА III. *Пусть даны трансляционно-инвариантные обобщенные функции четырех 4-векторов:*

$$F^{\nu}_{ij}(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad i, j = r, a, \quad \nu = 1, 2, \ldots, l,$$

линейно преобразующиеся при преобразованиях L из полной группы Лоренца:

$$F^{\nu}_{ij}(Lx_1, \ldots, Lx_4) = \sum_{1 \leqslant \nu' \leqslant l} A_{\nu,\nu'}(L) F^{\nu'}_{ij}(x_1, \ldots, x_4) \tag{4.1}$$

при помощи некоторого представления $A(L)$ этой группы. Предположим, кроме того, что введенные обобщенные функции удовлетворяют следующим условиям:

$$\left.\begin{aligned} &F^{\nu}_{rr}(x_1, \ldots, x_4) = 0 \ \text{при} \ x_1 \lessgtr x_3 \ \text{или} \ x_2 \lessgtr x_4, \\ &F^{\nu}_{ra}(x_1, \ldots, x_4) = 0 \ \text{при} \ x_1 \lessgtr x_3 \ \text{или} \ x_2 \ngtr x_4, \\ &F^{\nu}_{ar}(x_1, \ldots, x_4) = 0 \ \text{при} \ x_1 \ngtr x_3 \ \text{или} \ x_2 \lessgtr x_4, \\ &F^{\nu}_{aa}(x_1, \ldots, x_4) = 0 \ \text{при} \ x_1 \ngtr x_3 \ \text{или} \ x_2 \ngtr x_4. \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

Рассмотрим преобразование Фурье:

$$\int F^{\nu}_{ij}(x_1, \ldots, x_4) \exp i(p_1 x_1 + \ldots + p_4 x_4)\, dx_1 \ldots dx_4 =$$

$$= \delta(p_1 + \ldots + p_4) \widetilde{F}^{\nu}_{ij} p_1, \ldots, p_4). \tag{4.3}$$

Здесь $\widetilde{F}^{\nu}_{ij}(p_1, \ldots, p_4)$ — *обобщенные функции* $(p_1, \ldots, p_4)$, *определенные на многообразии*

$$p_1 + \ldots + p_4 = 0. \tag{4.4}$$

Предположим, что они удовлетворяют условиям:

$$\left.\begin{array}{l} \widetilde{F}^{\nu}_{rj}(p_1, \ldots, p_4) - \widetilde{F}^{\nu}_{aj}(p_1, \ldots, p_4) = 0 \\ \text{при } p_1^2 < (M+\mu)^2, \quad p_3^2 < 9\mu^2, \quad j = r, a, \\ \widetilde{F}^{\nu}_{ir}(p_1, \ldots, p_4) - \widetilde{F}^{\nu}_{ia}(p, \ldots, p_4) = 0 \\ \text{при } p_2^2 < (M+\mu)^2, \quad p_4^2 < 9\mu^2, \quad i = r, a, \end{array}\right\} \tag{4.5}$$

$$\widetilde{F}^{\nu}_{ij}(p_1, \ldots, p_4) = 0, \text{ если } (p_1+p_3)^2 < (M+\mu)^2, \text{ или } p_{10} + p_{30} < 0, \tag{4.6}$$

где $M > 2\mu > 0$.

Тогда можно построить обобщенные функции $\widetilde{\Phi}_{\lambda}(z, \xi)$ *вещественной переменной* ξ *со свойствами:*

1) $\Phi_{\lambda}(z, \xi)$ *аналитичны относительно* $z = (z_1, \ldots, z_5)$ *в области*

$$\begin{array}{c} |z_1 - M^2| \leqslant \rho\mu^2, \quad |z_2 - M^2| \leqslant \rho\mu^2, \quad |z_3 - \tau| \leqslant \rho\mu^2, \quad |z_4 - \tau| \leqslant \rho\mu^2, \\ |z_5 + \alpha^2| \leqslant \rho^2\mu^2\left(\frac{M}{t}\right)^2, \quad V \leqslant \tau \leqslant \mu^2, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\sqrt{2}\mu; \end{array} \tag{4.7}$$

2) $\widetilde{\Phi}_{\lambda}(z, \xi) = 0$, *если* $\xi < \left(\frac{M+\mu}{2}\right)^2$;

3) *для вещественных* $(p_1, \ldots, p_4)$ *из многообразия* (4.4), *для которых величины*

$$z_1 = p_1^2, \quad z_2 = p_2^2, \quad z_3 = p_3^2, \quad z_4 = p_4^2, \quad z_5 = (p_1 + p_2)^2$$

удовлетворяют неравенствам (4.7), *а* $\xi = \left(\frac{p_1 + p_3}{2}\right)^2$, *имеем представление при* $p_{10} + p_{30} > 0$:

$$\widetilde{F}^{\nu}_{ij}(p_1, \ldots, p_4) = \sum p_{i_1}^{\alpha_1} \ldots p_{i_s}^{\alpha_s}\, \widetilde{\Phi}_{\lambda}(z, \xi) \tag{4.8}$$

с конечным числом членов в сумме.

Доказательство. Ввиду трансляционной инвариантности обобщенных функций $F^{\nu}_{ij}(x_1, \ldots, x_4)$, их можно рассматривать как обобщенные функции трех переменных, например:

$$y_1 = x_1 - x_3, \quad y_2 = x_4 - x_2, \quad y_3 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4.$$

Положим

$$F^{\nu}_{ij}(x_1, \ldots, x_4) = F^{\nu}_{ij_1}(x_1 - x_3, x_4 - x_2, x_1 - x_2 + x_3 - x_4), \tag{4.9}$$

где $j_1 = r$, если $j = a$, $j_1 = a$, если $j = r$. Тогда, в силу (4.9) и (4.2), ясно, что обобщенные функции $F^{\nu}_{ij}(y_1, y_2, y_3)$ удовлетворяют условиям:

$$\left.\begin{array}{l} F^{\nu}_{rr}(y_1, y_2, y_3) = 0, \text{ если } y_1 \leqslant 0 \text{ или } y_2 \leqslant 0, \\ F^{\nu}_{ra}(y_1, y_2, y_3) = 0, \text{ если } y_1 \leqslant 0 \text{ или } y_2 \geqslant 0, \\ F^{\nu}_{ar}(y_1, y_2, y_3) = 0, \text{ если } y_1 \geqslant 0 \text{ или } y_2 \leqslant 0, \\ \widetilde{F}^{\nu}_{aa}(y_1, y_2, y_3) = 0, \text{ если } y_1 \geqslant 0 \text{ или } y_2 \geqslant 0. \end{array}\right\} \tag{4.10}$$

Далее, из (4.9) следует, что

$$\widetilde{F}^{\nu}_{ij}(q_1 + q_3, -q_2 - q_3, q_3 - q_1, q_2 - q_3) = \widetilde{F}^{\nu}_{ij}(q_1, q_2, q_3). \tag{4.11}$$

Положив $p_1 = q_1 + q_3$, $p_2 = -q_2 - q_3$, $p_3 = q_3 - q_1$, $p_4 = q_2 - q_3$, находим:

$$q_3 = \frac{p_1 + p_3}{2}, \quad p_1^2 = (q_1 + q_3)^2, \quad p_2^2 = (q_2 + q_3)^2, \quad p_3^2 = (q_1 - q_3)^2,$$
$$p_4^2 = (q_2 - q_3)^2, \quad (p_1 + p_2)^2 = (q_1 - q_2)^2. \tag{4.12}$$

Тогда из (4.5) и (4.6) получаем:

$$\left.\begin{aligned} &\widetilde{F}^{\nu}_{rj}(q_1, q_2, q_3) - \widetilde{F}^{\nu}_{aj}(q_1, q_2, q_3) = 0,\\ &\text{если } (q_1 + q_3)^2 < (M + \mu)^2, \quad (q_1 - q_3)^2 < 9\mu^2,\\ &\widetilde{F}^{\nu}_{ir}(q_1, q_2, q_3) - \widetilde{F}^{\nu}_{ia}(q_1, q_2, q_3) = 0,\\ &\text{если } (q_2 + q_3)^2 < (M + \mu)^2, \quad (q_2 - q_3)^2 < 9\mu^2,\\ &\widetilde{F}^{\nu}_{ij}(q_1, q_2, q_3) = 0, \text{ если } q_3^2 < \left(\frac{M + \mu}{2}\right)^2, \text{ или } q_{30} < 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

Из (4.1) и (4.9) следует также, что при преобразованиях L из группы Лоренца функции $F^{\nu}_{ij}(y_1, y_2, y_3)$ линейно преобразуются:

$$F^{\nu}_{ij}(Ly_1, Ly_2, Ly_3) = \sum_{1 \leqslant \nu' \leqslant l} A_{\nu, \nu'}(L) F^{\nu'}_{ij}(y_1, y_2, y_3).$$

Отсюда вытекает, что функции $\widetilde{F}^{\nu}_{ij}(q_1, q_2, q_3)$ линейно выражаются (с полиномиальными коэффициентами от q_i) через скалярные функции (q_1, q_2, q_3). Таким образом, для доказательства теоремы достаточно считать, что функции $F_{ij}(y_1, y_2, y_3)$ и $F_{ij}(q_1, q_2, q_3)$ скалярные и удовлетворяют условиям (4.10) и (4.13).

В самом деле, рассмотрим выражения

$$\int F_{ij}(y_1, y_2, y_3)\, e^{iq_3y_3}\, dy_3, \tag{4.14}$$

где $q_3 = te$, а e — временно-подобный единичный четырехвектор,

$$e_0 > 0, \quad e^2 = 1.$$

Совершим лоренцовское преобразование $y'_i = Ly_i$ таким образом, чтобы вектор e оказался направленным по временной оси. Выражения (4.14) можно рассматривать как функции $F_{ij}(y'_1, y'_2, t)$. В силу условий (4.10), (4.13) и условия скалярности, эти функции удовлетворяют всем условиям теоремы II. Поэтому мы можем построить функцию $\widetilde{\Phi}(z, t)$, аналитическую относительно z в области (4.7) и обобщенную по t. Функция $\widetilde{\Phi}(z, t)$ обладает тем свойством, что в области вещественных q'_1 и q'_2, для которых точки $z = (z_1, z_2, \ldots, z_5)$, где

$$z_1 = (q'_{10} + t)^2 - \vec{q}_1'^2, \quad z_2 = (q'_{20} + t)^2 - \vec{q}_2'^2, \quad z_3 = (q'_{10} - t)^2 - \vec{q}_1'^2,$$
$$z_4 = (q'_{20} - t)^2 - q_2'^2, \quad z_5 = (q'_{10} - q'_{20})^2 - (\vec{q}'_1 - \vec{q}'_2)^2, \tag{4.15}$$

лежат в области (4.7), имеет место равенство:

$$\widetilde{\Phi}(z, t) = \widetilde{F}_{ij}(q'_1, q'_2, t), \quad i, j = r, a.$$

Кроме того,

$$\widetilde{\Phi}(z, t) = 0 \quad \text{при } t < \frac{1}{2}(M + \mu).$$

Вводя функцию $\Phi(z, \xi)$,

$$\Phi(z, \xi) = \begin{cases} \widetilde{\Phi}(z, \sqrt{\xi}), & \xi \geqslant \left(\frac{M+\mu}{2}\right)^2, \\ 0, & \xi < \left(\frac{M+\mu}{2}\right)^2, \end{cases}$$

и замечая, что, в силу (4.12),

$$(q'_{10} + t)^2 - \vec{q}_1'^2 = (q_1 + q_3)^2 = p_1^2, \qquad (q'_{20} + t)^2 - \vec{q}_2'^2 = (q_2 + q_3)^2 = p_2^2,$$

$$(q'_{10} - t)^2 - \vec{q}_1'^2 = (q_1 - q_3)^2 = p_{32}, \qquad (q'_{20} - t)^2 - \vec{q}_2'^2 = (q_2 - q_3)^2 = p_4^2,$$

$$(q'_1 - q'_2)^2 = (q_1 - q_2)^2 = (p_1 + p_2)^2, \qquad t^2 = q_3'^2 = q_3^2 = \left(\frac{p_1 + p_3}{2}\right)^2,$$

мы видим, что эта функция удовлетворяет всем условиям, сформулированным в теореме. Теорема доказана.

Замечание I. Вместо условия (4.6) мы может ввести условие

$$[(p_1 + p_3)^2 - M^2]\, \widetilde{F}^{\nu}_{ij}(p_1, \ldots, p_4) = 0,$$

если $(p_1 + p_3)^2 < (M + \mu)^2$, или $p_{10} + p_{30} < 0$.

Действительно, в этом случае вместо F^{ν}_{ij} можно рассмотреть функции

$$\left[-\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2 - M^2\right] F^{\nu}_{ij}(x_1, \ldots, x_4),$$

удовлетворяющие всем условиям теоремы III.

Соотношение (4.8) окажется тогда умноженным на $[(p_1 + p_3)^2 - M^2]$, но этот множитель мы можем отбросить в области, где

$$(p_1 + p_3)^2 \neq M^2.$$

Поэтому (4.8) остается верным, если к условию $p_{10} + p_{30} > 0$ добавить

$$(p_1 + p_3)^2 \neq M^2.$$

Замечание II. Пусть выполнены все условия теоремы III, кроме условий (4.5), в которых неравенства

$$p_3^2 < 9\mu^2, \quad p_4^2 < 9\mu^2$$

заменены на

$$p_3^2 < 4\mu^2, \quad p_4^2 < 4\mu^2.$$

Тогда легко проверить, что теорема III остается справедливой при условии, что в области (4.7) α заключено в интервале $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\mu$.

Математический Институт
им. В. А. Стеклова Академии наук СССР

Поступило
17.VI.1957

ЛИТЕРАТУРА

[1] Сборник «Дисперсионные соотношения», Проблемы современной физики, 2, 1957.

[2] Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К., Ширков Д. В., Вопросы теории дисперсионных соотношений, Объединенный институт ядерных исследований, 1957.

[3] Боголюбов Н. Н. и Парасюк О. С., Об аналитическом продолжении обобщенных функций, Доклады Ак. наук СССР, 109 (1956), 717—719.

[4] Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, ИИЛ, 1948.

[5] Соболев С. Л., Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy, Матем. сборн., 1 (43):1(1936), 39—72.

[6] Schwartz L., Théorie des distribution, I—II, Paris, 1950, 1951.

[7] Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е., Преобразование Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши, Успехи матем. наук, VIII, 6(58), (1953), 3—54.

[8] Боголюбов Н. Н. и Ширков Д. В., Вопросы квантовой теории поля, I, II, Успехи физ. наук, т. 55 (1955), 149—214; т. 57 (1955), 1—92.

[9] Парасюк О. С., К теории причинных сингулярных функций, Доклады Ак. наук СССР, 100 (1955), 643—645.

[10] Соболев С. Л.. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во ЛГУ, 1950.

[11] Бохнер С. и Мартин У. Т., Функции многих комплексных переменных, ИИЛ, 1951.

[12] Schwartz L., Transformation de Laplace des distributions, Medd. Lunds. Univ. Mat. Sem., Supplementband (1952), 196—206.

[13] Lions J. L., Supports dans la transformation de Laplace, J. Analyze Mathem., 2 (1952—53), 369—380.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 49—80

В. А. ИЛЬИН

О РАЗЛОЖИМОСТИ ФУНКЦИЙ, ОБЛАДАЮЩИХ ОСОБЕННОСТЯМИ, В УСЛОВНО СХОДЯЩИЙСЯ РЯД ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В работе доказывается, что если функция обладает внутри произвольной N-мерной области g особенностью типа $\frac{1}{r^\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ или $\log r$ и после выделения этой особенности удовлетворяет обычным условиям разложимости, то эта функция может быть разложена в условно сходящийся ряд по собственным функциям уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ в области g с однородным краевым условием любого из трех родов, причем указанный ряд сходится при суммировании в порядке возрастания собственных чисел равномерно в любой строго внутренней подобласти g', из которой удалена сколь угодно малая окрестность особой точки.

В настоящей работе изучается вопрос о разложимости функций, обладающих особенностью типа $\frac{1}{r^\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ или логарифмического типа, в ряд Фурье по собственным функциям уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ в произвольной N-мерной области g с однородным краевым условием любого из трех родов.

Из результатов работы ([1]) вытекает, что если функция обладает особенностью указанного выше типа, то нельзя ожидать *абсолютной* сходимости ряда Фурье для этой функции *ни в одной внутренней точке области*, даже если эта функция, после выделения особенности, удовлетворяет сколь угодно высоким требованиям гладкости. Отсюда следует, что для функции, обладающей указанной выше особенностью, речь может идти лишь о разложимости *в условно сходящийся ряд Фурье*, и существенную роль играет *порядок, в котором производится суммирование ряда Фурье*. (Напомним, что условно сходящийся ряд некоторой перестановкой его членов можно заставить сходиться в данной точке к любому наперед взятому числу.) Нам удалось доказать, что если функция обладает во внутренней точке произвольной N-мерной области g указанной выше особенностью и после выделения этой особенности удовлетворяет обычным условиям разложимости, то ряд Фурье для этой функции *сходится при суммировании в естественном порядке возрастания собственных чисел равномерно во всякой строго внутренней подобласти, из которой удалена сколь угодно малая окрестность особой точки.*

Доказательству сформулированного утверждения посвящена вторая глава настоящей работы. При доказательстве мы используем асимптоти-

ческую формулу для собственных функций, полученную в работах ряда авторов различными методами [см., например, [2], [3], [4]].

В главе I настоящей работы мы предлагаем новый и, как нам кажется, довольно простой в идейном отношении метод получения асимптотической формулы для собственных функций. Этот метод основывается на использовании идей, развитых нами в работе [5]. К опубликованию указанного метода нас побудило не только желание дать новый вывод широко известной и важной формулы. Дело в том, что указанным методом удалось установить [см. [6], [7], [8]] асимптотические формулы совсем нового типа и при помощи этих формул получить ряд результатов, связанных с проблемой разложения по собственным функциям. Подробное изложение этих результатов, разумеется, выходит за рамки настоящей работы и будет дано в следующих работах.

Автор приносит глубокую благодарность А. Н. Тихонову, уделившему много внимания этой работе и сделавшему ряд ценных замечаний.

ГЛАВА I

Новый вывод асимптотических формул для собственных функций

При изучении вопросов, связанных с проблемой разложения по собственным функциям, большую роль играют асимптотические формулы для собственных функций. На этих формулах базируются исследования Б. М. Левитана [2] о суммировании разложений по собственным функциям методом средних Рисса. При помощи указанных формул будут получены основные результаты настоящей работы. Кроме того, указанные формулы послужили отправным пунктом для проведения исследований, изложенных в работах [6], [7] и [8]. Мы приведем асимптотические формулы в той форме, в какой они фигурируют в работе [2]:

$$\sum_{\sqrt{\lambda_i}<\mu} u_i(P)\,u_i(Q) = \frac{\mu^{\frac{N}{2}}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\cdot\frac{J_{\frac{N}{2}}(\mu r_{PQ})}{r_{PQ}^{\frac{N}{2}}} + O(\mu^{N-1}), \tag{1}$$

$$\frac{1}{\Gamma(S+1)}\sum_{\sqrt{\lambda_i}<\mu} u_i(P)\,u_i(Q)\left(1-\frac{\lambda_i}{\mu^2}\right)^S =$$

$$= \frac{2^S\mu^{\frac{N}{2}-S}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\cdot\frac{J_{\frac{N}{2}+S}(\mu r_{PQ})}{r_{PQ}^{\frac{N}{2}+S}} + O(\mu^{N-1-S}). \tag{2}$$

Здесь $J_\nu(x)$ обозначает, как обычно, функцию Бесселя ν-го порядка, оценка O-членов в правых частях формул (1) и (2) равномерна относительно P и Q, когда эти точки принадлежат произвольной, строго внутренней подобласти g' основной области g. Формула (2) является более общей, чем формула (1), и справедлива для любого S из отрезка $0\leqslant S\leqslant N$. При $S\geqslant N$ в правой части формулы (2) стоят члены порядка $O\left(\frac{1}{\mu}\right)$. Функции, стоящие в левых частях формул (1) и (2), часто называют спектральными функциями оператора Лапласа.

В настоящее время известны различные методы получения асимптотических формул (1) и (2). В работе ([2]) указанные формулы устанавливаются путем сравнения изучаемых спектральных функций со спектральными функциями оператора Лапласа во всем неограниченном пространстве (последние легко найти, решая задачу Коши для волнового уравнения). При этом используется аппарат обобщенного гармонического анализа. В работе ([3]) указанные формулы, а также аналогичные формулы для общего самосопряженного эллиптического оператора, устанавливаются методом Карлемана.

В этой главе мы предлагаем новый метод установления асимптотических формул для собственных функций. Идея этого метода проста: следуя схеме работы ([5]), мы изучаем коэффициенты Фурье конкретных функций, зависящих только от радиуса (главных членов в правых частях формул (1) и (2)), и, суммируя ряд Фурье для этих функций, приходим к искомым асимптотическим формулам. Правда, при этом мы получаем немного завышенный порядок O-членов в правых частях формул (1) и (2), а именно, в правой части формулы (1) мы получаем члены порядка $O(\mu^{N-1+\delta})$, а в правой части формулы (2) — члены порядка $O(\mu^{N-1-S+\delta})$, где δ — сколь угодно малое фиксированное положительное число.

Ввиду того, что δ сколь угодно мало, устанавливаемые асимптотические формулы нисколько не менее эффективны для приложений, чем формулы (1) и (2), и дают возможность получить те же самые результаты о суммировании разложений по собственным функциям.

Поскольку нам потребуется только первая из асимптотических формул (1), (2), мы ее одну и будем устанавливать, ограничиваясь замечанием о том, что формула типа (2) может быть получена совершенно аналогичным способом.

Итак, целью этой главы является установление следующей асимптотической формулы:

$$\sum_{\sqrt{\lambda_i}<\mu} u_i(P)\,u_i(Q) = \frac{\mu^{\frac{N}{2}}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \cdot \frac{J_{\frac{N}{2}}(\mu r_{PQ})}{r_{PQ}^{\frac{N}{2}}} + O(\mu^{N-1+\delta}), \tag{3}$$

где δ — сколь угодно малое фиксированное положительное число.

§ 1. Предварительная асимптотическая формула

Прежде всего установим следующую предварительную асимптотическую формула:

$$\sum_{\mu-1\leqslant\sqrt{\lambda_i}\leqslant\mu} |u_i(P)\,u_i(Q)| = O(\mu^{N-1}), \tag{4}$$

где оценка O-членов равномерна относительно точек P и Q, когда эти точки принадлежат произвольной, строго внутренней подобласти g' основной N-мерной области g.

Пусть P — произвольная внутренняя точка данной N-мерной области g, минимум расстояния которой от границы области g превосходит R, а Q — любая точка области g. (Можно считать, что P принадлежит произвольной, строго внутренней подобласти g'. Тогда всегда найдется столь

малое значение R, что минимум расстояния P от границы области g будет превосходить R.)

Рассмотрим следующую конкретную функцию:

$$\bar{v}(r_{PQ}) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \cdot r_{PQ}^{\frac{N}{2}-1}} \displaystyle\int\limits_{\mu-1}^{\mu} \nu^{\frac{N}{2}} \cdot J_{\frac{N}{2}-1}(\nu r_{PQ})\, d\nu & \text{при } \dfrac{R}{2} < r < R, \\ 0 & \text{для других значений } r. \end{cases} \tag{5}$$

По построению функция (5) отлична от нуля только в «кольце» с центром в точке P и с радиусами, соответственно равными $\frac{R}{2}$ и R.

Введя сферические координаты, найдем коэффициент Фурье функции (5) непосредственным интегрированием:

$$\bar{v}_i = \int\limits_{\frac{R}{2}}^{R} \left(\iint\limits_{\Omega} \cdots \int u_i(r, \Omega)\, d\Omega \right) \bar{v}(r) \cdot r^{N-1} dr$$

(здесь $\iint\limits_{\Omega}\cdots\int$ обозначает интеграл по всем «углам» на поверхности N-мерной сферы). Далее, следуя схеме работы ([5]), воспользуемся теоремой о среднем значении [см. ([9]), стр. 246] для уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$:

$$\iint\limits_{\Omega} \cdots \int u_i(r, \Omega)\, d\Omega = 2(\sqrt{\pi})^N \cdot u_i(P) \cdot \frac{J_{\frac{N-2}{2}}(r\sqrt{\lambda_i})}{\left(\dfrac{r\sqrt{\lambda_i}}{2}\right)^{\frac{N-2}{2}}}. \tag{6}$$

Коэффициент Фурье $\bar{v}$ п[illegible]мает вид:

$$\bar{v}_i = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \cdot \frac{u_i(P)}{\lambda_i^{\frac{N-4}{2}}} \cdot \int\limits_{\frac{R}{2}}^{R} \bar{v}(r) \cdot r^{\frac{N}{2}} \cdot J_{\frac{N}{2}-1}(r\sqrt{\lambda_i})\, dr =$$

$$= \frac{u_i(P)}{\lambda_i^{\frac{N-2}{4}}} \cdot \int\limits_{\mu-1}^{\mu} \nu^{\frac{N}{2}} \left[\int\limits_{\frac{R}{2}}^{R} r \cdot J_{\frac{N}{2}-1}(\nu r) \cdot J_{\frac{N}{2}-1}(r\sqrt{\lambda_i})\, dr \right] d\nu. \tag{7}$$

Интеграл, стоящий в квадратных скобках в правой части формулы (7), может быть точно вычислен, но мы предпочитаем оценить этот интеграл, исходя из асимптотического представления цилиндрических функций.

Так как мы рассматриваем только такие номера i, для которых $\mu-1 \leqslant \sqrt{\lambda_i} \leqslant \mu$, и так как переменная ν в формуле (7) также изменяется в пределах $\mu - 1 \leqslant \nu \leqslant \mu$, то при достаточно большом μ справедливо следующее асимптотическое представление для произведения цилиндрических функций, стоящего под знаком интеграла в формуле (7):

$$r \cdot J_{\frac{N}{2}-1}(\nu r) \cdot J_{\frac{N}{2}-1}(r\sqrt{\lambda_i}) = \frac{1}{\pi \cdot \nu^{\frac{1}{2}} \cdot \lambda_i^{\frac{1}{4}}} \left\{ \sin\left[r(\nu + \sqrt{\lambda_i}) - (N-1)\frac{\pi}{2} \right] + \right.$$

$$\left. + \cos r(\nu - \sqrt{\lambda_i}) \right\} + \frac{1}{r} O\left(\frac{1}{\mu^2}\right). \tag{8}$$

Внося представление (8) в формулу (7), мы разобьем интеграл, стоящий в правой части (7), на сумму трех интегралов, каждый из которых оценим порознь.

Первый из этих интегралов оценивается следующим образом:

$$I_1 = \frac{1}{\lambda_i^{\frac{N-2}{4}}} \cdot \int_{\mu-1}^{\mu} \nu^{\frac{N}{2}} \cdot \int_{\frac{R}{2}}^{R} \frac{1}{r} O\left(\frac{1}{\mu^2}\right) dr =$$

$$= O\left(\frac{1}{\mu^{\frac{N}{2}+1}}\right) \cdot \int_{\mu-1}^{\mu} \nu^{\frac{N}{2}} d\nu \cdot \int_{\frac{R}{2}}^{R} \frac{dr}{r} = O\left(\frac{1}{\mu}\right) \lg 2 = O\left(\frac{1}{\mu}\right) \tag{9}$$

(здесь мы учли, что $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} = O\left(\frac{1}{\mu}\right)$ для любого номера i, для которого $\mu - 1 \leqslant \sqrt{\lambda_i} \leqslant \mu$).

Перейдем к оценке второго из интегралов, образующих правую часть (7):

$$I_2 = \frac{1}{\pi \cdot \lambda_i^{\frac{N}{4} - \frac{1}{4}}} \cdot \int_{\mu-1}^{\mu} \nu^{\frac{N}{2} - \frac{1}{2}} \left[\int_{\frac{R}{2}}^{R} \sin\left[r(\nu + \sqrt{\lambda_i}) - (N-1)\frac{\pi}{2}\right] dr \right] d\nu. \tag{10}$$

Заметим, что

$$\sin\left[r(\nu + \sqrt{\lambda_i}) - (N-1)\frac{\pi}{2}\right] = \begin{cases} (-1)^{\frac{N-1}{2}} \cdot \sin[r(\nu + \sqrt{\lambda_i})] \text{ для четного } N, \\ (-1)^{\frac{N}{2}} \cdot \cos[r(\nu + \sqrt{\lambda_i})] \text{ для нечетного } N. \end{cases}$$

Рассмотрим, например, случай четного N (случай нечетного N рассматривается совершенно аналогично). Пренебрегая знаком, получим:

$$|I_2| = \left| \frac{1}{\pi \cdot \lambda_i^{\frac{N}{4} - \frac{1}{4}}} \cdot \int_{\mu-1}^{\mu} \nu^{\frac{N}{2} - \frac{1}{2}} \left[\int_{\frac{R}{2}}^{R} \sin[r(\nu + \sqrt{\lambda_i})] dr \right] d\nu \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{\pi \cdot \lambda_i^{\frac{N}{4} - \frac{1}{4}}} \cdot \int_{\mu-1}^{\mu} \nu^{\frac{N}{2} - \frac{1}{2}} \left[\frac{\cos[r(\nu + \sqrt{\lambda_i})]}{(\nu + \sqrt{\lambda_i})} \right] \Bigg|_{r=\frac{R}{2}}^{r=R} d\nu \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi \cdot \lambda_i^{\frac{N}{4} + \frac{1}{4}}} \cdot \int_{\mu-1}^{\mu} \nu^{\frac{N}{2} - \frac{1}{2}} d\nu = O\left(\frac{1}{\mu}\right) \tag{11}$$

(мы мажорировали косинус единицей и воспользовались тем, что $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} = O\left(\frac{1}{\mu}\right)$).

Остается оценить третий интеграл, участвующий в образовании правой части формулы (7):

$$I_3 = \frac{1}{\pi \cdot \lambda_i^{\frac{N}{4} - \frac{1}{4}}} \cdot \int_{\mu-1}^{\mu} \nu^{\frac{N}{2} - \frac{1}{2}} \cdot \left[\int_{\frac{R}{2}}^{R} \cos[r(\nu - \sqrt{\lambda_i})] dr \right] d\nu =$$

$$= \frac{1}{\pi \cdot \lambda_i^{\frac{N}{4}-\frac{1}{4}}} \cdot \int\limits_{\mu-1}^{\mu} \nu^{\frac{N}{2}-\frac{1}{4}} \cdot \left[R \frac{\sin [R(\nu - \sqrt{\lambda_i})]}{R(\nu - \sqrt{\lambda_i})} - \frac{R}{2} \frac{\sin \left[\frac{R}{2}(\nu - \sqrt{\lambda_i})\right]}{\frac{R}{2}(\nu - \sqrt{\lambda_i})} \right] d\nu. \quad (12)$$

Обозначим через $f_i(\nu)$ выражение в квадратных скобках в правой части формулы (12) и оценим эту величину. Итак,

$$f_i(\nu) = \left[R \frac{\sin [R(\nu - \sqrt{\lambda_i})]}{R(\nu - \sqrt{\lambda_i})} - \frac{R}{2} \cdot \frac{\sin \left[\frac{R}{2}(\nu - \sqrt{\lambda_i})\right]}{\frac{R}{2}(\nu - \sqrt{\lambda_i})} \right]. \quad (13)$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $R \leqslant 1$. Так как $\mu - 1 \leqslant \sqrt{\lambda_i} \leqslant \mu$ и $\mu - 1 \leqslant \nu \leqslant \mu$, то можно утверждать, что $|\nu - \sqrt{\lambda_i}| \leqslant 1$, а следовательно, и

$$|R(\nu - \sqrt{\lambda_i})| \leqslant 1. \quad (14)$$

Таким образом, аргументы обоих синусов, стоящих в формуле (13), не превосходят единицы.

Известно, что функция

$$\frac{\sin \rho}{\rho} = 1 - \frac{\rho^2}{3!} + \frac{\rho^4}{5!} - \ldots$$

на отрезке $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ является положительной монотонно убывающей функцией, изменяющейся в пределах:

$$1 \geqslant \frac{\sin \rho}{\rho} > \frac{5}{6}. \quad (15)$$

Исходя из формулы (15), мы можем оценить функцию, определяемую формулой (13), следующим образом:

$$\left[R - \frac{5}{6} \cdot \frac{R}{2} \right] > f_i(\nu) > \left[\frac{5}{6} R - \frac{R}{2} \right],$$

или

$$\frac{7}{12} R > f_i(\nu) > \frac{1}{3} R. \quad (16)$$

Далее, заметим, что для $\mu - 1 \leqslant \sqrt{\lambda_i} \leqslant \mu$ и $\mu - 1 \leqslant \nu \leqslant \mu$ справедлива оценка

$$\frac{\nu}{\sqrt{\lambda_i}} = 1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

Возвышая последнюю оценку в степень, найдем:

$$\left(\frac{\nu}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^{\frac{N}{2}-\frac{1}{2}} = 1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right). \quad (17)$$

Теперь мы можем оценить интеграл I_3. Перепишем этот интеграл в виде:

$$I_3 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mu-1}^{\mu} \left(\frac{\nu}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^{\frac{N}{2}-\frac{1}{2}} \cdot f_i(\nu)\, d\nu. \quad (18)$$

Используя оценки (16) и (17), мы получим из формулы (18):

$$I_3 = C_i + O\left(\frac{1}{\mu}\right), \quad (19)$$

где C_i заключено в пределах:

$$\frac{7R}{12\cdot\pi} > C_i > \frac{R}{3\pi}. \qquad (20)$$

Соединяя оценки (9), (10), (19) и внося их в формулу (7), будем иметь следующее представление для коэффициента Фурье $\overline{v}_i$:

$$\overline{v}_i = u_i(P)\left[C_i + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right]. \qquad (21)$$

Наша ближайшая цель — оценить модуль коэффициента Фурье снизу. Совершенно ясно, что для достаточно большого μ

$$\left|O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right| > \frac{C_i}{2},$$

так как $C_i > \frac{R}{3\pi}$ [см. формулу (20)]. А отсюда следует, что для достаточно большого μ

$$\left[C_i + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right] > \frac{C_i}{2} > \frac{R}{6\pi}. \qquad (22)$$

Переходя в соотношении (21) к модулям и пользуясь оценкой (22), получим требуемую оценку $\overline{v}_i$ снизу:

$$|\overline{v}_i| > \frac{R}{6\pi}|u_i(P)|. \qquad (23)$$

Из неравенства (23) заключаем, что

$$\frac{R^2}{36\cdot\pi^2}\sum_{\mu-1\leqslant\sqrt{\lambda_i}\leqslant\mu} u_i^2(P) < \sum_{\mu-1\leqslant\sqrt{\lambda_i}\leqslant\mu}\overline{v}_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\overline{v}^2. \qquad (24)$$

Остается воспользоваться неравенством Бесселя для функции $\overline{v}(r)$:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\overline{v}^2 \leqslant \int_{\frac{R}{2}}^{R}\overline{v}^2(r)\left(\iint_{\Omega}\cdots\int d\Omega\right) r^{N-1}\,dr. \qquad (25)$$

Интеграл

$$\omega_N = \iint_{\Omega}\cdots\int d\Omega$$

дает площадь поверхности N-мерной сферы единичного радиуса, равную $\frac{2(\sqrt{\pi})^N}{\Gamma(N/2)}$. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\overline{v}^2 \leqslant \omega_N\int_{\frac{R}{2}}^{R}\overline{v}^2(r)\cdot r^{N-1}\,dr = \frac{\omega_N}{(2\pi)^N}\int_{\frac{R}{2}}^{R}\left[\int_{\mu-1}^{\mu}\nu^{\frac{N}{2}}\cdot J_{\frac{N}{2}}(\nu r)\,d\nu\right]^2 r\,dr \qquad (26)$$

(мы воспользовались формулой (5)).

Для достаточно большого μ аргумент $\nu r \geqslant (\mu-1)\frac{R}{2} \gg 1$ велик, так что можно пользоваться асимптотической оценкой для функции Бесселя:

$$|J_{\frac{N}{2}}(\nu r)| \leqslant \frac{C}{\sqrt{\nu r}}.$$

Вставляя эту оценку в правую часть (26), мы мажорируем правую часть (26) следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\bar{v}_i^2 \leqslant \frac{C^2\cdot\omega_N}{(2\pi)^N}\cdot\frac{R}{2}\left(\int\limits_{\mu-1}^{\mu}\nu^{\frac{N}{2}-\frac{1}{2}}d\nu\right)^2 = \frac{C^2\cdot\omega_N}{(2\pi)^N}\,\frac{R}{2}\left[O\left(\mu^{\frac{N}{2}-\frac{1}{2}}\right)\right]^2 = O\left(\mu^{N-1}\right). \quad (27)$$

Сопоставляя неравенства (24) и (27), найдем:

$$\sum_{\mu-1\leqslant\sqrt{\lambda_i}<\mu} u_i^2(P) = O\left(\mu^{N-1}\right). \quad (28)$$

Для доказательства предварительной формулы (4) остается применить неравенство Буняковского:

$$\left|\sum_{\mu-1\leqslant\sqrt{\lambda_i}<\mu} u_i(P)\cdot u_i(Q)\right| \leqslant$$

$$\leqslant\left[\sum_{\mu-1\leqslant\sqrt{\lambda_i}<\mu} u_i^2(P)\cdot\sum_{\mu-1\leqslant\sqrt{\lambda_i}<\mu} u_i^2(Q)\right]^{\frac{1}{2}} = O\left(\mu^{N-1}\right).$$

Тем самым предварительная формула (4) установлена.

Отметим два следствия из предварительной формулы (4).

Следствие 1. *Справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$\sum_{|\sqrt{\lambda_i}-\mu|\leqslant 1} |u_i(P)\cdot u_i(Q)| = O\left(\mu^{N-1}\right). \quad (29)$$

Следствие 2. *Для любого ρ из интервала $1\leqslant\rho\leqslant\mu$ имеет место асимптотическая формула*:

$$\sum_{|\lambda_i-\mu|\leqslant\rho} |u_i(P)\cdot u_i(Q)| = \rho\cdot O\left(\mu^{N-1}\right). \quad (30)$$

Оценка O-членов в правых частях формул (29) и (30) равномерна относительно совокупности точек P и Q при условии, что эти точки принадлежат произвольной, строго внутренней подобласти g'. Для установления формул (29) и (30) следует разбить интервал, в пределах которого изменяется значение $\sqrt{\lambda_i}$ в формуле (29) или (30), на сумму интервалов единичной длины и к каждому из этих интервалов применить предварительную формулу (4).

Теперь мы можем перейти к установлению основной асимптотической формулы (3).

§ 2. Вывод основной асимптотической формулы

1. Рассмотрим следующую функцию:

$$v(r_{PQ}) = \begin{cases} \dfrac{\mu^{\frac{N}{2}}\cdot J_{\frac{N}{2}}(\mu r)}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\cdot r^{\frac{N}{2}}} & \text{при } r\leqslant R,\\ 0 & \text{при } r>R, \end{cases} \quad (31)$$

представляющую собой главный член искомой асимптотической формулы (3).

Найдем коэффициент Фурье этой функции непосредственным интегрированием, используя теорему о среднем значении [см. (6)]:

$$v_i = \int_0^R \Big(\iint \cdots \int_{\Omega} u_i\,(r,\,\Omega)\;d\Omega \Big) v\,(r) \cdot r^{N-1} \cdot dr =$$

$$= (2\pi)^{\frac{N}{2}} \cdot \frac{u_i\,(P)}{\lambda_i^{\frac{N-2}{4}}} \int_0^R v\,(r) \cdot r^{\frac{N}{2}} \cdot J_{\frac{N}{2}-1}\,(r\sqrt{\lambda_i})\,dr =$$

$$= \mu^{\frac{N}{2}} \cdot \frac{u_i\,(P)}{\lambda_i^{\frac{N-2}{4}}} \cdot \int_0^R J_{\frac{N}{2}}\,(\mu r) \cdot J_{\frac{N}{2}-1}\,(r\sqrt{\lambda_i})\,dr. \qquad (32)$$

Точно так же, как и в работе ([5]), интеграл, стоящий в правой части формулы (32), проинтегрируем по частям $(n+1)$ раз, последовательно пользуясь формулами:

$$\int r^{\nu} \cdot J_{\nu-1}\,(r\sqrt{\lambda_i})\,dr = \frac{r^{\nu} J_{\nu}(r\sqrt{\lambda_i})}{\sqrt{\lambda_i}}\,, \qquad \frac{d}{dr}\left[\frac{J_{\nu}\,(\mu r)}{r^{\nu}}\right] = -\frac{\mu \cdot J_{\nu+1}\,(\mu r)}{r^{\nu}}\,.$$

В результате получим следующее выражение для коэффициента Фурье:

$$v_i = u_i\,(P) \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^{\frac{N}{2}+k} \cdot J_{\frac{N}{2}+k}(\mu R) \cdot J_{\frac{N}{2}+k}\,(R\sqrt{\lambda_i}) +$$

$$+ u_i\,(P) \cdot \frac{\mu^{\frac{N}{2}+n+1}}{\lambda_i^{\frac{N}{4}+\frac{n}{2}}} \int_0^R J_{\frac{N}{2}+n+1}\,(\mu r) \cdot J_{\frac{N}{2}+n}(r\sqrt{\lambda_i})\,dr. \qquad (33)$$

Полагая номер n сначала равным $\left[\frac{N+1}{2}\right]$, а затем $\left[\frac{N+1}{2}\right] - 2$ (квадратные скобки обозначают, что берется целая часть заключенного в них числа), мы получим из (33) следующие две формулы:

$$v_i = \left\{ u_i(P) \cdot \sum_{k=0}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} \left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^{\frac{N}{2}+k} \cdot J_{\frac{N}{2}+k}\,(\mu R) \cdot J_{\frac{N}{2}+k}(R\sqrt{\lambda_i}) \right\} +$$

$$+ u_i\,(P) \cdot \left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]} \cdot J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]}\,(\mu R) \cdot J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]}\,(R\sqrt{\lambda_i}) +$$

$$+ u_i\,(P) \cdot \frac{\mu^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+3}{2}\right]}}{(\lambda_i)^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]}} \cdot \int_0^R J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+3}{2}\right]}\,(\mu r) \cdot J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]}\,(r\sqrt{\lambda_i})dr \qquad (34)$$

при $n = \left[\frac{N+1}{2}\right]$ и

$$v_i = \left\{ u_i\,(P) \cdot \sum_{k=0}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} \left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^{\frac{N}{2}+k} \cdot J_{\frac{N}{2}+k}\,(\mu R) \cdot J_{\frac{N}{2}+k}\,(R\sqrt{\lambda_i}) \right\} -$$

$$+u_i(P)\cdot\left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]}\cdot J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]}(\mu R)\cdot J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]}(R\sqrt{\lambda_i})+$$

$$+u_i(P)\frac{\mu^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]}}{(\sqrt{\lambda_i})^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-3}{2}\right]}}\cdot\int_0^R J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]}(\mu r)\cdot J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-3}{2}\right]}(r\sqrt{\lambda_i})\,dr \qquad (35)$$

при $n=\left[\frac{N+1}{2}\right]-2=\left[\frac{N-3}{2}\right]$.

2. Прежде всего поставим перед собой вопрос, нельзя ли найти такую функцию $w(r_{PQ})$, коэффициентом Фурье которой служило бы выражение в фигурных скобках в формулах (34) и (35).

Оказывается, такая функция существует и имеет следующий вид:

$$w(r)=\begin{cases}\dfrac{\mu^{\frac{N}{2}}\cdot J_{\frac{N}{2}}(\mu R)}{(2\pi R)^{\frac{N}{2}}}+\dfrac{\mu^{\frac{N}{2}}}{(2\pi R)^{\frac{N}{2}}}\displaystyle\sum_{k=1}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]}\mu^k\cdot J_{\frac{N}{2}+k}(\mu R)\cdot\left(\frac{R}{2}\right)^k\left[\sum_{l=1}^{k}\frac{(-1)^l(r^{2l}-R^{2l})}{R^{2l}\cdot l!(k-l)!}\right] & \text{при } r\leqslant R,\\ 0 & \text{при } r\geqslant R.\end{cases} \qquad (36)$$

Тот факт, что функция (36) имеет в качестве своего коэффициента Фурье указанное выражение в фигурных скобках, для удобства изложения мы выделим в отдельную лемму и докажем эту лемму в § 3 в конце настоящей главы. Здесь мы изучим поведение функции (36) для больших значений μ. Поскольку для цилиндрических функций справедлива асимптотическая оценка

$$|J_\nu(\mu R)|<\frac{C_\nu}{\sqrt{\mu R}},$$

то из формулы (36) непосредственно следует, что

$$w(r)=O\left(\mu^{\frac{N-1}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]}\right). \qquad (37)$$

Далее, очевидно, что если мы введем функцию

$$F(r)=v(r)-w(r), \qquad (38)$$

где $v(r)$ — функция, определяемая формулой (31), а $w(r)$ — функция, определяемая формулой (36), то формулы (34) и (35) могут быть переписаны в виде:

$$F_i=u_i(P)\cdot\left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]}\cdot J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]}(\mu R)\cdot J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]}(R\sqrt{\lambda_i})+$$

$$+u_i(P)\frac{\mu^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-3}{2}\right]}}{(\lambda_i)^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]}}\cdot\int_0^R J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+3}{2}\right]}(\mu r)\cdot J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]}(r\sqrt{\lambda_i})\,dr, \qquad (39)$$

$$F_i = -u_i(P) \cdot \left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]} J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]}(\mu R) \cdot J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]}(R\sqrt{\lambda_i}) +$$

$$+ u_i(P) \frac{\mu^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]}}{(\sqrt{\lambda_i})^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-3}{2}\right]}} \cdot \int_0^R J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]}(\mu r) \cdot J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-3}{2}\right]}(r\sqrt{\lambda_i})\, dr. \quad (40)$$

3. Для того чтобы выделить из коэффициента Фурье F_i его главную часть, мы точно так же, как и в работе (5), осуществим переход к несобственным интегралам, т. е. представим интегралы, стоящие в правых частях формул (39) и (40), в виде:

$$\int_0^R = \int_0^\infty - \int_R^\infty. \quad (41)$$

При этом мы можем воспользоваться известным [см. (10), стр. 153] значением интеграла:

$$\int_0^\infty J_\nu(\mu r) \cdot J_\nu(r\sqrt{\lambda_i})dr = \begin{cases} \dfrac{(\sqrt{\lambda_i})^{\nu-1}}{\mu^\nu} & \text{при } \sqrt{\lambda_i} < \mu, \\ 0 & \text{при } \sqrt{\lambda_i} > \mu \end{cases} \quad (42)$$

(случай равенства $\mu = \sqrt{\lambda_i}$ мы без ограничения общности можем исключить).

В результате указанного преобразования формулы (39) и (40) принимают следующий вид:

$$F_i = \delta_i \cdot u_i(P) + u_i(P)\left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]} \cdot J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]}(\mu R) \cdot J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]}(R\sqrt{\lambda_i}) -$$

$$- u_i(P) \frac{\mu^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+3}{2}\right]}}{(\sqrt{\lambda_i})^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]}} \int_R^\infty J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+3}{2}\right]}(\mu r) \cdot J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]}(r\sqrt{\lambda_i})\, dr, \quad (43)$$

$$F_i = \delta_i u_i(P) - u_i(P) \cdot \left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]} \cdot J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]}(\mu R) \cdot J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]}(R\sqrt{\lambda_i}) -$$

$$- u_i(P) \frac{\mu^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]}}{(\sqrt{\lambda_i})^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-3}{2}\right]}} \cdot \int_R^\infty J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]}(\mu r) \cdot J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-3}{2}\right]}(r\sqrt{\lambda_i})\, dr. \quad (44)$$

Здесь через δ_i обозначена постоянная, равная

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \sqrt{\lambda_i} < \mu, \\ 0, & \text{если } \sqrt{\lambda_i} > \mu. \end{cases} \quad (45)$$

4. Прежде чем суммировать ряд Фурье для функции $F(r)$, оценим коэффициенты Фурье для этой функции. Для оценки коэффициентов Фурье с номером i, для которого $\sqrt{\lambda_i} \geqslant \frac{\mu}{2}$, используем формулу (43),

а для оценки коэффициентов Фурье с номером i, для которого $\sqrt{\lambda_i} < \frac{\mu}{2}$, используем формулу (44).

Начнем со случая

$$\sqrt{\lambda_i} \geqslant \frac{\mu}{2}. \tag{46}$$

Прежде всего оценим безынтегральный член в формуле (43). Для этого воспользуемся асимптотическими оценками для функций Бесселя:

$$|J_\nu(\mu r)| \leqslant \frac{C}{\sqrt{\mu r}} \tag{47}$$

(все постоянные, входящие в оценки типа (47), договоримся обозначать одной и той же буквой C). Тогда можно записать:

$$\left| \left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]} \cdot J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]}(\mu R) \cdot J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]}(R\sqrt{\lambda_i}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C^2}{R} \frac{\mu^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{\lambda_i})^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]+\frac{1}{2}}}. \tag{48}$$

Пусть δ — любое, сколь угодно малое фиксированное положительное число, не превосходящее $\frac{1}{2}$. Тогда правую часть (48) можно переписать в виде:

$$\frac{C^2}{R} \cdot \frac{\mu^{N-1+\delta}}{\lambda_i^{\frac{N}{2}+\frac{\delta}{2}}} \cdot \left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^{\left[\frac{N+1}{2}\right]-\frac{N}{2}+\frac{1}{2}-\delta} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C^2}{R} \frac{\mu^{N-1+\delta}}{\lambda_i^{\frac{N}{2}+\frac{\delta}{2}}} \cdot 2^{\left[\frac{N+1}{2}\right]-\frac{N}{2}+\frac{1}{2}-\delta} = \frac{1}{\lambda_i^{\frac{N}{2}+\frac{\delta}{2}}} O(\mu^{N-1+\delta}). \tag{49}$$

Здесь мы учитываем, что, так как $\left[\frac{N+1}{2}\right] \geqslant \frac{N}{2}$ и $\frac{1}{2} \geqslant \delta$, показатель $\left[\frac{N+1}{2}\right] - \frac{N}{2} + \frac{1}{2} - \delta$ неотрицателен, а поэтому, в силу (46),

$$\left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^{\left[\frac{N+1}{2}\right]-\frac{N}{2}+\frac{1}{2}-\delta} \leqslant 2^{\left[\frac{N+1}{2}\right]-\frac{N}{2}+\frac{1}{2}-\delta}.$$

Исходя из (48) и (49), мы получаем для безынтегрального члена в формуле (43) следующую оценку:

$$u_i(P) \cdot \left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]} \cdot J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]}(\mu R) \cdot J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]}(R\sqrt{\lambda_i}) =$$

$$= \frac{u_i(P)}{\lambda_i^{\frac{N}{2}+\frac{\delta}{2}}} O(\mu^{N-1+\delta}). \tag{50}$$

Оценка (50) справедлива для любого номера i, для которого $\sqrt{\lambda_i} \geqslant \frac{\mu}{2}$.

Переходим к оценке интегрального члена в формуле (43). При $\sqrt{\lambda_i} \geqslant \frac{\mu}{2}$ имеет место следующая асимптотическая формула для произведения бесселевых функций, стоящих под знаком интеграла в формуле (43):

$$J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+3}{2}\right]}(\mu r)\cdot J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]}(r\sqrt{\lambda_i}) =$$

$$= \frac{2}{r\cdot\pi\mu^{\frac{1}{2}}\lambda^{\frac{1}{4}}}\cos\left\{\mu r - \left(\frac{N}{2}+\left[\frac{N+3}{2}\right]\right)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right\}\cdot$$

$$\cdot\cos\left\{r\sqrt{\lambda_i}-\left(\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]\right)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right\}+\frac{1}{r^2}O\left(\frac{1}{\mu^{\frac{3}{2}}\cdot\lambda_i^{\frac{1}{4}}}\right). \tag{51}$$

С помощью этой формулы мы разбиваем интеграл, стоящий в формуле (43), на сумму двух интегралов, каждый из которых оценим порознь.

Для первого из интегралов I_i получим оценку:

$$I_i = \frac{\mu^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+3}{2}\right]}}{(\sqrt{\lambda_i})^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]}}\cdot\int\limits_R^\infty O\left(\frac{1}{\mu^{\frac{3}{2}}\cdot\lambda_i^{\frac{1}{4}}}\right)\cdot\frac{dr}{r^2} = O\left(\frac{\mu^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{\lambda_i})^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]+\frac{1}{2}}}\right). \tag{52}$$

Повторяя описанный выше переход от (48) к (49), мы получим вместо (52):

$$I_i = \frac{1}{\lambda_i^{\frac{N}{2}+\frac{\delta}{2}}}\cdot O(\mu^{N-1+\delta}), \tag{53}$$

причем оценка (53) справедлива для всякого номера i, для которого

$$\sqrt{\lambda_i} \geqslant \frac{\mu}{2}.$$

Оценим второй интеграл:

$$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\mu^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+3}{2}\right]-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{\lambda_i})^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+3}{2}\right]-\frac{1}{2}}}\int\limits_R^\infty\cos\left\{\mu r-\left(\frac{N}{2}+\left[\frac{N+3}{2}\right]\right)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right\}\cdot$$

$$\cdot\cos\left\{r\sqrt{\lambda_i}-\left(\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]\right)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right\}\frac{dr}{r}.$$

Прежде всего заметим, что произведение

$$\cos\left\{\mu r-\left(\frac{N}{2}+\left[\frac{N+3}{2}\right]\right)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right\}\cdot\cos\left\{r\sqrt{\lambda_i}-\left(\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]\right)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right\}$$

с точностью до знака, которым мы пренебрегаем, равняется

$$\sin\left(\mu r-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(r\sqrt{\lambda_i}-\frac{\pi}{4}\right) \text{ при } N \text{ четном,}$$

$$\cos\left(\mu r-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(r\sqrt{\lambda_i}-\frac{\pi}{4}\right) \text{ при } N \text{ нечетном.}$$

Не ограничивая общности, рассмотрим случай четного N (случай нечетного N рассматривается совершенно аналогично). Достаточно оценить интеграл

$$\bar{I}_i = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+3}{2}\right]-\frac{1}{2}}\int\limits_R^\infty\sin\left(\mu r-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(r\sqrt{\lambda_i}-\frac{\pi}{4}\right)\frac{dr}{r}. \tag{54}$$

Интегрируя $\bar{I}_i$ два раза по частям, элементарным образом находим:

$$\bar{I}_i = O\left(\frac{\mu^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]+\frac{1}{2}}}{(\sqrt{\lambda_i})^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+3}{2}\right]+\frac{1}{2}}}\right) + \frac{\mu^2}{\lambda_i}\bar{I}_i.$$

Из последней формулы, учитывая (46), непосредственно получаем, что для $\sqrt{\lambda_i} \neq \mu$ (например, можно потребовать, чтобы $|\sqrt{\lambda_i} - \mu| \geqslant 1$) имеет место следующая оценка для $\bar{I}_i$:

$$\bar{I}_i = O\left(\frac{\mu^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{\lambda_i})^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]-\frac{1}{2}}}\right)\cdot\frac{1}{|\sqrt{\lambda_i}-\mu|}. \tag{55}$$

5. При суммировании соотношения (43) по всем номерам i, удовлетворяющим требованию $\sqrt{\lambda_i} \geqslant \frac{\mu}{2}$, оказывается удобным разбить эту сумму на две суммы, в первой из которых берутся номера, удовлетворяющие требованию

$$\sqrt{\lambda_i} > \frac{3}{2}\mu, \tag{A}$$

а вторую сумму образуют номера, удовлетворяющие требованию

$$\frac{\mu}{2} \leqslant \sqrt{\lambda_i} \leqslant \frac{3}{2}\mu \quad \text{или} \quad |\sqrt{\lambda_i}-\mu| \leqslant \frac{\mu}{2}. \tag{B}$$

Оценим отдельно коэффициенты Фурье F_i для случая (A) и для случая (B).

В случае (A) можно утверждать, что $|\sqrt{\lambda_i}-\mu| > \frac{1}{3}\sqrt{\lambda_i}$, а поэтому оценку (55) можно усилить следующим образом:

$$\bar{I}_i = O\left(\frac{\mu^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{\lambda_i})^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]+\frac{1}{2}}}\right). \tag{55'}$$

Повторяя описанный выше переход от (48) к (49), мы получим вместо (55'):

$$\bar{I}_i = \frac{1}{\lambda_i^{\frac{N}{2}+\frac{\delta}{2}}}\,O\left(\mu^{N-1+\delta}\right). \tag{56}$$

Собирая оценки (50), (53) и (56), получим, что для случая (A) коэффициент Фурье F_i, определяемый формулой (43), может быть записан в виде

$$F_i = \delta_i u_i(P) + \frac{u_i(P)}{\lambda_i^{\frac{N}{2}+\frac{\delta}{2}}}\,O\left(\mu^{N-1+\delta}\right), \tag{57}$$

где δ — сколь угодно малое фиксированное положительное число. Строго говоря, член $\delta_i u_i(P)$ в формуле (57) можно было бы и не писать, так как для случая (A) $\delta_i = 0$, как это видно из формулы (45).

Умножая обе части формулы (57) на $u_i(Q)$ и производя затем суммирование по всем i, удовлетворяющим требованию (А), получим:

$$\sum_{\sqrt{\lambda_i} > \frac{3}{2}\mu} F_i u_i(Q) = O(\mu^{N-1+\delta}) \cdot \sum_{\sqrt{\lambda_i} > \frac{3}{2}\mu} \frac{u_i(P)\, u_i(Q)}{\lambda_i^{\frac{N}{2}+\frac{\delta}{2}}}. \tag{58}$$

В силу леммы из главы 2 работы ([5]) можно утверждать, что для произвольной N-мерной области g билинейный ряд вида

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i(P)\, u_i(Q)}{\lambda_i^{\frac{N}{2}+\frac{\delta}{2}}} \quad (\delta > 0) \tag{59}$$

абсолютно и равномерно сходится в любой, строго внутренней подобласти g'. Следовательно, сумму, стоящую в правой части (58), можно мажорировать следующим образом:

$$\left| \sum_{\sqrt{\lambda_i} > \frac{3}{2}\mu} \frac{u_i(P)\, u_i(Q)}{\lambda_i^{\frac{N}{2}+\frac{\delta}{2}}} \right| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}{}' \frac{|u_i(P)\, u_i(Q)|}{\lambda_i^{\frac{N}{2}+\frac{\delta}{2}}} \leqslant M = \text{const},$$

и формула (58) принимает вид:

$$\sum_{\sqrt{\lambda_i} > \frac{3}{2}\mu} F_i u_i(Q) = O(\mu^{N-1+\delta}). \tag{60}$$

6. Переходим к рассмотрению случая (В). Напомним, что оценки (50) и (53) справедливы и для случая (В). Опираясь на указанные оценки, умножим обе части формулы (43) на $u_i(Q)$ и просуммируем по всем i, удовлетворяющим условию (В). Мы получим (с точностью до знака перед величиной $\bar{I}_i$):

$$\sum_{\frac{\mu}{2} \leqslant \sqrt{\lambda_i} \leqslant \frac{3}{2}\mu} F_i u_i(Q) = \sum_{\frac{\mu}{2} \leqslant \sqrt{\lambda_i} < \mu} u_i(P)\, u_i(Q) +$$

$$+ O(\mu^{N-1+\delta}) \cdot \sum_{\frac{\mu}{2} \leqslant \sqrt{\lambda_i} \leqslant \frac{3}{2}\mu} \frac{u_i(P)\, u_i(Q)}{\lambda_i^{\frac{N}{2}+\frac{\delta}{2}}} + \sum_{\frac{\mu}{2} \leqslant \sqrt{\lambda_i} \leqslant \frac{3}{2}\mu} \bar{I}_i \cdot u_i(P)\, u_i(Q) \tag{61}$$

(мы учли также, что, согласно (45), $\delta_i = 0$, если $\sqrt{\lambda_i} > \mu$). Исходя из абсолютной и равномерной сходимости ряда (59), точно так же, как и выше, получим, что

$$O(\mu^{N-1+\delta}) \cdot \sum_{\frac{\mu}{2} < \sqrt{\lambda_i} \leqslant \frac{3}{2}\mu} \frac{u_i(P) \cdot u_i(Q)}{\lambda_i^{\frac{N}{2}+\frac{\delta}{2}}} = O(\mu^{N-1+\delta}). \tag{62}$$

Оценим отдельно сумму

$$S = \sum_{\frac{\mu}{2} \leqslant \sqrt{\lambda_i} \leqslant \frac{3}{2}\mu} \bar{I}_i \cdot u_i(P) \cdot u_i(Q). \tag{63}$$

Наша цель — доказать, что эта сумма имеет порядок $O(\mu^{N-1+\delta})$, где δ — любое, сколь угодно малое фиксированное положительное число.

Не ограничивая общности, мы можем положить $\delta = \frac{1}{n}$, где n—любое фиксированное *целое* число.

Разобьем сумму (63) на $(n+1)$ сумм следующим образом. Нулевая сумма S_0 берется по номерам, удовлетворяющим требованию

$$|\sqrt{\lambda_i} - \mu| \leq 1, \tag{64}$$

k-я сумма S_k $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ берется по номерам, удовлетворяющим требованию

$$\mu^{\delta(k-1)} < |\sqrt{\lambda_i} - \mu| \leq \mu^{\delta \cdot k}, \tag{65}$$

а последняя сумма S_n берется по номерам, удовлетворяющим требованию:

$$\mu^{\delta(n-1)} < |\sqrt{\lambda_i} - \mu| < \frac{\mu}{2}.$$

Начнем с оценки нулевой суммы:

$$S_0 = \sum_{|\sqrt{\lambda_i} - \mu| \leq 1} \bar{I}_i u_i(P) u_i(Q). \tag{66}$$

Покажем, что величина $\bar{I}_i$ остается равномерно ограниченной для всех i, удовлетворяющих требованию (64). Из формулы (54) видно, что достаточно отдельно оценить множитель

$$\left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^{\frac{N}{2} + \left[\frac{N+3}{2}\right] - \frac{1}{2}}$$

и интеграл

$$\int_R^\infty \sin\left(\mu r - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(r\sqrt{\lambda_i} - \frac{\pi}{4}\right) \frac{dr}{r}.$$

Имеем:

$$\left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^{\frac{N}{2} + \left[\frac{N+3}{2}\right] - \frac{1}{2}} \leq 2^{\frac{N}{2} + \left[\frac{N+3}{2}\right] - \frac{1}{2}},$$

если даже $\sqrt{\lambda_i} \geq \frac{\mu}{2}$, и

$$2 \cdot \int_R^\infty \frac{\sin\left(\mu r - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(r\sqrt{\lambda_i} - \frac{\pi}{4}\right)}{r} dr =$$

$$= \int_R^\infty \frac{\sin[(\mu - \sqrt{\lambda_i}) r]}{r} dr - \int_R^\infty \frac{\cos[(\mu + \sqrt{\lambda_i}) r]}{r} dr. \tag{67}$$

Первый из интегралов, стоящих в правой части (67), равняется интегральному синусу $\mathrm{si}\,[R(\sqrt{\lambda_i} - \mu)]$, а интегральный синус, как известно, является равномерно ограниченной функцией своего аргумента.

Второй интеграл, стоящий в правой части (67), равняется интегральному косинусу $\mathrm{ci}\,[R(\sqrt{\lambda_i} + \mu)]$ и не только является равномерно ограниченной величиной, но даже имеет порядок $O\left(\frac{1}{\mu}\right)$.

Тем самым равномерная ограниченность $\bar{I}_i$ установлена:

$$\bar{I}_i \leqslant M = \text{const}. \tag{68}$$

С помощью (68) мы можем оценить сумму (66) следующим образом:

$$|S_0| \leqslant M \cdot \sum_{|\sqrt{\lambda_i}-\mu| \leqslant 1} |u_i(P)\, u_i(Q)| = O(\mu^{N-1}) \tag{69}$$

(на основании предварительной формулы (29) из § 1).

Оценим теперь любую из сумм S_k:

$$S_k = \sum \bar{I}_i u_i(P) \cdot u_i(Q),$$

где суммирование идет по номерам, удовлетворяющим требованию (65). Поскольку $|\sqrt{\lambda_i} - \mu| \geqslant \mu^{\delta(k-1)}$, оценку (55) можно усилить:

$$\bar{I}_i = O\left(\frac{1}{\mu^{\delta(k-1)}}\right) \tag{70}$$

$\left(\text{при этом мы учитываем, что } \left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]-\frac{1}{2}} \leqslant 2^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N+1}{2}\right]+\frac{1}{2}}\right)$.

Опираясь на (70), мажорируем сумму S_k следующим образом:

$$|S_k| = \left|O\left(\frac{1}{\mu^{\delta(k-1)}}\right)\right| \cdot \sum_{|\sqrt{\lambda_i}-\mu| \leqslant \mu^{\delta k}} |u_i(P) \cdot u_i(Q)|. \tag{71}$$

Для оценки правой части (71) рассмотрим предварительную формулу (30) из § 1 при $\rho = \mu^{\delta k}$:

$$|S_k| = O\left(\frac{1}{\mu^{\delta(k-1)}}\right) \cdot \mu^{\delta k} \cdot O(\mu^{N-1}) = O(\mu^{N-1+\delta}). \tag{72}$$

Исходя из оценок (69) и (72), получаем для всей суммы (63) оценку:

$$S = \sum_{k=0}^{n} S_k = \sum_{\frac{\mu}{2} \leqslant \sqrt{\lambda_i} \leqslant \frac{3}{2}\mu} \bar{I}_i \cdot u_i(P) \cdot u_i(Q) = O(\mu^{N-1+\delta}). \tag{73}$$

Оценка O-членов в правой части (73) зависит от номера n, т. е. в конечном счете от малости $\delta = \frac{1}{n}$, но для любого сколь угодно малого фиксированного $\delta > 0$ справедлива формула (73). Внося формулы (62) и (73) в правую часть (61), будем иметь:

$$\sum_{\frac{\mu}{2} \leqslant \sqrt{\lambda_i} \leqslant \frac{3}{2}\mu} F_i u_i(Q) - \sum_{\frac{\mu}{2} \leqslant \sqrt{\lambda_i} < \mu} u_i(P)\, u_i(Q) + O(\mu^{N-1+\delta}). \tag{74}$$

7. Нам остается оценить коэффициенты Фурье F_i и просуммировать ряд Фурье только для номеров i, удовлетворяющих требованию

$$\sqrt{\lambda_i} < \frac{\mu}{2}. \tag{75}$$

Для этого, как уже было отмечено выше, будем исходить из формулы (44).

Поскольку конечное число номеров i не влияет на оценки, мы будем оценивать только коэффициенты Фурье F_i для достаточно высоких номеров i. Например, можно потребовать, чтобы $R\sqrt{\lambda_i} \geqslant 1$. Тогда мы вправе воспользоваться асимптотическими оценками для функций Бесселя типа (47). С помощью этих оценок безынтегральный член в формуле (44) мажорируется следующим образом:

$$\left|\left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]} J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]}(\mu R)\cdot J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]}(R\sqrt{\lambda_i})\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C^2}{R}\,\frac{\mu^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{\lambda_i})^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]+\frac{1}{2}}} = \frac{C^2}{R}\cdot\frac{\mu^{N-1+\delta}}{\lambda_i^{\frac{N}{2}+\frac{\delta}{2}}}\left(\frac{\sqrt{\lambda_i}}{\mu}\right)^{\frac{N-1}{2}-\left[\frac{N-1}{2}\right]+\delta}. \tag{76}$$

Здесь δ — любое фиксированное сколь угодно малое положительное число. Так как показатель $\left(\frac{N-1}{2}-\left[\frac{N-1}{2}\right]+\delta\right)$ положителен, то, исходя из формулы (75), получим:

$$\left(\frac{\lambda_i}{\mu}\right)^{\frac{N-1}{2}-\left[\frac{N-1}{2}\right]+\delta} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{N-1}{2}-\left[\frac{N-1}{2}\right]+\delta}. \tag{77}$$

Из формул (76) и (77) следует оценка:

$$u_i(P)\left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]}\cdot J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]}(\mu R)\cdot J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]}(R\sqrt{\lambda_i}) =$$

$$= \frac{u_i(P)}{\lambda_i^{\frac{N}{2}+\frac{\delta}{2}}}\cdot O(\mu^{N-1+\delta}). \tag{78}$$

Что же касается интегрального члена в формуле (44), то он оценивается точно так же, как и интегральный член в формуле (43) для случая (А), а именно, пользуясь асимптотическим представлением (напомним, что $\sqrt{\lambda_i} < \frac{\mu}{2}$ и для определенности будем считать N четным), справедливым с точностью до знака,

$$J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]}(\mu r)\cdot J_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-3}{2}\right]}(r\sqrt{\lambda_i}) =$$

$$= \frac{\pm 2}{r\pi\mu^{\frac{1}{2}}\lambda_i^{\frac{1}{4}}}\sin\left(\mu r-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(r\sqrt{\lambda_i}-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{r^2}O\left(\frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}}\lambda_i^{\frac{3}{4}}}\right),$$

мы разбиваем интеграл, стоящий в формуле (44), на сумму двух:

$$I_i = \frac{\mu^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]}}{(\sqrt{\lambda_i})^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-3}{2}\right]}}\cdot\int\limits_R^\infty O\left(\frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}}\lambda_i^{\frac{3}{4}}}\right)\frac{dr}{r^2} =$$

$$= O\left(\frac{\mu^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{\lambda_i})^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]+\frac{1}{2}}}\right) = \frac{1}{\lambda_i^{\frac{N}{2}+\frac{\delta}{2}}}O(\mu^{N-1+\delta}), \tag{79}$$

$$\overline{I}_i = \mp \frac{2}{\pi}\left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]-\frac{1}{2}} \int\limits_R^\infty \sin\left(\mu r - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(r\sqrt{\lambda_i} - \frac{\pi}{4}\right)\frac{dr}{r}. \qquad (80)$$

Двукратным интегрированием $\overline{I}_i$ по частям находим:

$$\overline{I}_i = O\left(\frac{\mu^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-3}{2}\right]-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{\lambda_i})^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]-\frac{1}{2}}}\right) + \frac{\lambda_i}{\mu^2}\overline{I}_i,$$

откуда получаем для $\overline{I}_i$ следующую оценку:

$$\overline{I}_i = \frac{1}{\lambda_i^{\frac{N}{2}+\frac{\delta}{2}}} \cdot O(\mu^{N-1+\delta}). \qquad (81)$$

С помощью оценок (78), (79) и (81) представим правую часть формулы (44) в виде:

$$F_i = \delta_i u_i(P) + \frac{u_i(P)}{\lambda_i^{\frac{N}{2}+\frac{\delta}{2}}} \cdot O(\mu^{N-1+\delta}). \qquad (82)$$

Умножая обе части (82) на $u_i(Q)$ и производя суммирование по всем номерам i, удовлетворяющим требованию $\sqrt{\lambda_i} < \frac{\mu}{2}$, найдем:

$$\sum_{\sqrt{\lambda_i}<\frac{\mu}{2}} F_i u_i(Q) = \sum_{\sqrt{\lambda_i}<\frac{\mu}{2}} u_i(P)u_i(Q) + O(\mu^{N-1+\delta}) \sum_{\sqrt{\lambda_i}<\frac{\mu}{2}} \frac{u_i(P)u_i(Q)}{\lambda_i^{\frac{N}{2}+\frac{\delta}{2}}}. \qquad (83)$$

Опираясь на абсолютную и равномерную сходимость ряда (59), преобразуем правую часть формулы (83) к виду:

$$\sum_{\sqrt{\lambda_i}<\frac{\mu}{2}} F_i u_i(Q) = \sum_{\sqrt{\lambda_i}<\frac{\mu}{2}} u_i(P)u_i(Q) + O(\mu^{N-1+\delta}). \qquad (84)$$

8. Сложим почленно формулы (60), (74) и (84). В результате получим:

$$\sum_{i=1}^{\infty} F_i \cdot u_i(Q) = \sum_{\sqrt{\lambda_i}<\mu} u_i(P)u_i(Q) + O(\mu^{N-1+\delta}). \qquad (85)$$

Слева в (85) стоит полный ряд Фурье для функции $F(r)$, причем сходимость этого ряда следует из оценки правой части. Таким образом, левую часть можно заменить самой функцией $F(r)$. Из формул (37) и (38) заключаем, что функция $F(r)$ имеет вид:

$$F(r) = v(r) + O\left(\mu^{\frac{N-1}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]}\right) = \frac{\mu^{\frac{N}{2}}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \cdot \frac{J_{\frac{N}{2}}(\mu r)}{r^{\frac{N}{2}}} + O(\mu^{N-1}). \qquad (86)$$

Мы учли при этом, что $\left[\frac{N-1}{2}\right] \leqslant \frac{N-1}{2}$, и воспользовались тем, что

при $r \geqslant R$ функция

$$\left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^{\frac{N}{2}} \cdot \frac{J_{\frac{N}{2}}(\mu r)}{r^{\frac{N}{2}}},$$

в силу асимптотики бесселевой функции, представляет собой величину порядка $O\left(\mu^{\frac{N-1}{2}}\right)$, т. е. порядка заведомо более низкого, чем $O(\mu^{N-1})$.

Подставляя (86) в (85), окончательно получим:

$$\sum_{\sqrt{\lambda_i}<\mu} u_i(P) \cdot u_i(Q) = \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^{\frac{N}{2}} \cdot \frac{J_{\frac{N}{2}}(\mu r)}{r^{\frac{N}{2}}} + O(\mu^{N-1+\delta}). \tag{3}$$

Тем самым доказательство основной асимптотической формулы (3) завершено.

Замечание 1. Можно считать, что суммирование в формуле (3) происходит по номерам, удовлетворяющим требованию $\sqrt{\lambda_i} \leqslant \mu$, а не только $\sqrt{\lambda_i} < \mu$. В самом деле, допустим, что суммирование в формуле (3) идет по номерам, удовлетворяющим строгому неравенству $\sqrt{\lambda_i} < \mu$, для чего заведомо достаточно требования $\sqrt{\lambda_i} \leqslant \mu - 1$. Тогда, почленно сложив формулу (3) с предварительной формулой (4), установленной в § 1, мы получим:

$$\sum_{\sqrt{\lambda_i}\leqslant\mu} u_i(P)\, u_i(Q) = \frac{\mu^{\frac{N}{2}}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \cdot \frac{J_{\frac{N}{2}}(\mu r)}{r^{\frac{N}{2}}} + O(\mu^{N-1+\delta}), \tag{87}$$

т. е. нестрогое неравенство $\sqrt{\lambda_i} \leqslant \mu$ оправдано.

Замечание 2. По схеме, совершенно аналогичной той, которая изложена в § 2, может быть установлена несколько более общая асимптотическая формула:

$$\frac{1}{\Gamma(S+1)} \sum_{\sqrt{\lambda_i}\leqslant\mu} u_i(P)\, u_i(Q) \left(1 - \frac{\lambda_i}{\mu^2}\right)^S =$$

$$= \frac{2^S \mu^{\frac{N}{2}-S}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \cdot \frac{J_{\frac{N}{2}+S}(\mu r_{PQ})}{r_{PQ}^{\frac{N}{2}+S}} + \begin{cases} O(\mu^{N-1-S+\delta}) & \text{при } S \leqslant N, \\ O\left(\frac{1}{\mu^{1-\delta}}\right) & \text{при } S \geqslant N. \end{cases} \tag{88}$$

(Здесь, как и выше, δ — любое, сколь угодно малое фиксированное положительное число.)

§ 3. Доказательство вспомогательной леммы

ЛЕММА. *Функция $w(r)$, определяемая формулой* (36), *имеет в качестве своего коэффициента Фурье выражение вида:*

$$w_i = u_i(P) \cdot \sum_{k=0}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} \left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^{\frac{N}{2}+k} \cdot J_{\frac{N}{2}+k}(\mu R) \cdot J_{\frac{N}{2}+k}(R\sqrt{\lambda_i}). \tag{89}$$

Доказательство. Поставим перед собой цель — найти такую функцию $w^{[n]}(r)$, коэффициент Фурье которой равен

$$w_i^{[n]} = \frac{u_i(P)}{(\sqrt{\lambda_i})^{\frac{N}{2}+n}} J_{\frac{N}{2}+n}(R\sqrt{\lambda_i}) \quad \left(n = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{N-1}{2}\right]\right). \tag{90}$$

Если $n = 0$, то легко видеть, что функция $w^{[0]}(r)$ имеет вид

$$w^{[0]}(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\pi R)^{\frac{N}{2}}} & \text{при } r \leqslant R, \\ 0 & \text{при } r > 0. \end{cases} \tag{91}$$

В самом деле, вычисляя коэффициент Фурье функции (91) непосредственным интегрированием и используя теорему о среднем значении [см. (6)], получим:

$$w_i^{[0]} = \int_0^R \left(\iint_\Omega \ldots \int u_i(r, \Omega)\, d\Omega\right) w^{[0]}(r)\, r^{N-1}\, dr =$$

$$= (2\pi)^{\frac{N}{2}} \cdot \frac{u_i(P)}{\lambda_i^{\frac{N-2}{4}}} \cdot \int_0^R w^{[0]}(r) \cdot r^{\frac{N}{2}} \cdot J_{\frac{N}{2}-1}(r\sqrt{\lambda_i})\, dr =$$

$$= \frac{1}{R^{\frac{N}{2}}} \cdot \frac{u_i(P)}{\lambda_i^{\frac{N-2}{4}}} \cdot \int_0^R r^{\frac{N}{2}} \cdot J_{\frac{N}{2}-1}(r\sqrt{\lambda_i})\, dr = \frac{u_i(P)}{(\sqrt{\lambda_i})^{\frac{N}{2}}} J_{\frac{N}{2}}(R\sqrt{\lambda_i}),$$

что совпадает с формулой (90) при $n = 0$.

Таким образом, нужно рассмотреть только случай $1 \leqslant n \leqslant \left[\frac{N-1}{2}\right]$.

Пусть n — любое число из указанного интервала. Построим функцию $w^{[n]}(r)$ следующего вида:

$$w^{[n]}(r) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k (r^{2k} - R^{2k}) & \text{при } r \leqslant R, \\ 0 & \text{при } r \geqslant R. \end{cases} \tag{92}$$

Такая функция изучена в § 2 главы 1 работы ([5]). Там же доказано, что коэффициент Фурье функции (92) имеет вид [см. формулу (24) главы 1 работы ([5])]:

$$w_i^{[n]} = (2\pi R)^{\frac{N}{2}} \cdot u_i(P) \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{J_{\frac{N}{2}+k}(R\sqrt{\lambda_i})}{(\sqrt{\lambda_i})^{\frac{N}{2}+k}} (-1)^k \cdot$$
$$\cdot \sum_{l=k}^{n} 2l \cdot (2l-2) \ldots [2l - 2(k-1)] \cdot a_l \cdot R^{2l-k}. \tag{93}$$

Выберем постоянные $a_1, a_2, \ldots, a_n$ так, чтобы выражение (93) совпадало с выражением (90). Для этого достаточно, чтобы удовлетворялась следующая система уравнений:

$$\begin{gathered} \sum_{l=k}^{n} 2l \cdot (2l-2) \ldots [2l - 2(k-1)] \cdot a_l \cdot R^{2l} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \\ 2^n \cdot n! \cdot a_n \cdot R^{2n} = \frac{(-1)^n}{(2\pi R)^{\frac{N}{2}}} \cdot R^n. \end{gathered} \tag{94}$$

Нам нужно доказать, что система (94) имеет решение, и притом единственное. Заметим, что левая часть системы (94) совпадает с левой частью системы (26) главы 1 работы ([5]), т. е. определители этих систем тождественно равны. Но в работе ([5]) доказано, что система (26) имеет решение, и притом единственное, т. е. определитель ее отличен от нуля. Этим утверждение доказано.

Для нахождения решения системы (94) запишем матрицу этой системы, опуская постоянные множители столбцов, соответственно равные $R^2, R^4, \ldots, R^{2n}$, и постоянный множитель правой части, равный $\frac{(-1)^n}{(2\pi R)^{\frac{N}{2}}} \cdot R^n$:

$$\left\| \begin{array}{cccc} 2 & 4 \ \ldots & 2n & 0 \\ 2(2-2) & 4(4-2) \ldots & 2n(2n-2) & 0 \\ 2(2-2)(2-4) & 4(4-2)(4-4) \ldots & 2n(2n-2)(2n-4) & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ \ldots & 2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2 & 1 \end{array} \right\| . \quad (95)$$

Мы видим, что первая строка нерасширенной матрицы (95) (без столбца правых частей) представляет собой полином 1-го порядка x (без свободного члена), взятый в точках $2, 4, \ldots, 2n$, вторая строка нерасширенной матрицы (95) представляет собой полином 2-го порядка $x(x-2)$ (без свободного члена), взятый *в тех же самых точках*, и т. д., последняя n-я строка нерасширенной матрицы (95) представляет собой полином n-го порядка $x(x-2)(x-4)\cdots[x-2(n-1)]$ (без свободного члена), взятый *в тех же самых точках.*

Рассмотрим следующий полином n-го порядка, не содержащий свободного члена:

$$x(x-2)\cdots[x-2(k-1)]\cdot[x-2(k+1)]\cdots(x-2n). \quad (96)$$

Как и всякий полином n-го порядка, не содержащий свободного члена, полином (96) представим в виде некоторой линейной комбинации данных полиномов 1-го, 2-го, ..., n-го порядка, не содержащих свободного члена:

$$x,\ x(x-2),\ \ldots,\ x(x-2)(x-4)\cdots[x-2(n-1)].$$

Заметим, что в указанной линейной комбинации коэффициент перед последним полиномом $x(x-2)(x-4)\cdots[x-2(n-1)]$ равен единице, так как максимальная степень x, т. е. x^n, входит с коэффициентом, равным единице, и в этот последний полином, и в полином (96). Но отсюда следует, что если мы составим уравнение, коэффициенты которого соответственно равны значениям полинома (96) в точках $2, 4, \ldots, 2n$, а правая часть совпадает с правой частью последнего уравнения системы (94), то полученное уравнение будет являться следствием системы (94). В построенном уравнении от нуля будет отличен только коэффициент при a_k, так как числа $2, 4, \ldots, 2n$ — все, кроме $2k$, являются корнями полинома (96).

Итак, мы получаем уравнение, являющееся следствием системы (94):

$$2k(2k-2)\cdots 4\cdot 2(-2)(-4)\cdots[2(k-n)]\cdot R^{2k}\cdot a_k=\frac{(-1)^n}{(2\pi R)^{\frac{N}{2}}}\cdot R^n.$$

Отсюда находим неизвестное a_k:

$$a_k=\frac{\left(\frac{R}{2}\right)^n}{(2\pi R)^{\frac{N}{2}}}\cdot\frac{(-1)^k}{R^{2k}\cdot k!\,(n-k)!}. \tag{97}$$

Таким образом, функция $w^{[n]}(r)$ найдена и имеет вид:

$$w^{[n]}(r)=\begin{cases}\dfrac{\left(\frac{R}{2}\right)^n}{(2\pi R)^{\frac{N}{2}}}\cdot\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k\cdot(r^{2k}-R^{2k})}{R^{2k}\cdot k!\,(n-k)!} & \text{при } r\leqslant R,\\ 0 & \text{при } r\geqslant R\end{cases} \tag{98}$$

$$\left(n=1,2,\ldots,\left[\frac{N-1}{2}\right]\right).$$

Из выражения (36) видно, что функция (36) представляет собой линейную комбинацию функций (91) и (98) с постоянными коэффициентами, соответственно равными

$$\mu^{\frac{N}{2}+n}\cdot J_{\frac{N}{2}+n}(\mu R)\quad\left(n=0,1,\ldots,\left[\frac{N-1}{2}\right]\right).$$

Таким образом, коэффициент Фурье функции (36) равен соответствующей линейной комбинации выражений (90). Беря эту линейную комбинацию, мы получаем для коэффициента Фурье функции (36) выражение (89).

Лемма доказана.

ГЛАВА 2

Доказательство разложимости функций, обладающих особенностями типа $\frac{1}{r^\alpha}$ $(0<\alpha<1)$ или $\log r$

Целью настоящей главы является доказательство следующей теоремы:

ТЕОРЕМА. *Если функция N переменных задана в произвольной N-мерной области g, обладает во внутренней точке P этой области особенностью вида $\frac{1}{r_{PQ}^{\alpha}}$ $(0<\alpha<1)$ или $\log r_{PQ}$ и после выделения указанной особенности удовлетворяет обычным условиям разложимости *, то эта функция может быть разложена в ряд Фурье по собственным функциям области g, причем указанный ряд сходится при суммировании в порядке возрастания собственных чисел равномерно в любой строго внутренней подобласти g', из которой удалена произвольная сколь угодно малая окрестность особой точки.*

* Под термином «обычные условия разложимости» следует понимать условия разложимости в ряд, *условно* сходящийся при суммировании в порядке возрастания собственных чисел. Эти условия значительно слабее, чем обычные условия разложимости в *абсолютно* и равномерно сходящийся ряд [см. ([7]) и ([8])].

Еще раз подчеркнем, что изучаемая нами сходимость ряда Фурье является, вообще говоря, *условной:* в работе ([1]) показано, что нельзя ожидать абсолютной сходимости ряда Фурье для функции, обладающей указанной выше особенностью, *ни в одной внутренней точке области*, даже если эта функция после выделения особенности является сколь угодно гладкой.

Один из методов доказательства сформулированной теоремы указан нами в работе ([11]). Он опирается на преобразование Абеля и на асимптотическую формулу для собственных значений, установленную Р. Курантом. Недостатком этого метода является то, что асимптотическая формула Р. Куранта (а следовательно, и указанный метод) предполагает, что граница области g удовлетворяет некоторым (хотя и не очень высоким) требованиям гладкости. Чтобы устранить этот недостаток, мы предлагаем в настоящей работе другой метод доказательства сформулированной выше теоремы. Этот новый метод совершенно не связан ни с какими предположениями относительно границы области и пригоден для произвольной N-мерной области g, для которой разрешима задача на собственные значения.

Прежде всего установим одно важное вспомогательное тождество, которое мы неоднократно будем применять не только в настоящей, но и в следующих работах.

§ 1. Вывод вспомогательного тождества

Пусть точка P, как и выше, принадлежит произвольной, строго внутренней подобласти g' основной N-мерной области g, а Q — любая точка области g. Будем обозначать через K_i N-мерный шар радиуса $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$ с центром в точке P, а через C_i — «кольцо» с центром в точке P и с радиусами, соответственно равными $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$ и $\frac{1}{\sqrt{\lambda_{i+1}}}$, т. е.

$$C_i = K_i - K_{i+1}.$$

Тогда имеет место следующее тождество для собственных функций уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ (независимо от вида краевого условия):

$$(2\pi)^{\frac{N}{2}} \cdot C_N \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i(P) \cdot u_i(Q)}{\lambda_i^{\frac{N}{2}-S}} = \sum_{k=1}^{n-1} \iint\limits_{C_k} \cdots \int \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^S \cdot u_i(\sigma)\, u_i(Q) \right) d\sigma +$$

$$+ \iint\limits_{K_n} \cdots \int \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^S u_i(\sigma) \cdot u_i(Q) \right) d\sigma \quad (C_N = J_{\frac{N}{2}}(1)). \tag{99}$$

В этом тождестве n обозначает какой угодно номер, а S — любое действительное число. Тождество (99) имеет смысл, если шар K_1 радиуса $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ с центром в точке P целиком лежит в области g.

Если P принадлежит произвольной, строго внутренней подобласти g', то последнее требование для шара K_1 может быть и не выполнено, но оно заведомо выполнено для шара K_i, начиная с некоторого i, так как

при $i \to \infty$ радиус $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$ шара K_i неограниченно убывает. Поэтому мы можем отбросить конечное число самых маленьких собственных значений и соответствующих им собственных функций и утверждать справедливость тождества (99) для оставшихся собственных функций. При этом для простоты мы сохраняем нумерацию, начиная с единицы, подразумевая под λ_1 самое маленькое из оставленных собственных значений.

Итак, тождество (99) справедливо для всех собственных функций, за исключением, быть может, конечного числа этих функций.

Вывод тождества (99). Предполагая, что $r \leqslant R$, где R — минимум расстояния точки P от границы области g, запишем теорему о среднем значении [см. (6)]:

$$2(\sqrt{\pi})^N \cdot u_i(P) \cdot \frac{J_{\frac{N}{2}-1}(r\sqrt{\lambda_i})}{\left(\frac{r\sqrt{\lambda_i}}{2}\right)^{\frac{N}{2}-1}} = \iint\limits_{\Omega} \cdots \int u_i(r, \Omega)\, d\Omega. \tag{6}$$

Напомним, что $\iint\limits_{\Omega}\cdots\int$ обозначает интеграл по всем «углам» на поверхности N-мерной сферы. Умножим обе части (6) на r^{N-1} и проинтегрируем по r от 0 до R. Тогда, очевидно, в правой части (6) мы получим интеграл по N-мерному шару радиуса R, который мы обозначим через K_R^P, а интеграл в левой части легко вычислить:

$$(2\pi)^{\frac{N}{2}} \cdot \frac{u_i(P)}{\lambda_i^{\frac{N}{4}-\frac{1}{2}}} \cdot \int_0^R r^{\frac{N}{2}} \cdot J_{\frac{N}{2}-1}(r\sqrt{\lambda_i})\, dr = \iint\limits_{K_R^P} \cdots \int u_i(\sigma)\, d\sigma. \tag{100}$$

Вычисляя интеграл, стоящий в левой части (100), найдем:

$$(2\pi)^{\frac{N}{2}} \cdot \frac{u_i(P)}{\lambda_i^{\frac{N}{4}}} \cdot J_{\frac{N}{2}}(R\sqrt{\lambda_i}) \cdot R^{\frac{N}{2}} = \iint\limits_{K_R^P} \cdots \int u_i(\sigma)\, d\sigma. \tag{101}$$

Положим $R = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$ в обеих частях равенства (101). Это можно сделать для всякого номера i, для которого $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$ не превосходит минимума расстояния точки P от границы области g (конечное число номеров i, не удовлетворяющих этому требованию, мы отбросим, сохраняя для простоты нумерацию от $i = 1$). В результате получим:

$$(2\pi)^{\frac{N}{2}} \cdot C_N \cdot \frac{u_i(P)}{\lambda_i^{\frac{N}{2}}} = \iint\limits_{K_i} \cdots \int u_i(\sigma)\, d\sigma. \tag{102}$$

Здесь C_N обозначает постоянную, равную $J_{\frac{N}{2}}(1)$, а K_i — N-мерный шар радиуса $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$ с центром в точке P.

Замечание 3. Постоянная C_N заведомо положительна. Более того, легко оценить эту постоянную снизу, беря два члена степенного ряда для функции Бесселя $J_{\frac{N}{2}}(1)$:

$$C_N = J_{\frac{N}{2}}(1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{N}{2}+2\nu}}{\nu!\,\Gamma\left(\frac{N}{2}+\nu+1\right)} > \frac{1}{2^{\frac{N}{2}}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)} -$$

$$- \frac{1}{2^{\frac{N}{2}+2}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+2\right)} = \frac{1}{2^{\frac{N}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)} \cdot \frac{2N+3}{2N+4}.$$

Итак,

$$C_N > \frac{1}{2^{\frac{N}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)} \cdot \frac{2N+3}{2N+4}.$$

Умножив обе части (102) на $u_i(Q) \cdot \lambda_i^S$, где S — любое действительное число, получим:

$$(2\pi)^{\frac{N}{2}} \cdot C_N \frac{u_i(P) \cdot u_i(Q)}{\lambda_i^{\frac{N}{2}-S}} = \iint_{K_i} \cdots \int \lambda_i^S \cdot u_i(\sigma)\, u_i(Q)\, d\sigma. \tag{103}$$

Далее, просуммируем обе части тождества (103) по всем i от $i=1$ до $i=n$, где n — любой наперед заданный номер:

$$(2\pi)^{\frac{N}{2}} \cdot C_N \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i(P) \cdot u_i(Q)}{\lambda_i^{\frac{N}{2}-S}} = \sum_{i=1}^{n} \iint_{K_i} \cdots \int \lambda_i^S \cdot u_i(\sigma)\, u_i(Q)\, d\sigma. \tag{104}$$

Остается преобразовать сумму интегралов, стоящую в правой части (104). С этой целью перейдем от шаров K_i к «кольцам». Будем обозначать через C_i кольцо, равное разности шаров:

$$C_i = K_i - K_{i+1}.$$

Таким образом, кольцо C_i имеет радиусы, соответственно равные $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$ и $\frac{1}{\sqrt{\lambda_{i+1}}}$. Тогда, очевидно, для шара K_i справедливо представление

$$K_i = \sum_{k=i}^{n-1} C_k + K_n. \tag{105}$$

С помощью этого представления правую часть формулы (104) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} \cdot \sum_{k=i}^{n-1} \iint_{C_k} \cdots \int \lambda_i^S u_i(\sigma)\, u_i(Q)\, d\sigma + \iint_{K_n} \cdots \int \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^S \cdot u_i(\sigma)\, u_i(Q)\, d\sigma. \tag{106}$$

Изменим порядок суммирования относительно i и k. Тогда выражение (106) примет вид:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \iint_{C_k} \cdots \int \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^S \cdot u_i(\sigma) \cdot u_i(Q)\right) d\sigma + \iint_{K_n} \cdots \int \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^S \cdot u_i(\sigma)\, u_i(Q)\, d\sigma. \tag{107}$$

Заменяя правую часть (104) выражением (107), мы получим искомое тождество (99).

§ 2. Доказательство теоремы разложимости

Достаточно доказать разложимость частной функции, обладающей особенностью типа $\frac{1}{r_P^\alpha}$ $(0<\alpha<1)$ или $\log r_{PQ}$. В качестве такой функции естественно взять изученное в работе (5) ядро дробного порядка $K_{\frac{N}{2}-\frac{\alpha}{2}}(P, Q)$, имеющее своим рядом Фурье билинейный ряд вида:

$$\sum_{i=}^{\infty} \frac{u_i(P)\,u_i(Q)}{\lambda_i^{\frac{N}{2}-\frac{\alpha}{2}}}. \tag{108}$$

В работе (5) доказано, что для произвольной N-мерной области g указанное ядро имеет при $\alpha=0$ особенность типа $\log r_{PQ}$, а при $0<\alpha<N$ — особенность типа $\frac{1}{r_{PQ}^\alpha}$.

Таким образом, нам достаточно доказать, что билинейный ряд (108) для любого α из интервала $0\leqslant\alpha<1$ сходится при суммировании в порядке возрастания собственных чисел равномерно в любой, строго внутренней подобласти g', из которой удалена сколь угодно малая окрестность особой точки (т. е. расстояние $\rho(P, Q)\geqslant\varepsilon$, где ε — сколь угодно малое фиксированное положительное число).

Поскольку $\alpha<1$, найдется такое *положительное* число δ, что $\alpha=1-4\delta$, и ряд (108) можно переписать в виде:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i(P)\,u_i(Q)}{\lambda_i^{\frac{N-1}{2}+2\delta}} \quad (\delta>0) \tag{109}$$

или в виде

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\{\frac{u_i(P)\,u_i(Q)}{\lambda_i^{\frac{N-1}{2}+\delta}}\right\}\left\{\frac{1}{\lambda_i^\delta}\right\}.$$

Так как при суммировании в порядке возрастания собственных чисел последовательность $\left\{\frac{1}{\lambda_i^\delta}\right\}$ монотонно стремится к нулю, то для доказательства равномерной сходимости ряда (109), в силу признака Абеля, достаточно установить, что ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i(P)\,u_i(Q)}{\lambda_i^{\frac{N-1}{2}+\delta}} \quad (\delta>0) \tag{110}$$

обладает равномерно ограниченным семейством частных сумм (в любой, строго внутренней подобласти g' при $\rho(P, Q)\geqslant\varepsilon$). С этой целью воспользуемся тождеством (99), в котором положим $S=\frac{1}{2}-\delta$:

$$(2\pi)^{\frac{N}{2}}\cdot C_N\cdot\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i(P)\,u_i(Q)}{\lambda_i^{\frac{N-1}{2}+\delta}} \equiv \sum_{k=1}^{n-1}\iint_{C_k}\cdots\int\Big(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{1}{2}-\delta}\cdot u_i(\sigma)\cdot u_i(Q)\Big)\,d\sigma+$$

$$+\iint_{K_n}\cdots\int\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{\frac{1}{2}-\delta}\cdot u_i(\sigma)\,u_i(Q)\Big)\,d\sigma. \tag{111}$$

Заметим, что конечное число номеров, которые, быть может, придется отбросить для законности использования тождества (99), не влияет ни на сходимость ряда (109), ни на ограниченность частных сумм ряда (110).

Левая часть (111) с точностью до постоянного множителя $(2\pi)^{\frac{N}{2}} \cdot C_N$ представляет собой n-ю частную сумму S_n ряда (110). Наша задача — доказать, что все S_n ограничены одной и той же постоянной, не зависящей от номера n (в любой, строго внутренней подобласти g' при $\rho(P, Q) \geqslant \varepsilon$). Перепишем (111) в виде:

$$(2\pi)^{\frac{N}{2}} \cdot C_N \cdot S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \iint\limits_{C_k} \cdots \int \lambda_k^{\frac{1}{2}-\delta} \left[\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right)^{\frac{1}{2}-\delta} u_i(\sigma) \cdot u_i(Q)\right] d\sigma +$$

$$+ \iint\limits_{K_n} \cdots \int \lambda_n^{\frac{1}{2}-\delta} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{2}-\delta} u_i(\sigma) \cdot u_i(Q)\right] d\sigma \qquad (112)$$

и оценим выражения, заключенные в квадратные скобки. Рассмотрим основную асимптотическую формулу (87), установленную в первой главе и справедливую в любой, строго внутренней подобласти g'. При $\rho(P, Q) \geqslant \varepsilon$ главный член формулы (87), в силу асимптотической оценки для функции Бесселя, имеет порядок $O(\mu^{\frac{N}{2}-\frac{1}{2}})$, т. е. более низкий порядок, чем добавочный член. Таким образом, из формулы (87) заключаем, что при $\rho(P, Q) \geqslant \varepsilon$ в любой, строго внутренней подобласти g' справедлива оценка:

$$\sum_{\sqrt{\lambda_i} \leqslant \mu} u_i(P) \cdot u_i(Q) = O(\mu^{N-1+\delta}), \qquad (113)$$

где δ — любое положительное число. Мы положим это число равным тому самому δ, которое фигурирует в формулах (109)—(112). Если суммирование ведется в порядке возрастания собственных чисел, то формулу (113) можно переписать в виде:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(P) u_i(Q) = \sum_{\sqrt{\lambda_i} \leqslant \sqrt{\lambda_n}} u_i(P) u_i(Q) = O\left(\lambda_n^{\frac{N-1}{2}+\frac{\delta}{2}}\right), \qquad (114)$$

причем суммирование в (114) не обязательно вести, начиная с первого, самого маленького собственного значения; можно отбросить конечное число (следующих друг за другом) собственных значений и при этом оценка, стоящая в правой части, останется в силе. В самом деле, пусть k — любое число $< n$ и нам требуется доказать, что

$$\sum_{i=k}^{n} u_i(P) \cdot u_i(Q) = O\left(\lambda_n^{\frac{N-1}{2}+\frac{\delta}{2}}\right). \qquad (115)$$

Для этого достаточно взять разность формул

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(P) \cdot u_i(Q) = O\left(\lambda_n^{\frac{N-1}{2}+\frac{\delta}{2}}\right)$$

и

$$\sum_{i=1}^{k} u_i(P)\cdot u_i(Q) = O\left(\lambda_k^{\frac{N-1}{2}+\frac{\delta}{2}}\right) = O\left(\lambda_n^{\frac{N-1}{2}+\frac{\delta}{2}}\right).$$

Последнее замечание дает право применять формулу (114) для оценок в тождестве (112).

Для оценки выражений, заключенных в квадратные скобки в правой части (112), рассмотрим тождество Абеля [см. ([12]), стр. 9], справедливое для любых v_i и w_i и для любого номера k:

$$\sum_{i=1}^{k} v_i w_i = \sum_{l=1}^{k-1}\left(\sum_{i=1}^{l} v_i\right)(w_l - w_{l+1}) + \left(w_k \sum_{i=1}^{k} v_i\right). \tag{116}$$

Мы положим

$$v_i = u_i(\sigma)\cdot u_i(Q), \quad w_i = \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right)^{\frac{1}{2}-\delta}. \tag{117}$$

Для доказательства законности применения формулы (114) покажем, что точка σ, по которой идет интегрирование в правой части (112), не выходит за пределы некоторой строго внутренней подобласти и, кроме того, $\rho(\sigma, Q) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $\rho(P, Q) \geqslant \varepsilon$, и пусть P лежит в строго внутренней подобласти g' такой, что минимум расстояния между границами g' и g превосходит ε, Отбросим конечное число самых маленьких собственных значений так чтобы первое из оставленных собственных значений (в наших обозначениях λ_1) удовлетворяло требованию $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Так как $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ является радиусом наибольшего из шаров K_1, то при этом заведомо $\rho(\sigma, Q) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$ и σ принадлежит внутренней подобласти g'' такой, что минимум расстояния между границами g'' и g превосходит $\frac{\varepsilon}{2}$.

Таким образом, применение формулы (114) оправдано, и мы, используя эту формулу, получим:

$$\sum_{i=1}^{l} v_i = \sum_{i=1}^{l} u_i(\sigma)\, u_i(Q) = O\left(\lambda_l^{\frac{N-1}{2}+\frac{\delta}{2}}\right). \tag{118}$$

Пользуясь (116), (117) и (118), оценим выражение, заключенное в квадратные скобки в формуле (112):

$$|I_k| = \left|\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right)^{\frac{1}{2}-\delta} u_i(\sigma)\cdot u_i(Q)\right| = \left|\sum_{l=1}^{k-1} O\left(\lambda_l^{\frac{N-1}{2}+\frac{\delta}{2}}\right)\left[\left(\frac{\lambda_l}{\lambda_k}\right)^{\frac{1}{2}-\delta} - \left(\frac{\lambda_{l+1}}{\lambda_k}\right)^{\frac{1}{2}-\delta}\right] + \right.$$
$$\left. + O\left(\lambda_k^{\frac{N-1}{2}+\frac{\delta}{2}}\right)\right| \leqslant \left|O\left(\lambda_k^{\frac{N-1}{2}+\frac{\delta}{2}}\right)\right|\cdot\left\{\sum_{l=1}^{k-1}\frac{\lambda_{l+1}^{\frac{1}{2}-\delta} - \lambda_l^{\frac{1}{2}-\delta}}{\lambda_k^{\frac{1}{2}-\delta}} + 1\right\} \tag{119}$$

(не ограничивая общности, считаем, что $\delta < \frac{1}{2}$). Обозначим через C постоянную, ограничивающую рост O-членов, стоящих в правой части

(119), и произведем суммирование в фигурных скобках:

$$|I_k| \leqslant C\lambda_k^{\frac{N-1}{2}+\frac{\delta}{2}}\left\{2-\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)^{\frac{1}{2}-\delta}\right\} \leqslant 2\cdot C\cdot\lambda_k^{\frac{N-1}{2}+\frac{\delta}{2}}. \qquad (120)$$

Используя оценку (120), мы мажорируем правую часть формулы (112) следующим образом:

$$(2\pi)^{\frac{N}{2}}\cdot C_N\cdot|S_n| \leqslant 2C\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\iint\limits_{C_k}\cdots\int\lambda_k^{\frac{N}{2}-\frac{\delta}{2}}\,d\sigma+\iint\limits_{K_n}\cdots\int\lambda_n^{\frac{N}{2}-\frac{\delta}{2}}\,d\sigma\right\}. \qquad (121)$$

Наша цель будет достигнута, если мы докажем, что выражение в фигурных скобках формулы (121) ограничено одной и той же постоянной, независимо от номера n.

Сумму интегралов, стоящих в фигурных скобках, мы можем представить как один интеграл по шару K_1 следующего вида:

$$\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\iint\limits_{C_k}\cdots\int\lambda_k^{\frac{N}{2}-\frac{\delta}{2}}\,d\sigma+\iint\limits_{K_n}\cdots\int\lambda_n^{\frac{N}{2}-\frac{\delta}{2}}\,d\sigma\right\}=\iint\limits_{K_1}\cdots\int f(P,\sigma)\,d\sigma, \qquad (122)$$

где положительная функция $f(P, \sigma)$ определяется формулой:

$$f_n(P,\sigma)=\begin{cases}\lambda_k^{\frac{N}{2}-\frac{\delta}{2}}, & \text{если } \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\geqslant r_{P\sigma}>\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+1}}} \quad (k=1,2,\ldots,n-1),\\ \lambda_n^{\frac{N}{2}-\frac{\delta}{2}}, & \text{если } r_{P\sigma}\leqslant\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}.\end{cases}$$

Совершенно ясно, что мажорантой для $f_n(P, \sigma)$ служит функция $\frac{1}{r_{P\delta}^{N-\delta}}$. В самом деле,

$$\frac{1}{r_{P\sigma}^{N-\delta}}\geqslant\lambda_k^{\frac{N}{2}-\frac{\delta}{2}}, \text{ если } \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\geqslant r_{P\sigma}>\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+1}}} \quad (k=1,2,\ldots,n-1),$$

$$\frac{1}{r_{P\sigma}^{N-\sigma}}\geqslant\lambda_n^{\frac{N}{2}-\frac{\delta}{2}}, \text{ если } \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\geqslant r_{P\sigma}.$$

Таким образом, всюду

$$f_n(P,\sigma)\leqslant\frac{1}{r_{P\sigma}^{N-\sigma}}.$$

Поэтому интеграл, стоящий в правой части (122), мы можем мажорировать так:

$$\iint\limits_{K_1}\cdots\int f_n(P,\sigma)\,d\sigma\leqslant\iint\limits_{K_1}\cdots\int\frac{d\sigma}{r_{P\delta}^{N-\sigma}}=\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}}\left(\iint\limits_{\Omega}\cdots\int d\Omega\right)\frac{1}{r^{N-\delta}}r^{N-1}\cdot dr=$$

$$=\omega_N\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}}\frac{dr}{r^{1-\delta}}=\frac{\omega_N}{\delta(\sqrt{\lambda_1})^{\delta}} \qquad (123)$$

(здесь $\omega_N=\iint\limits_{\Omega}\cdots\int d\Omega=\frac{2(\sqrt{\pi})^N}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}$ обозначает площадь поверхности

N-мерной сферы единичного радиуса). Сопоставляя (121), (122) и (123), находим, что

$$S_n \leqslant \frac{2 \cdot C \cdot \omega_N}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \cdot C_N \cdot \delta \cdot (\sqrt{\lambda_1})^{\delta}}.$$

Тем самым установлена равномерная ограниченность частных сумм S_n и доказательство теоремы разложимости завершено.

Замечание 4. Тот факт, что ряд (108) для любого $\alpha < 1$ сходится именно к ядру $K_{\frac{N}{2}-\frac{\alpha}{2}}(P, Q)$, вытекает из полноты системы собственных функций. В самом деле, обозначим сумму ряда (108) через $\omega(P, Q)$. Так как ядро $K_{\frac{N}{2}-\frac{\alpha}{2}}(P, Q)$ для любой внутренней точки P обладает по Q интегрируемым квадратом [см. ([5])], а система собственных функций полна, то, по теореме Фишера—Рисса, функции $K_{\frac{N}{2}-\frac{\alpha}{2}}(P, Q)$ и $\omega(P, Q)$ должны совпадать в классе функций, обладающих интегрируемым квадратом, т. е.

$$\iint_g \cdots \int \left[K_{\frac{N}{2}-\frac{\alpha}{2}}(P, Q) - \omega(P, Q)\right]^2 dQ = 0. \tag{124}$$

Так как в произвольной, строго внутренней подобласти g' при $\rho(P, Q) \geqslant \varepsilon$ обе функции непрерывны (ядро $K_{\frac{N}{2}-\frac{\alpha}{2}}(P, Q)$ — в силу его представления, согласно работе ([5]), а $\omega(P, Q)$ — как сумма равномерно сходящегося ряда), то из (124) заключаем, что в указанной подобласти при $\rho(P, Q) \geqslant \varepsilon$

$$\omega(P, Q) \equiv K_{\frac{N}{2}-\frac{\alpha}{2}}(P, Q).$$

Таким образом, для любого α из интервала $0 \leqslant \alpha < 1$ и для любых внутренних точек P и Q таких, что $P \neq Q$, справедлива билинейная формула:

$$K_{\frac{N}{2}-\frac{\alpha}{2}}(P, Q) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i(P)\, u_i(Q)}{\lambda_i^{\frac{N}{2}-\frac{\alpha}{2}}}, \tag{125}$$

где суммирование идет в порядке возрастания собственных чисел.

Полученный результат заменяет известную теорему Мерсера, которая в данном случае перестает действовать, вследствие наличия особенности у ядра $K_{\frac{N}{2}-\frac{\alpha}{2}}(P, Q)$.

Следствие. *При $\alpha = 0$, $N = 2$ мы получаем следующее представление для функции Грина уравнения Лапласа в произвольной двумерной области:*

$$K_1(P, Q) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i(P)\, u_i(Q)}{\lambda_i}. \tag{126}$$

Формула (126) справедлива для любых внутренних точек P и Q таких, что $P \neq Q$, причем суммирование производится в порядке возрастания собственных чисел.

Само собой разумеется, что в произвольной, строго внутренней подобласти g', из которой удалена сколь угодно малая окрестность особой точки, ряды (125) и (126) сходятся равномерно.

Поступило
22. XII. 1956

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ильин В. А., Представление функции источника для прямоугольника в виде билинейного ряда по собственным функциям, Доклады Ак. наук СССР, 74, № 3 (1950), 413—416.

[2] Левитан Б. М., О разложении по собственным функциям оператора Лапласа, Матем. сборн., 35 (77): 2 (1954), 267—316.

[3] Бабенко К. И., Об асимптотическом поведении собственных функций дифференциальных операторов, Доклад на III Всесоюзном математическом съезде в 1956 г.

Avakumović V. G., Über die Eigenfunktionen der Schwingungsgleichung, Publ. de l' Inst. Math. Beograd, 4, (1952), 95—96.

[5] Ильин В. А., Ядра дробного порядка, Матем. сборн., 41 (83) : 4 (1957), 459—480.

[6] Ильин В. А., Теорема о разложимости кусочно-гладкой функции в ряд по собственным функциям произвольной двумерной области, Доклады Ак. наук СССР, 109, № 3 (1956), 442—445.

[7] Ильин В. А., О равномерной сходимости разложений по собственным функциям при суммировании в порядке возрастания собственных чисел, Доклады Ак. наук СССР, 114, № 4 (1957), 698—701.

[8] Ильин В. А., О равномерной сходимости разложений по собственным функциям нечетномерных областей, Доклады Ак. наук СССР, 115, № 4 (1957), 650—652.

[9] Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики. т. 2, М.— Л., 1951.

[10] Кузьмин Р. О., Бесселевы функции, М.— Л., 1935.

[11] Ильин В. А., Доказательство разложимости функции, обладающей особенностью, в ряд по собственным функциям, Доклады Ак. наук СССР. 109, № 1 (1956), 21—24.

[12] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.— Л., 1939.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 81—116

А. В. ЕФИМОВ

О ПРИБЛИЖЕНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ФУРЬЕ И СУММАМИ ФЕЙЕРА

(*Представлено академиком* М. А. Лаврентьевым)

В работе дается выражение главного члена уклонения функции от ее сумм Фейера и сумм Фурье, а также устанавливаются асимптотически точные равенства для верхних граней этих уклонений, распространенных на классы H_2^α и $W^r H_2^\alpha$.

§ 1. Введение

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторый класс непрерывных функций и U_n — линейный оператор (метод приближения), приводящий в соответствие каждой функции $f(x) \in \mathfrak{M}$ некоторый полином порядка n, значение которого в точке x обозначим через $U_n(f, x)$.

Мы рассматриваем две задачи:

I. Найти главный член уклонения функции $f(x) \in \mathfrak{M}$ от $U_n(f, x)$ с равномерным относительно всего класса $\mathfrak{M}$ остаточным членом, т. е. получить представление:

$$f(x) - U_n(f, x) = A_{U_n}(f, x) + O(B_{U_n}(\mathfrak{M}))^*.$$

II. Исследовать поведение верхней грани

$$\mathscr{E}_{U_n}(\mathfrak{M}) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \| f(x) - U_n(f, x) \| = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \max_x | f(x) - U_n(f, x) |,$$

т. е. верхней грани уклонений функции $f(x) \in \mathfrak{M}$ от $U_n(f, x)$, распространенной на весь класс $\mathfrak{M}$.

В ряде случаев решение задачи I позволяет найти асимптотически точное решение задачи II. Действительно, мы имеем:

$$\mathscr{E}_{U_n}(\mathfrak{M}) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \| A_{U_n}(f, x) \| + O(B_{U_n}(\mathfrak{M})).^*$$

Поэтому если

$$B_{U_n}(\mathfrak{M}) = o(\mathscr{E}_{U_n}(\mathfrak{M})),$$

то

$$\mathscr{E}_{U_n}(\mathfrak{M}) \approx \sup_{f \in \mathfrak{M}} \| A_{U_n}(f, x) \|.$$

Первая задача впервые была решена Е. В. Вороновской ([4]) для приближения дважды дифференцируемых функций полиномами С. Н. Бернштейна. Порядок же убывания $\mathscr{E}_{U_n}(\mathfrak{M})$ для некоторых важных классов

* Здесь $A_{U_n}(f, x)$ таково, что существуют функция $f^*(x) \in \mathfrak{M}$ и точка x_0 такие, что $B_{U_n}(\mathfrak{M}) = o(A_{U_n}(f^*, x_0))$.

функций и методов приближения был дан Лебегом ([13]), Джексоном ([5]), ([6]) и С. Н. Бернштейном ([2]).

Метод получения асимптотически точного равенства из выражения главного члена уклонения применялся С. Б. Стечкиным ([23]) для приближений некоторых классов аналитических функций суммами Тейлора.

Определим некоторые классы непрерывных функций периода 2π. Мы скажем, что функция $f(x)$ принадлежит классу MW^r, если ее производная $f^{(r)}(x)$ в смысле Вейля порядка $r \geqslant 0$ $(f^{(0)}(x) \equiv f(x))$ удовлетворяет условию $|f^{(r)}(x)| \leqslant M$. Если $f^{(r)}(x)$ при любых x и h удовлетворяет условию

$$|f^{(r)}(x+h) - f^{r}(x)| \leqslant M|h|^{\alpha}, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \tag{1.1}$$

то будем говорить, что $f(x) \in MW^rH_1^\alpha$ при $r > 0$ и $f(x) \in MH_1^\alpha$ при $r = 0$. Если же $f^{(r)}(x)$ при любых x и h удовлетворяет условию

$$|f^{(r)}(x+h) - 2f^{(r)}(x) + f^{(r)}(x-h)| \leqslant M|h|^{\alpha}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{1.2}$$

то будем говорить, что $f(x) \in MW^rH_2^\alpha$ при $r > 0$ и $f(x) \in MH_2^\alpha$ при $r = 0$.

Классы MH_2^α введены А. Зигмундом ([11]). Сопряженные классы обозначим соответственно через $M\overline{W}^r$, $M\overline{W^rH_1^\alpha}$, $M\overline{H}_1^\alpha$, $M\overline{W^rH_2^\alpha}$, $M\overline{H}_2^\alpha$.

Далее, С. Б. Стечкиным ([22]) для $r > 0$ введены классы MW_β^r, а именно $f(x) \in MW_\beta^r$, если $f(x)$ представляется в форме:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{k^r}\,dt,$$

где $|\varphi(x)| \leqslant M$ и $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\,dx = 0$. Аналогичным образом, для $r \geqslant 0$ введем классы $MW_\beta^rH_2^\alpha$. Именно, будем говорить, что $f(x) \in MW_\beta^rH_2^\alpha$, если $f(x)$ представляется в форме:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k^r}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t)\cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dt, \tag{1.3}$$

где $\varphi(x) \in MH_2^\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ и $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\,dx = 0$. При $\beta = r$ и $\beta = r + 1$ получаем соответственно классы $MW^rH_2^\alpha$ и $M\overline{W^rH_2^\alpha}$.

Определим также некоторые классы непериодических функций. Если $f(x)$ непрерывна при $x \in [a, b]$ и при любых $x \pm h \in [a, b]$ удовлетворяет условию

$$|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leqslant M|h|^{\alpha}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1,$$

то будем говорить, что $f(x) \in MH_2^\alpha(a, b)$. При $a = -\infty$, $b = +\infty$ будем говорить, что $f(x) \in MH_2^\alpha(\infty)$.

Вместо $1 \cdot W^r$, $1 \cdot W^rH_1^\alpha, \ldots$ условимся писать соответственно W^r, $W^rH_1^\alpha, \ldots$.

Мы будем рассматривать следующие методы приближения: частичные суммы Фурье, т. е.

$$U_n(f, x) = S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

и суммы Фейера, т. е.

$$U_n(f, x) = \sigma_n(f, x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f, x).$$

Задача I для классов H_1^1 и H_2^1 и приближений суммами Фейера решена М. Заманским ([10]), который показал, что если $f(x) \in H_2^1$, то

$$f(x) - \sigma_{n-1}(f, x) = -\frac{1}{2\pi} \int_a^\infty \frac{f\left(x + \frac{2t}{n}\right) - 2f(x) + f\left(x - \frac{2t}{n}\right)}{t^2}\, dt + O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad (1.4)$$

где $a > 0$ — любая постоянная.

Порядок величин $\mathscr{E}_{\sigma_n}(H_1^\alpha)$ был дан С. Н. Бернштейном ([2]), порядок величин $\mathscr{E}_{\sigma_n}(\overline{H}_1^\alpha)$ $(0 < \alpha < 1)$ вытекает из результатов И. И. Привалова ([18]) и С. Н. Бернштейна ([2]), а порядок $\mathscr{E}_{\sigma_n}(\overline{H}_1^1)$ был дан Алексичем ([1]).

С. М. Никольский в работах ([15]), ([16]) доказал, что при $0 < \alpha < 1$

$$\mathscr{E}_{\sigma_n}(H_1^\alpha) = \frac{2\Gamma(\alpha)}{\pi(1-\alpha)} \sin\frac{\alpha\pi}{2} \cdot \frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Первый асимптотически точный результат для $\mathscr{E}_{S_n}(\mathfrak{M})$ принадлежит А. Н. Колмогорову ([12]), который рассмотрел $\mathscr{E}_{S_n}(W^r)$ для целых $r > 0$. В. Т. Пинкевич ([17]) рассмотрел $\mathscr{E}_{S_n}(W^r)$ для любых $r > 0$. Наиболее общий результат в этом направлении принадлежит С. М. Никольскому ([14]), ([16]), который доказал, что для любых $r \geqslant 0$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$

$$\left.\begin{array}{l} \mathscr{E}_{S_n}(W^r H_1^\alpha) \\ \mathscr{E}_{S_n}(\overline{W^r H_1^\alpha}) \end{array}\right\} = \frac{C_1(\alpha)}{\pi} \frac{\ln n}{n^{r+\alpha}} + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right), \qquad (1.5)$$

где

$$C_1(\alpha) = \sup_{f \in H_1^\alpha} |a_1(f)| = \sup_{f \in H_1^\alpha} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x\, dx \right| = \frac{2^{1+\alpha}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin t\, dt.$$

Мы решаем задачи I и II для приближения функций классов H_2^α и $W^r H_2^\alpha$ суммами Фейера и суммами Фурье. Основные результаты этой работы доложены автором на заседании Московского математического общества [см. ([9])].

В § 2 излагаются свойства функций классов H_2^α.

В § 3 рассматривается задача I для приближений суммами Фейера. Мы показываем, что если

$$\omega_2(h, f) = \sup_{|\delta| \leqslant h} \| f(x+\delta) - 2f(x) + f(x-\delta) \| =$$
$$= \sup_{|\delta| \leqslant h} \max_x | f(x+\delta) - 2f(x) + f(x-\delta) |$$

есть модуль гладкости функции $f(x)$ периода 2π, то

$$f(x)-\sigma_{n-1}(f,x)=-\frac{1}{2\pi}\int_a^\infty \frac{f\left(x+\frac{2t}{n}\right)-2f(x)+f\left(x-\frac{2t}{n}\right)}{t^2}\,dt+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n},f\right)\right),$$

где $a>0$ — любая постоянная (теорема 1). При $\omega_2(h,f)=h$ получается результат М. Заманского (1.4).

В § 4 дается решение задач I и II для приближения функций, сопряженных к функциям $f(x)\in H_2^1$, суммами Фейера. Доказывается, что если $f(x)\in H_2^1$ и $\bar f(x)$ — сопряженная функция, то

$$\bar f(x)-\bar\sigma_{n-1}(f,x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{a_1}\left[f\left(x+\frac{t}{n}\right)-f\left(x-\frac{t}{n}\right)\right]\frac{\sin t}{t^2}\,dt+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

где a_1 — наименьший корень уравнения $\int_0^u \frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}$ (теорема 2), и справедливо асимптотическое равенство

$$\mathscr{E}_{\sigma_n}(\bar H_2^1)=\sup_{f\in H_2^1}\|\bar f(x)-\bar\sigma_n(f,x)\|=\frac{1}{2\ln(\sqrt{2}+1)}\frac{\ln n}{n}+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

(теорема 3).

Обозначим через $R_n(f,x)$ остаток ряда Фурье для функции $f(x)\in W_\beta^r H_2^\alpha$ при $r>0$, а через $r_{n,\beta}(\varphi,x)$ — остаток ряда Фурье для функции $f(x)\in W_\beta^0 H_2^\alpha$, т. е.

$$r_{n,\beta}(\varphi,x)=\cos\frac{\beta\pi}{2}[\varphi(x)-S_n(\varphi,x)]+\sin\frac{\beta\pi}{2}[\bar\varphi(x)-\bar S_n(\varphi,x)]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt,$$

где $S_n(\varphi,x)$ и $\bar S_n(\varphi,x)$ — частичные суммы соответственно ряда Фурье функции $\varphi(x)$ и сопряженного ряда [см. (1.3)].

В § 5 на основе результатов §§ 3 и 4 решается задача I для приближения функций класса $W_\beta^r H_2^\alpha$ суммами Фурье. Доказывается, что если $f(x)\in W_\beta^r H_2^\alpha$, то для любых $r>0$ и $0<\alpha\leqslant 1$

$$R_n(f,x)=\frac{1}{(n+1)^r}r_{n,\beta}(\varphi,x)+O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right)$$

(теорема 4). Полагая здесь $\beta=r$ и $\beta=r+1$, получаем решение задачи I для приближения функций классов $W^r H_2^\alpha$ и $\overline{W^r H_2^\alpha}$ суммами Фурье.

В § 6 дается решение задач I и II для приближения функций класса $W_\beta^0 H_2^\alpha$ суммами Фурье и решение задачи II для приближения функций класса $W_\beta^r H_2^\alpha$ $(r>0)$ суммами Фурье. Доказывается, что если $f(x)\in W_\beta^0 H_2^\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$, то

$$r_{n,\beta}(\varphi,x)=\frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3}\frac{1}{k^2}\left\{\int_0^{2k\pi}\left[\varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{t}{n}+\frac{5-\beta}{2n}\pi\right)\right]\cos t\,dt-\right.$$

$$-\int_{-2k\pi}^{0}\left[\varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{t}{n}-\frac{3+\beta}{2n}\pi\right)\right]\text{co } t\,dt\Big\}+O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$$

(теорема 5).

Положим

$$C_2(\alpha)=\sup_{f\in H_2^{\alpha}}|a_1(f)|=\sup_{f\in H_2^{\alpha}}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos x\,dx\right|.$$

Некоторые оценки величины $C_2(1)$ даны автором в работе (7). Мы показываем, что справедливы асимптотические равенства:

$$\mathcal{E}_{S_n}(W_{\beta}^{0}H_2^{\alpha})=\frac{C_2(\alpha)}{\pi}\cdot\frac{\ln n}{n^{\alpha}}+O\left(\frac{\ln\ln n}{n^{\alpha}}\right),\quad 0<\alpha\leqslant 1$$

(теорема 6), и

$$\mathcal{E}_{S_n}(W_{\beta}^{r}H_2^{\alpha})=\frac{C_2(\alpha)}{\pi}\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}+O\left(\frac{\ln\ln n}{n^{r+\alpha}}\right),\quad r>0,\quad 0<\alpha\leqslant 1$$

(теорема 7). Полагая здесь $\beta=r$ и $\beta=r+1$, получаем решение задач I и II для приближения функций классов H_2^{α} и $\overline{H}_2^{\alpha}$ суммами Фурье и решение задачи II для приближения функций классов $W^rH_2^{\alpha}$ и $\overline{W^rH_2^{\alpha}}$ суммами Фурье.

Метод доказательства теорем 5 и 6 отличен от метода доказательства С. М. Никольского равенств (1.5). С. М. Никольский опирался, в частности, на тот факт, что если непрерывная функция $f(x)$ на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$ удовлетворяет условию

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant|h|^{\alpha}$$

и имеет максимум в точке $x=c$, то тогда и на всем отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ удовлетворяет тому же условию. Функции же классов $H_2^1(a, c)$ и $H_2^1(c, b)$ таким свойством могут и не обладать. Более того, существуют непрерывные на $[a, b]$ функции такие, что

$$|\Delta_h^2 f(x)|=|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|\leqslant|h|$$

при $x\pm h\in[a, c]$ и при $x\pm h\in[c, b]$, имеющие максимум в точке $x=c$ для которых $|h|^{-1}|\Delta_h^2 f(x)|\to\infty$ при $h\to 0$. Мы будем существенно опираться на тот факт, что верхняя грань

$$\sup_{f\in H_2^{\alpha}(0,2k\pi)}\left|\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2k\pi}f(x)\cos x\,dx\right|$$

при $k\to\infty$ для непериодических функций асимптотически равна верхней грани

$$\sup_{f\in H_2^{\alpha}}\left|\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2k\pi}f(x)\cos x\,dx\right|$$

уже по функциям, имеющим период 2π, причем функция, дающая асимптотическое равенство, одна и та же для всех k (лемма 2, § 2). Кроме

того, мы будем пользоваться тем свойством функций класса $H_2^\alpha(a, b)$, что прибавление линейной функции не выводит функцию из этого класса.

Заметим, что наш метод доказательства позволяет получить и равенства С. М. Никольского (1.5). Для этого нужно использовать тот факт, что если $f(x) \in MH_1^\alpha$, то $f(x) \in 2MH_2^\alpha$, а так как оценка остаточных членов равномерна относительно всех функций класса H_2^α $(0<\alpha\leqslant 1)$, то теорема 5 верна и для функций класса H_1^α. Отсюда, если учесть, что верхняя грань первого коэффициента Фурье, распространенная на класс H_1^α, т. е. $C_1(\alpha)$, совпадает с верхней гранью коэффициента Фурье по непериодическим функциям, удовлетворяющим условию Липшица, мы получаем асимптотическое равенство (1.5).

Выражаю глубокую благодарность С. Б. Стечкину за постановку задачи и ценные советы и указания, которыми я воспользовался при написании настоящей работы.

§ 2. Леммы о функциях классов H_2^α

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые свойства функций классов H_2^α и $H_2^\alpha(a, b)$ при $0<\alpha\leqslant 1$.

А. Ф. Тиман [24] доказал, что если $f(x) \in MH_2^\alpha(a, b)$ и $f(a) = f(b)=0$, то

$$\max_x |f(x)| \leqslant \frac{b-a}{3} M. \tag{2.1}$$

Г. Н. Сакович [19] показал, что если $f(x) \in MH_2^\alpha(a, b)$ и $f(a)=f(b)=0$, то для всех $0<\alpha\leqslant 1$

$$\max_x |f(x)| \leqslant C(b-a)^\alpha M, \tag{2.2}$$

где

$$C = \frac{1}{2(2^\alpha-1)}.$$

Известно, что в неравенствах (2.1) и (2.2) константа неточная [см. [24] и [19]].

Положим

$$\Delta_t^2 f(x) = f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)$$

и докажем следующую лемму.

ЛЕММА 1. *Пусть* n — *целое*, $f(x) \in MH_2^\alpha$, $f\left(x+\frac{2\pi}{n}\right) = f(x)$ *и* $\int\limits_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} f(x)\,dx = 0$. *Тогда*

$$\max_x |f(x)| \leqslant \frac{M\pi^\alpha}{2(1+\alpha)n^\alpha}.$$

Доказательство. Так как

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} f(x\pm t)\,dt = 0 \text{ и } f(x) = \frac{n}{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} f(x)\,dt,$$

то

$$f(x) = -\frac{n}{4\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \Delta_t^2 f(x)\,dt = -\frac{n}{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} \Delta_t^2 f(x)\,dt$$

и, следовательно,

$$|f(x)| \leqslant \frac{n}{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} |\Delta_t^2 f(x)|\,dt \leqslant \frac{n}{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} Mt^\alpha dt = \frac{M\pi^\alpha}{2(1+\alpha)n^\alpha}.$$

Лемма установлена.

При $\alpha = 1$ этот результат получен А. Ф. Тиманом ([25]). В этом случае константа является точной.

А. Зигмунд ([11]) показал, что если $f(x) \in H_2^\alpha$, то

$$\omega(h, f) = \sup_{|t| \leqslant h} \| f(x+t) - f(x) \| = \begin{cases} O(h^\alpha), & \text{если } 0 < \alpha < 1, \quad (2.3) \\ O\left(h \ln \frac{1}{h}\right), & \text{если } \alpha = 1 \quad (2.4) \end{cases}$$

[см. также Ф. И. Харшиладзе ([27])].

А. Ф. Тиманом ([24]) доказано, что если $f(x) \in H_2^1(a, b)$ и $f(a) = f(b) = 0$, то

$$\omega(h, f) \leqslant \frac{1}{2\ln 2} h \ln \frac{b-a}{h} + Ch, \tag{2.5}$$

где C — некоторая постоянная, не зависящая от функции $f(x)$. Константа $\frac{1}{2\ln 2}$ точная. Из неравенства (2.5) непосредственно вытекает, что если $f(x) \in H_2^1(0, d)$ и $f(0) = f(d) = 0$, то

$$\omega(h, f) = O\left(h \ln \frac{d}{h}\right). \tag{2.6}$$

Автором [см. ([8])] установлено, что если $f(x)$ — периодическая функция и $f(x) \in H_2^1$, то

$$\omega(h) = \sup_{f \in H_2^1} \omega(h, f) = \frac{1}{2\ln(\sqrt{2}+1)} h \ln \frac{1}{h} + O(h), \tag{2.7}$$

причем функцией, дающей асимптотическое равенство при $h \to 0$, будет функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\ln(\sqrt{2}+1)} x \ln \frac{\pi}{|x|} \text{ при } -\pi \leqslant x \leqslant \pi, \qquad \varphi(x+2\pi) = \varphi(x), \tag{2.8}$$

принадлежащая классу H_2^1 и не зависящая от h.

Далее, Г. Н. Сакович ([19]) доказал, что если $f(x) \in H_2^\alpha(0, 1)$ и $f(0) = f(1) = 0$, то для $0 < \alpha < 1$ и $h < 1$

$$\omega(h, f) \leqslant \frac{h^\alpha - h}{2(2^{1-\alpha} - 1)} + Ah, \tag{2.9}$$

где A не зависит от f и от α. Но, по формуле Коши, для всех $0 < \alpha < 1$ и $0 < h < 1$ имеем:

$$\frac{h^\alpha - h^1}{2^{1-\alpha} - 2^{1-\xi}} = \frac{h^\xi \ln h}{-2^{1-\xi} \ln 2} = \frac{h^\xi \ln \frac{1}{h}}{2^{1-\xi} \ln 2},$$

где $\alpha < \xi < 1$. Отсюда, так как $h^\xi < h^\alpha$ и $2^{1-\xi} > 1$, получаем:

$$\frac{h^\alpha - h}{2^{1-\alpha} - 1} < \frac{1}{\ln 2} h^\alpha \ln \frac{1}{h}.$$

Следовательно, учитывая (2.5), для любых $0 < \alpha \leqslant 1$ имеем:

$$\omega(h, f) \leqslant \frac{1}{2 \ln 2} h^\alpha \ln \frac{1}{h} + Ah^\alpha,$$

если $f(0) = f(1) = 0$. Отсюда, если $f(0) = f(d) = 0$ и $f(x) \in H_2^\alpha(0, d)$, получаем:

$$\omega(h, f) \leqslant \frac{1}{2 \ln 2} h^\alpha \ln \frac{d}{h} + Ah^\alpha = O\left(h^\alpha \ln \frac{d}{h}\right). \tag{2.10}$$

А. Ф. Тиман и В. К. Дзядык ([26]) доказали, что если $f(0) = 0$ и $f(x) \in MH_2^1(0, 1)$, то функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{для} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -f(-x) & \text{для} \ -1 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

принадлежит классу $3MH_2^1(-1,1)$, т. е. нечетное продолжение функций класса $H_2^1(a, b)$ увеличивает константу не более чем втрое. Из неравенства же Г. Н. Саковича (2.9) заключаем, что если

$$f(x) \in H_2^\alpha(0,1), \quad f(0) = f(1) = 0,$$

то для $0 < \alpha < 1$

$$f(x) \in \frac{1}{2(2^{1-\alpha} - 1)} H_1^\alpha,$$

а потому функция

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{для} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -f(-x) & \text{для} \ -1 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases} \tag{2.11'}$$

на отрезке $[-1,1]$ принадлежит классу $\frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha} - 1} H_2^\alpha(-1,1)$, так как нечетное продолжение функций класса H_1^α увеличивает константу не более чем в $2^{1-\alpha}$ раза, и справедливо включение $MH_1^\alpha \subset 2MH_2^\alpha$.

А. Зигмундом (11) установлено, что если функция $f(x) \in H_2^\alpha$, то для всех $0 < \alpha \leqslant 1$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$
$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right). \quad (2.12)$$

Докажем лемму о коэффициентах Фурье функций класса $H_2^\alpha(0,\ 2k\pi)$ и лемму о неполных коэффициентах Фурье функций класса $H_2^\alpha\ (0 < \alpha \leqslant 1)$.

ЛЕММА 2. *Пусть* $f(x) \in H_2^\alpha(0,\ 2k\pi)$. *Тогда*

$$\sup_{f \in H_2^\alpha(0,\ 2k\pi)} \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2k\pi} f(x)\cos x\,dx\right| = kC_2(\alpha) + O(\ln k).$$

Доказательство. Так как $\Delta_h^2(ax+b) = 0$, т. е. прибавление линейной функции не выводит данную функцию из класса $H_2^\alpha(0,\ 2k\pi)$, и так как $\int_0^{2k\pi}(ax+b)\cos x dx = 0$, то мы можем считать, что

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(2k\pi - \frac{3\pi}{2}\right) = 0.$$

Тогда из условий

$$\left|\Delta_x^2 f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant x^\alpha, \quad \left|\Delta_x^2 f\left(2k\pi - \frac{3\pi}{2}\right)\right| \leqslant x^\alpha$$

и

$$f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = O\left(x^\alpha \ln\frac{k}{x}\right), \quad f\left(2k\pi - \frac{3\pi}{2} - x\right) = O\left(x^\alpha \ln\frac{k}{x}\right)$$

получаем, что

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = O\left(x^\alpha \ln\frac{k}{x}\right) \text{ и } f\left(2k\pi - \frac{3\pi}{2} + x\right) = O\left(x^\alpha \ln\frac{k}{x}\right).$$

Следовательно, имеем:

$$\int_0^{2k\pi} f(x)\cos x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2k\pi - \frac{3\pi}{2}} f(x)\cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x dx + \int_{2k\pi - \frac{3\pi}{2}}^{2k\pi} f(x)\cos x dx =$$

$$= \int_0^{2(k-1)\pi} f\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\sin t dt + O(\ln k) = \int_0^{2(k-1)\pi} \varphi(t)\sin t dt + O(\ln k),$$

где $\varphi(t) = f\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$, $\varphi(t) \in H_2^\alpha(0, 2(k-1)\pi)$ и $\varphi(0) = \varphi(2(k-1)\pi) = 0$.

Рассмотрим функцию

$$\psi(t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(t)-\varphi(2\pi-t)+\varphi(2\pi+t)-\varphi(4\pi-t)+\cdots+\varphi(2(k-2)\pi+t)-\varphi(2(k-1)\pi-t)}{2(k-1)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } 0\leqslant t\leqslant 2\pi, \\ \dfrac{\varphi(t)-\varphi(2k\pi-t)+\varphi(2\pi+t)-\varphi(4\pi-t)+\cdots+\varphi(t-2\pi)-\varphi(2(k-1)\pi-t)}{2(k-1)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } 2\pi\leqslant t\leqslant 4\pi, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\varphi(t)-\varphi(2k\pi-t)+\varphi(t-2(k-2)\pi)-\varphi(2(k+1)\pi-t)+\cdots+\varphi(t-2\pi)-\varphi(2(k-1)\pi-t)}{2(k-1)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } 2(k-2)\pi\leqslant t\leqslant 2(k-1)\pi.\end{cases}$$

Для этой функции при $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ имеем:

$$\psi(2\pi+t)=\frac{\varphi(2\pi+t)-\varphi(2(k-1)\pi-t)+\varphi(4\pi+t)-\varphi(2\pi-t)+\cdots+\varphi(t)-\varphi(2(k-2)\pi-t)}{2(k-1)}$$

и

$$\psi(2\pi-t)=\frac{\varphi(2\pi-t)-\varphi(t)+\varphi(4\pi-t)-\varphi(2\pi+t)+\cdots+\varphi(2(k-1)\pi-t)-\varphi(2(k-2)\pi+t)}{2(k-1)},$$

т. е.

$$\psi(2\pi+t)=\psi(t)=-\psi(2\pi-t),$$

и, аналогично,

$$\psi(2m\pi+t)=\psi(t)=-\psi(2m\pi-t),\quad m=1,2,\ldots,k-2, \tag{2.13}$$

откуда, учитывая, что $\varphi(0)=\varphi(2(k-1)\pi)=0$, при $t=0$ получаем:

$$\psi(2m\pi)=0\quad (m=0,1,\ldots,k-1). \tag{2.14}$$

Кроме того, в силу (2.13), имеем:

$$\int\limits_0^{2(k-1)\pi}\psi(t)\sin t\,dt=\sum_{m=0}^{k-2}\int\limits_{2m\pi}^{2(m+1)\pi}\psi(t)\sin t\,dt=$$

$$=\sum_{m=0}^{k-2}\int\limits_0^{2\pi}\psi(t)\sin t\,dt=(k-1)\int\limits_0^{2\pi}\psi(t)\sin t\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sin t\left\{\varphi(t)+\sum_{i=1}^{k-2}[\varphi(2i\pi+t)-\varphi(2i\pi-t)]-\varphi(2(k-1)\pi-t)\right\}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int\limits_0^{2\pi}\varphi(t)\sin t\,dt+\sum_{i=1}^{k-2}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(2i\pi+t)\sin t\,dt-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{k-2}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(2i\pi-t)\sin t\,dt-\int\limits_0^{2\pi}\varphi(2(k-1)\pi-t)\sin t\,dt\right\}=$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\int_{0}^{2\pi} \varphi(t)\sin t\,dt + \sum_{i=1}^{k-2}\int_{2i\pi}^{2(i+1)\pi} \varphi(t)\sin t\,dt +\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{k-2}\int_{2(i-1)\pi}^{2i\pi} \varphi(t)\sin t\,dt + \int_{2(k-2)\pi}^{2(k-1)\pi} \varphi(t)\sin t\,dt\right\} = \int_{0}^{2(k-1)\pi} \varphi(t)\sin t\,dt.$$

Найдем $\Delta_h^2\psi(t)$. В силу условий (2.14) и неравенства (2.2), заключаем, что

$$\max_t |\psi(t)| = O(1),$$

поэтому для проверки принадлежности функции $\psi(t)$ к классу MH_2^α достаточно рассмотреть только $t \in [2\pi, 3\pi]$ и $0 \leqslant h \leqslant k(\alpha) = O(1)$, где $k(\alpha)$ — некоторая постоянная, зависящая только от α. Но так как функции

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} -\varphi(2\pi - t) & \text{для} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \\ \varphi(t - 2\pi) & \text{для} \quad 2\pi \leqslant t \leqslant 4\pi \end{cases}$$

и

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} \varphi(2(k-2)\pi + t) & \text{для} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \\ -\varphi(2k\pi - t) & \text{для} \quad 2\pi \leqslant t \leqslant 4\pi \end{cases}$$

получены нечетным продолжением функций, удовлетворяющих условию $|\Delta_h^2\varphi(t)| \leqslant h^\alpha$, то, согласно условиям (2.11) и (2.11′) о нечетном продолжении функций класса $H_2^\alpha(a, b)$, имеем:

$$|\Delta_h^2\varphi_1(t)| \leqslant Ch^\alpha \text{ и } |\Delta_h^2\varphi_2(t)| \leqslant Ch^\alpha,$$

где C — некоторая постоянная, зависящая от α. Так как $h \leqslant k(\alpha)$, то в выражение $\Delta_h^2\psi(t)$ будет входить только конечное число $m(\alpha)$ вторых разностей $\Delta_h^2\varphi_i(t)$ от функций, получаемых нечетным продолжением, а остальные слагаемые будут вида

$$\Delta_h^2\varphi(t + 2\nu\pi) \quad \text{и} \quad \Delta_h^2\varphi(2\nu\pi - t),$$

причем

$$|\Delta_h^2\varphi(t + 2\nu\pi)| \leqslant h^\alpha \text{ и } |\Delta_h^2\varphi(2\nu\pi - t)| \leqslant h^\alpha.$$

Поэтому

$$|\Delta_h^2\psi(t)| \leqslant \frac{2(k-1-m(\alpha))}{2(k-1)}h^\alpha + \frac{2Cm(\alpha)}{2(k-1)}h^\alpha = h^\alpha\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right),$$

т. е.

$$\psi(t) \in \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)H_2^\alpha.$$

Таким образом, можно записать:

$$\sup_{f \in H_2^\alpha(0,2k\pi)} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2k\pi} f(x) \cos x\, dx \right| =$$

$$= \sup_{\substack{\varphi \in H_2^\alpha (0,2(k-1)\pi) \\ \varphi(0)=\varphi(2(k-1)\pi)=0}} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2(k-1)\pi} \varphi(t) \sin t dt \right| + O(\ln k) =$$

$$= \sup_{\psi \in \left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right) H_2^\alpha} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2(k-1)\pi} \psi(t) \sin t dt \right| + O(\ln k) =$$

$$= (k-1)\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \sup_{\psi \in H_2^\alpha} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(t) \sin t dt \right| + O(\ln k) =$$

$$= (k-1)\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right) C_2(\alpha) + O(\ln k) = kC_2(\alpha) + O(\ln k),$$

и лемма установлена.

Следствие. *Пусть* $f(x) \in H_2^\alpha$, k *и* n — *целые. Тогда*

$$\int_0^{\frac{2k\pi}{n}} f(x) \cos nx\, dx = O\left(\frac{k}{n^{1+\alpha}}\right). \tag{2.15}$$

В самом деле, так как

$$\int_0^{\frac{2k\pi}{n}} f(x) \cos nx\, dx = \frac{1}{n} \int_0^{2k\pi} f\left(\frac{x}{n}\right) \cos x\, dx,$$

то, в силу $\varphi(x) = f\left(\frac{x}{n}\right) \in \frac{1}{n^\alpha} H_2^\alpha(\infty)$, имеем:

$$\int_0^{\frac{2k\pi}{n}} f(x) \cos nx\, dx = \frac{1}{n} \int_0^{2k\pi} \varphi(x) \cos x dx = O\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n^\alpha}\right) = O\left(\frac{k}{n^{1+\alpha}}\right).$$

ЛЕММА 3. *Пусть* $f(x) \in H_2^\alpha$, $f(0)=0$, n — *целое* $\geqslant 1$ *и* $0 < u \leqslant \pi$. *Тогда для* $0 < \alpha \leqslant 1$

$$\int_0^u f(x) \cos nx\, dx = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

равномерно относительно u.

Доказательство. Выберем целое $k \geqslant 0$ таким, чтобы

$$\frac{2k\pi}{n} < u \leqslant \frac{2(k+1)\pi}{n}, \quad k \leqslant \frac{1}{n} - 1.$$

Тогда

$$\int_0^u f(x) \cos nx \, dx = \int_0^{\frac{2k\pi}{n}} f(x) \cos nx \, dx + \int_{\frac{2k\pi}{n}}^u f(x) \cos nx \, dx.$$

Но так как, в силу (2.2), $\max_x |f(x)| = O(1)$ и, кроме того, $u - \frac{2k\pi}{n} \leqslant \frac{2\pi}{n}$, то для второго интеграла получим:

$$\int_{\frac{2k\pi}{n}}^u f(x) \cos nx \, dx = O\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right). \tag{2.16}$$

Учитывая (2.15) и (2.16), находим:

$$\int_0^u f(x) \cos nx \, dx = O\left(\frac{k}{n^{1+\alpha}}\right) + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

и лемма установлена.

§ 3. Приближение функций с заданным модулем гладкости суммами Фейера

Нам потребуются следующие свойства модулей гладкости и тригонометрических полиномов, приближающих данную функцию:

1. $\omega_2(\lambda h, f) \leqslant (\lambda + 1)^2 \omega_2(h, f).$ (3.1)

2. Пусть $P_{n-1}(x)$ — тригонометрический полином порядка $n-1$ и

$$E_n(f) = \inf_{P_{n-1}} \| f(x) - P_{n-1}(x) \| = \| f(x) - P^*_{n-1}(x) \|.$$

Тогда

$$E_n(f) = \| f(x) - P^*_{n-1}(x) \| \leqslant C\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right). \tag{3.2}$$

3. Пусть $\| f(x) - P_n(x) \| \leqslant C\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)$. Тогда

$$\| P''_n(x) \| \leqslant Cn^2 \omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right) \tag{3.3}$$

и

$$\omega_2(h, P_n) \leqslant C\omega_2(h, f), \tag{3.4}$$

где C — некоторые постоянные.

Эти свойства доказаны С. Б. Стечкиным ([20]).

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $f(x)$ — непрерывная функция периода 2π и $\omega_2(h, f)$ — ее модуль гладкости. Тогда для уклонения функции $f(x)$ от ее сумм Фейера справедливо равенство:*

$$f(x) - \sigma_{n-1}(f, x) = -\frac{1}{2\pi}\int_a^\infty \frac{f\left(x+\frac{2t}{n}\right) - 2f(x) + f\left(x-\frac{2t}{n}\right)}{t^2}\,dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)\right),$$

где $a > 0$ — произвольная постоянная.

Доказательство. Положим

$$\varphi_x(t) = \varphi(t) = f(x+2t) - 2f(x) + f(x-2t). \tag{3.5}$$

Используя формулу Валле-Пуссена ([3]) для уклонения функции от ее сумм Фейера, получаем:

$$\sigma_{n-1}(f, x) - f(x) = \frac{1}{\pi n}\int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2}\sin^2 nt\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\varphi(t)}{t^2}\sin^2 nt\,dt + \frac{1}{\pi n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2}\,\frac{1-\cos 2nt}{2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt + \frac{1}{\pi n}\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\varphi(t)}{t^2}\sin^2 nt\,dt - \frac{1}{2\pi n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2}\cos 2nt\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt + I_1 - I_2.$$

Так как для $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2n}$

$$|\varphi(t)| = |f(x+2t) - 2f(x) + f(x-2t)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|t| \leqslant \frac{\pi}{2n}} \|f(x+2t) - 2f(x) + f(x-2t)\| = \omega_2\left(\frac{\pi}{n}, f\right)$$

и $|\sin nt| \leqslant n|\sin t|$, то, применяя (3.1), получим:

$$|I_1| \leqslant \frac{1}{\pi n} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{|\varphi(t)|}{t^2} \sin^2 nt\, dt \leqslant \frac{\omega_2\left(\frac{\pi}{n}, f\right)}{\pi n} n^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt \leqslant \frac{(\pi+1)^2}{2} \omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right),$$

т. е.

$$I_1 = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)\right).$$

Оценим теперь

$$I_2 = \frac{1}{2\pi n} \int\limits_{\frac{\pi}{2n}}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} \cos 2nt\, dt.$$

Заменим функцию $f(x)$ ее полиномом наилучшего приближения $P_n(x)$. Учитывая неравенство (3.2), имеем:

$$f(x+2t) - 2f(x) + f(x-2t) = P_n(x+2t) - 2P_n(x) + P_n(x-2t) + \\ + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)\right).$$

Следовательно,

$$I_2 = \frac{1}{2\pi n} \int\limits_{\frac{\pi}{2n}}^{\infty} \frac{P_n(x-2t) - 2P_n(x) + P_n(x-2t)}{t^2} \cos 2nt dt + O\left(\frac{\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)}{n} \int\limits_{\frac{\pi}{2n}}^{\infty} \frac{dt}{t^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi n} \int\limits_{\frac{\pi}{2n}}^{\infty} \frac{\psi_n(t)}{t^2} d\frac{\sin 2nt}{2n} + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)\right) = I_3 + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)\right),$$

где

$$\psi_n(t) = P_n(x+2t) - 2P_n(x) + P_n(x-2t). \qquad (3.6)$$

Дважды интегрируя по частям, получаем:

$$I_3 = \frac{1}{2\pi n} \int\limits_{\frac{\pi}{2n}}^{\infty} \frac{\psi_n(t)}{t^2} d\frac{\sin 2nt}{2n} = \frac{1}{2\pi n} \Big|_{\frac{\pi}{2n}}^{\infty} \frac{\psi_n(t)}{t^2} \frac{\sin 2nt}{2n} -$$

$$- \frac{1}{4\pi n^2} \int\limits_{\frac{\pi}{2n}}^{\infty} \left[\frac{\psi_n'(t)}{t^2} - \frac{2\psi_n(t)}{t^3}\right] \sin 2nt\, dt = \frac{1}{4\pi n^2} \int\limits_{\frac{\pi}{2n}}^{\infty} \left[\frac{\psi_n'(t)}{t^2} - \frac{2\psi_n(t)}{t^3}\right] d\frac{\cos 2nt}{2n} =$$

$$= \frac{1}{8\pi n^3} \Big|_{\frac{\pi}{2n}}^{\infty} \left[\frac{\psi_n'(t)}{t^2} - \frac{2\psi_n(t)}{t^3}\right] \cos 2nt dt - \frac{1}{8\pi n^3} \int\limits_{\frac{\pi}{2n}}^{\infty} \left[\frac{\psi_n''(t)}{t^2} - \frac{4\psi_n'(t)}{t^3} + \frac{6\psi_n(t)}{t^4}\right] \cos 2nt dt =$$

$$= \frac{\psi_n'\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{2\pi^3 n} - \frac{2\psi\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\pi^4} - I_4.$$

Но, в силу (3.6), (3.4) и (3.1),

$$\left|\psi_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right| \leqslant \omega_2\left(\frac{\pi}{n}, P_n\right) \leqslant C\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)$$

и, в силу (3.3),

$$\left|\psi_n'\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right| = \left|2\left[P_n'\left(x+\frac{\pi}{n}\right) - P_n'\left(x-\frac{\pi}{n}\right)\right]\right| = \frac{4\pi}{n}\left|P_n''\left(x+\frac{\theta\pi}{n}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{n} n_2\, \omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right),$$

где $|\theta| < 1$. Таким образом,

$$I_3 = -I_4 + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)\right).$$

Для оценки I_4 заметим, что

$$\psi_n(t) = P_n(x+2t) - 2P_n(x) + P_n(x-2t) = t^2 P_n''(x+2\theta t) \quad (|\theta| < 1),$$

$$\psi_n'(t) = 2[P_n'(x+2t) - P_n'(x-2t)] = 8tP_n''(x+2\theta_1 t) \quad (|\theta_1| < 1)$$

и

$$\psi_n''(t) = 4[P_n''(x+2t) + P_n''(x-2t)].$$

Таким образом, в силу (3.3),

$$\left|\frac{\psi_n''(t)}{t^2} - \frac{4\psi_n'(t)}{t^3} + \frac{6\psi_n(t)}{t^4}\right| =$$

$$= \frac{1}{t^2}\left|4[P_n''(x+2t) + P_n''(x-2t)] - 32P_n''(x+2\theta_1 t) + 6P_n''(x+2\theta t)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_1 n^2 \omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)}{t^2} = O\left(\frac{n^2\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)}{t^2}\right),$$

откуда следует:

$$I_4 = O\left(\frac{1}{n^3}\int\limits_{\frac{\pi}{2n}}^{\infty} \frac{n^2\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)}{t^2}\,dt\right) = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)\right).$$

Итак,

$$I_2 = I_3 + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)\right) = I_4 + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)\right) = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)\right),$$

т. е.

$$\sigma_{n-1}(f, x) - f(x) = \frac{1}{2\pi n}\int\limits_{\frac{\pi}{2n}}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)\right).$$

Но так как

$$\max_{|t| \leqslant \max\left\{\frac{a\pi}{n}, \frac{\pi}{2n}\right\}} |\varphi(t)| \leqslant \sup_{|t| \leqslant \max\left\{\frac{a\pi}{n}, \frac{\pi}{2n}\right\}} \|f(x+2t) - 2f(x) + f(x-2t)\| =$$

$$= O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)\right),$$

то

$$\left|\frac{1}{2\pi n}\int\limits_{\frac{a}{n}}^{\frac{\pi}{2n}}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2\pi n}\left|\int\limits_{\frac{a}{n}}^{\frac{\pi}{2n}}\frac{|\varphi(t)|}{t^2}\,dt\right| = O\left(\frac{\omega_2\left(\frac{1}{n},f\right)}{n}\left|\int\limits_{\frac{a}{n}}^{\frac{\pi}{2n}}\frac{dt}{t^2}\right|\right) =$$

$$= O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n},f\right)\right)$$

при любой постоянной $a > 0$, откуда получаем:

$$\sigma_{n-1}(f,x) - f(x) = \frac{1}{2\pi n}\int\limits_{\frac{a}{n}}^{\infty}\frac{f(x+2t)-2f(x)+f(x-2t)}{t^2}\,dt +$$

$$+ O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n},f\right)\right) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{a}^{\infty}\frac{f\left(x+\frac{2t}{n}\right)-2f(x)+f\left(x-\frac{2t}{n}\right)}{t^2}\,dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n},f\right)\right).$$

Теорема установлена.

§ 4. Приближение сопряженных функций суммами Фейера

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $f(x) \in H_2^1$. *Тогда равномерно по всем функциям из класса* H_2^1 *справедливо равенство*:

$$\bar{f}(x) - \bar{\sigma}_{n-1}(f,x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{a_1}\left[f\left(x+\frac{t}{n}\right)-f\left(x-\frac{t}{n}\right)\right]\frac{\sin t}{t^2}\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $a_1 > 0$ — *наименьший корень уравнения* $\int\limits_0^u \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

Доказательство. Имеем:

$$\bar{\sigma}_{n-1}(f,x) - \bar{f}(x) = \frac{1}{4\pi n}\int\limits_0^{\pi}[f(x+t)-f(x-t)]\,\frac{\sin nt}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt.$$

Так как

$$\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{4}{t^2} + O(1)$$

и, в силу (2.1),

$$|f(x+t)-f(x-t)| = O(1),$$

то

$$\bar{\sigma}_{n-1}(f,x) - \bar{f}(x) = \frac{1}{\pi n}\int\limits_0^{\pi}\left[f(x+t)-f(x-t)\right]\frac{\sin nt}{t^2}\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Обозначим через $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ корни уравнения

$$\int\limits_0^u \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Пусть, далее,

$$\psi_x = \psi(t) = f(x+t) - f(x-t),$$

так что $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$ и $\psi(t) \in 2H_2^1$. Тогда

$$\bar{\sigma}_{n-1}(f, x) - \bar{f}(x) = \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi} \psi(t)\,\frac{\sin nt}{t^2}\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\int_0^{\frac{a_1}{n}} \psi(t)\,\frac{\sin nt}{t^2}\,dt + \frac{1}{\pi n}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{a_k}{n}}^{\frac{a_{k+1}}{n}} \psi(t)\,\frac{\sin nt}{t^2}\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\int_0^{\frac{a_1}{n}} \psi(t)\,\frac{\sin nt}{t^2}\,dt + I + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Оценим I. Так как

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\sin t}{t}\,dt = 0,$$

то

$$I = \frac{1}{\pi n}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{a_k}{n}}^{\frac{a_{k+1}}{n}} \psi(t)\,\frac{\sin nt}{t^2}\,dt = \frac{1}{\pi n}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{a_k}{n}}^{\frac{a_{k+1}}{n}} [\psi(t) + b_k t]\,\frac{\sin nt}{t^2}\,dt.$$

В силу условия $\Delta_h^2(kx+b) = 0$, выберем постоянные b_k так, чтобы функции $\psi_k(t) = \psi(t) + b_k t \in 2H_2^1(\infty)$ обращались в нуль соответственно при $t = \frac{a_{k+1}}{n}$. Тогда, в силу $\psi(0) = 0$, получим:

$$\psi_k(0) = \psi_k\left(\frac{a_{k+1}}{n}\right) = 0$$

и, согласно (2.6), при $d = \frac{a_{k+1}}{n}$ имеем:

$$\psi_k(t) = O\left(\left(\frac{a_{k+1}}{n} - t\right)\ln\frac{a_{k+1}}{n\left(\frac{a_{k+1}}{n} - t\right)}\right).$$

Отсюда, учитывая, что $(k-1)\pi < a_k < k\pi$ и

$$(a_{k+1} - a_k)^2 \ln\frac{1}{a_{k+1} - a_k} = O(1),$$

выводим

$$\int_{\frac{a_k}{n}}^{\frac{a_{k+1}}{n}} [\psi(t) + b_k t]\,\frac{\sin nt}{t^2}\,dt = O\left(\int_{\frac{a_k}{n}}^{\frac{a_{k+1}}{n}} \left(\frac{a_{k+1}}{n} - t\right)\ln\frac{a_{k+1}}{n\left(\frac{a_{k+1}}{n} - t\right)}\,\frac{dt}{\frac{a_k^2}{n^2}}\right) =$$

$$= O\left(\frac{n^2}{a_k^2}\Big|_{\frac{a_k}{n}}^{\frac{a_{k+1}}{n}} \left(\frac{a_{k+1}}{n} - t\right)^2 \ln \frac{a_{k+1}}{n\left(\frac{a_{k+1}}{n} - t\right)}\right) =$$

$$= O\left(\frac{n^2}{a} \frac{(a_{k+1} - a_k)^2}{n^2} \ln \frac{a_{k+1}}{a_{k+1} - a_k}\right) = O\left(\frac{\ln a_{k+1}}{a_k^2}\right) = O\left(\frac{\ln (k+1)}{k^2}\right).$$

Таким образом,

$$I = \frac{1}{\pi n}\, O\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln (k+1)}{k^2}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

и, следовательно,

$$\bar{\sigma}_{n-1}(f, x) - \bar{f}(x) = \frac{1}{\pi n} \int_0^{\frac{a_1}{n}} [f(x+t) - f(x-t)]\, \frac{\sin nt}{t^2}\, dt + O\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{a_1} \left[f\left(x + \frac{t}{n}\right) - f\left(x - \frac{t}{n}\right)\right] \frac{\sin t}{t^2}\, dt + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Теорема установлена.

З а м е ч а н и е. Если $f(x) \in H_2^{\alpha}$, $0 < \alpha \leqslant 1$, то, используя вместо (2.6) неравенство (2.9), получим, что для любого $0 < \alpha \leqslant 1$

$$\bar{\sigma}_{n-1}(f, x) - \bar{f}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{a_1} \left[f\left(x + \frac{t}{n}\right) - f\left(x - \frac{t}{n}\right)\right] \frac{\sin t}{t^2}\, dt + O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right), \qquad (4.1)$$

причем интеграл имеет порядок $O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$, если $0 < \alpha < 1$.

ТЕОРЕМА 3. *Справедливо асимптотическое равенство:*

$$\mathcal{E}_{\sigma_n}(\bar{H}_2^1) = \frac{1}{2\ln(\sqrt{2}+1)} \frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как, в силу (2.7),

$$|f(x+t) - f(x-t)| \leqslant \frac{1}{2\ln(\sqrt{2}+1)}\, 2t \ln \frac{1}{2t} + O(t),$$

то

$$|\bar{\sigma}_{n-1}(f, x) - \bar{f}(x)| \leqslant \frac{1}{\pi n} \int_0^{\frac{a_1}{n}} \frac{1}{\ln(\sqrt{2}+1)}\, t \ln \frac{1}{2t}\, \frac{\sin nt}{t^2}\, dt + O\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n \ln(\sqrt{2}+1)} \left\{ \Big|_0^{\frac{a_1}{n}} \ln \frac{1}{2t} \int_0^t \frac{\sin nu}{u}\, du + \int_0^{\frac{a_1}{n}} \frac{dt}{t} \int_0^t \frac{\sin nu}{u}\, du \right\} + O\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n \ln(\sqrt{2}+1)} \left\{ \ln \frac{n}{2a_1} \cdot \frac{\pi}{2} + O(1) \right\} + O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2\ln(\sqrt{2}+1)} \frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Но для функции $f^*(x) \in H_2^1$, определенной равенствами:

$$f^*(x) = \frac{1}{2\ln(\sqrt{2}+1)}(x-x_0)\ln\frac{\pi}{|x-x_0|} \quad \text{при} -\pi \leqslant x - x_0 \leqslant \pi,$$

$$f^*(x+2\pi) = f^*(x),$$

имеем:

$$\bar{\sigma}_{n-1}(f^*, x) - \bar{f}^*(x) = \frac{1}{2\ln(\sqrt{2}+1)}\frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

и теорема установлена.

§ 5. Выражение уклонения $R_n(f, x)$ для класса $W_\beta^r H_2^\alpha$

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $f(x) \in W_\beta^r H_2^\alpha$. *Тогда для любого* $r > 0$ *и произвольного* α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ *равномерно относительно всех функций* $f \in W_\beta^r H_2^\alpha$ *справедливо равенство*:

$$R_n(f, x) = f(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{k^r}\,dt =$$

$$= \frac{1}{(n+1)^r}r_{n,\beta}(\varphi, x) + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right),$$

где

$$r_{n,}(\varphi, x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x) - \varphi(x+t)]\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt.$$

Доказательство. Обозначим

$$D_{n,\beta}^r(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{k^r}.$$

Так как

$$\int_{-\pi}^{\pi}D_{n,\beta}^r(t)\,dt = 0,$$

то можно написать:

$$R_n(f, x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x+t) - \varphi(x)]\,D_{n,\beta}^r(t)\,dt.$$

Воспользуемся следующим соотношением, справедливым для $r > 0$ и $t \neq 0 \pmod{2\pi}$ [доказательство см. у А. Н. Колмогорова ([12]) или В. Т. Пинкевича ([17])]:

$$D_{n,\beta}^r(t) = -\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{(n+1)^r\,2\sin\frac{t}{2}} -$$

$$-\Delta(n+1)\left[\frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}\sin^2\frac{n+1}{2}t}{2\sin^2\frac{t}{2}} + \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}\sin(n+1)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}\right] +$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}\Delta^2(k)\left[\frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}\sin^2\frac{k+1}{2}t}{2\sin^2\frac{t}{2}}+\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}\cdot\sin(k+1)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}\right]=$$

$$=-\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{(n+1)^r 2\sin\frac{t}{2}}-\sum_{k=n+1}^{\infty}\Delta^2(k)\left[\cos\frac{\beta\pi}{2}\,\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t-\sin^2\frac{k+1}{2}t}{2\sin^2\frac{t}{2}}+\right.$$

$$\left.+\sin\frac{\beta\pi}{2}\,\frac{\sin(n+1)t-\sin(k+1)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}\right],$$

где

$$\Delta(k)=\frac{1}{k^r}-\frac{1}{(k+1)^r},$$

$$\Delta^2(k)=\Delta(k)-\Delta(k+1)\ \text{ и }\ \Delta(n+1)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\Delta^2(k).$$

Так как, в силу (2.3) и (2.4),

$$\varphi(x+t)-\varphi(x)=\begin{cases} O(|t|^{\alpha}), & \text{если } 0<\alpha<1,\\ O\left(|t|\ln\frac{1}{|t|}\right), & \text{если } \alpha=1,\end{cases}$$

то сходятся несобственные интегралы и проинтегрированный ряд при $r>0$ абсолютно сходится. Поэтому [см. ([28]), стр. 57—58]

$$R_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x+t)-\varphi(x)]\left\{-\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{(n+1)^r 2\sin\frac{t}{2}}-\right.$$

$$-\cos\frac{\beta\pi}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\Delta^2(k)\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t-\sin^2\frac{k+1}{2}t}{2\sin^2\frac{t}{2}}-$$

$$\left.-\sin\frac{\beta\pi}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\Delta^2(k)\frac{\sin(n+1)t-\sin(k+1)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}\right\}dt=\frac{1}{(n+1)^r}r_{n,\beta}(\varphi,x)-$$

$$-\cos\frac{\beta\pi}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\Delta^2(k)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x+t)-\varphi(x)]\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t-\sin^2\frac{k+1}{2}t}{2\sin^2\frac{t}{2}}dt-$$

$$-\sin\frac{\beta\pi}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\Delta^2(k)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x+t)-\varphi(x)]\frac{\sin(n+1)t-\sin(k+1)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}dt=$$

$$=\frac{1}{(n+1)^r}r_{n,\beta}(\varphi,x)+\cos\frac{\beta\pi}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\Delta^2(k)\{(n+1)[\varphi(x)-\sigma_n(\varphi,x)]-$$

$$-(k+1)[\varphi(x)-\sigma_k(\varphi,x)]\}+\sin\frac{\beta\pi}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\Delta^2(k)\{(n+1)[\bar\varphi(x)-\bar\sigma_n(\varphi,x)]-$$

$$-(k+1)[\bar\varphi(x)-\bar\sigma_k(\varphi,x)]\}=\frac{1}{(n+1)^r}\cdot r_{n,\beta}(\varphi,x)+\cos\frac{\beta\pi}{2}\sum\nolimits_1+\sin\frac{\beta\pi}{2}\sum\nolimits_2.$$

Используя теорему 1 при $\omega_2(h, f) = h^\alpha$, получаем:

$$\sum_1 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta^2(k) \{(n+1)[\varphi(x) - \sigma_n(\varphi, x)] - (k+1)[\varphi(x) - \sigma_k(\varphi, x)]\} =$$

$$= -\sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta^2(k) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{a}{n+1}}^{\infty} \frac{\varphi(x+2t) - 2\varphi(x) + \varphi(x-2t)}{t^2} dt - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{a}{k+1}}^{\infty} \frac{\varphi(x+2t) - 2\varphi(x) + \varphi(x-2t)}{t^2} dt + O(k^{1-\alpha}) \right\} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta^2(k) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{a}{k+1}}^{\frac{a}{n+1}} \frac{\varphi(x+2t) - 2\varphi(x) + \varphi(x-2t)}{t^2} dt + O(k^{1-\alpha}) \right\}.$$

Но так как

$$|\varphi(x+2t) - 2\varphi(x) + \varphi(x-2t)| \leqslant (2t)^\alpha \text{ и } \Delta^2(k) = O\left(\frac{1}{k^{r+2}}\right),$$

то

$$\sum_1 = \begin{cases} O\left(\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{r+2}} k^{1-\alpha} \right) = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right), & \text{если } 0 < \alpha < 1, \\ O\left(\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{r+2}} \cdot \ln \frac{k+1}{n+1} \right) = O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right), & \text{если } \alpha = 1. \end{cases}$$

Далее, используя равенство (4.1), находим:

$$\sum_2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta^2(k) \{(n+1)[\bar{\varphi}(x) - \bar{\sigma}_n(\varphi, x)] - (k+1)[\bar{\varphi}(x) - \bar{\sigma}_k(\varphi, x)]\} =$$

$$= -\sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta^2(k) \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{a_1}{n+1}} [\varphi(x+t) - \varphi(x-t)] \frac{\sin(n+1)t}{t^2} dt - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{a_1}{k+1}} [\varphi(x+t) - \varphi(x-t)] \frac{\sin(k+1)t}{t^2} dt + O(k^{1-\alpha}) \right\}.$$

Обозначим

$$\varphi_1(t) = \varphi(x+t) - \varphi(x-t), \quad \varphi_1(t) \in 2H_2^\alpha$$

и рассмотрим выражение

$$I = \int_0^{\frac{a_1}{n+1}} \varphi_1(t) \frac{\sin(n+1)t}{t^2} dt - \int_0^{\frac{a_1}{k+1}} \varphi_1(t) \frac{\sin(k+1)t}{t^2} dt.$$

Функцию $\varphi_1(t)$ запишем в виде:

$$\varphi_1(t) = \psi(t) + \frac{n+1}{a_1} \varphi_1\left(\frac{a_1}{n+1}\right) t.$$

В силу условия $\varphi_1(0)=0$, отсюда получаем:

$$\psi(0)=\psi\left(\frac{a_1}{n+1}\right)=0,$$

и так как $\psi(t)\in 2H_2^\alpha\left(0, \frac{a_1}{n+1}\right)$, то, в силу (2.10) $\left(d=\frac{a_1}{n+1}\right)$,

$$\psi(t)=O\left(t^\alpha \ln \frac{a_1}{(n+1)t}\right). \tag{5.1}$$

Но

$$\int_0^{a_1} \frac{\sin u}{u}\,du=\frac{\pi}{2},$$

поэтому

$$I=\int_0^{\frac{a_1}{n+1}} \left[\psi(t)+\frac{n+1}{a_1}\varphi_1\left(\frac{a_1}{n+1}\right)t\right]\frac{\sin(n+1)t}{t^2}\,dt-$$

$$-\int_0^{\frac{a_1}{k+1}} \left[\psi(t)+\frac{n+1}{a_1}\varphi_1\left(\frac{a_1}{n+1}\right)t\right]\frac{\sin(k+1)t}{t^2}\,dt=$$

$$=\int_0^{\frac{a_1}{n+1}} \psi(t)\frac{\sin(n+1)t}{t^2}\,dt+\frac{n+1}{a_1}\varphi_1\left(\frac{a_1}{n+1}\right)\cdot\frac{\pi}{2}-$$

$$-\int_0^{\frac{a_1}{k+1}} \psi(t)\frac{\sin(k+1)t}{t^2}\,dt-\frac{n+1}{a_1}\varphi_1\left(\frac{a_1}{n+1}\right)\cdot\frac{\pi}{2}=$$

$$=\int_0^{\frac{a_1}{n+1}} \psi(t)\frac{\sin(n+1)t}{t^2}\,dt-\int_0^{\frac{a_1}{k+1}} \psi(t)\frac{\sin(k+1)t}{t^2}\,dt,$$

и, в силу (5.1),

$$I=O\left(\int_0^{\frac{a_1}{n+1}} t^\alpha \ln\frac{a_1}{(n+1)t}\cdot\frac{(n+1)t}{t^2}\,dt\right)+O\left(\int_0^{\frac{a_1}{k+1}} t^\alpha \ln\frac{a_1}{(n+1)t}\cdot\frac{(k+1)t}{t^2}\,dt\right)=$$

$$=O(n^{1-\alpha})+O\left(k^{1-\alpha}\ln\frac{k+1}{n+1}\right).$$

Таким образом,

$$\sum\nolimits_2=O\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{r+2}}\left(n^{1-\alpha}+k^{1-\alpha}\ln\frac{k+1}{n+1}\right)\right)=O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right),$$

т. е. при любом $r>0$ и произвольном α $(0<\alpha\leqslant 1)$

$$R_n(f,x)=\frac{1}{(n+1)^r}r_{n,\beta}(\varphi,x)+O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Теорема доказана.

§ 6. Асимптотические формулы для класса $W_\beta^0 H_2^\alpha$

ЛЕММА 4. *Пусть* $f(x) \in H_2^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $f(0) = 0$, $\frac{1}{2} \leqslant \eta \leqslant \frac{5}{2}$. *Тогда*

$$A_1 = \int_{-\frac{4\pi}{n}}^{0} f\left(t + \frac{\pi}{n}\eta\right) \frac{\cos nt}{t + \frac{\pi}{n}\eta}\, dt = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \tag{6.1}$$

и для всех целых $\nu \neq -2, -1$ $\left(|\nu| < \frac{n}{2}\right)$

$$A_2 = \int_{\frac{2\nu\pi}{n}}^{\frac{2(\nu+1)\pi}{n}} f\left(t + \frac{\pi}{n}\eta\right) \cos nt \left(\frac{1}{t + \frac{\pi}{n}\eta} - \frac{1}{\frac{2(\nu+1)\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\eta}\right) dt = O\left(\frac{\ln(|\nu|+2)}{n^\alpha (\nu+1)^2}\right). \tag{6.2}$$

Доказательство. Оценим A_1. Так как при любой постоянной a

$$A_1 = \int_{-\frac{4\pi}{n}}^{0} \left[f\left(t + \frac{\pi}{n}\eta\right) + a\left(t + \frac{\pi}{n}\eta\right)\right] \frac{\cos nt}{t + \frac{\pi}{n}\eta}\, dt,$$

то выберем a так, чтобы функция

$$f_1(t) = f\left(t + \frac{\pi}{n}\eta\right) + a\left(t + \frac{\pi}{n}\eta\right), \quad f_1(t) \in H_2^\alpha\left(-\frac{4\pi}{n}, 0\right),$$

обращалась в нуль при $t = 0$. Тогда, в силу $f(0) = 0$,

$$f_1(0) = f_1\left(-\frac{\pi}{n}\eta\right) = 0,$$

т. е., согласно (2.9),

$$f_1(t) = O\left(\left|t + \frac{\pi}{n}\eta\right|^\alpha \ln \frac{\pi\eta}{n\left|t + \frac{\pi}{n}\eta\right|}\right).$$

Поэтому

$$A_1 = O\left(\int_{-\frac{4\pi}{n}}^{0} \left|t + \frac{\pi}{n}\eta\right|^{\alpha-1} \ln \frac{\pi\eta}{n\left|t + \frac{\pi}{n}\eta\right|}\, dt\right) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

и формула (6.1) установлена.

Произведем в интеграле A_2 замену переменного:

$$\frac{2(\nu+1)\pi}{n} - t = z.$$

Мы получим:

$$A_2 = \frac{n}{2\pi\left(\nu + 1 + \frac{1}{2}\eta\right)} \int_0^{\frac{2\pi}{n}} f\left(\frac{2(\nu+1)\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\eta - z\right) \frac{z \cos nz}{\frac{2(\nu+1)\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\eta - z}\, dz.$$

Так как

$$\int_0^{\frac{2\pi}{n}} z \cos nz\, dz = 0,$$

то

$$A_2 = \frac{n}{2\pi\left(\nu + 1 + \frac{1}{2}\eta\right)} \int\limits_0^{\frac{2\pi}{n}} \left[f\left(\frac{2(\nu+1)\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\eta - z\right) + \right.$$

$$\left. + a\left(\frac{2(\nu+1)\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\eta - z\right)\right] \frac{z \cos nz}{\frac{2(\nu+1)\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\eta - z}\, dz,$$

где константа a выбрана так, что

$$f\left(\frac{2(\nu+1)\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\eta\right) + a\left(\frac{2(\nu+1)\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\eta\right) = 0,$$

откуда, в силу (2.9), выводим:

$$f\left(\frac{2(\nu+1)\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\eta - z\right) + a\left(\frac{2(\nu+1)\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\eta - z\right) = O\left(z^{\alpha} \ln \frac{|\nu|+2}{nz}\right).$$

Следовательно,

$$A_2 = O\left(\frac{n}{|\nu+1|} \int\limits_0^{\frac{2\pi}{n}} z^{\alpha+1} \ln \frac{|\nu|+2}{nz} \frac{1}{\left|\frac{2\nu\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\eta\right|}\, dz\right) =$$

$$= O\left(\frac{n^2}{(\nu+1)^2} \frac{1}{n^{2+\alpha}} \ln \frac{|\nu|+2}{n \cdot \frac{2\pi}{n}}\right) = O\left(\frac{\ln(|\nu|+2)}{n^{\alpha}(\nu+1)^2}\right),$$

и лемма полностью доказана.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* $f(x) \in W_{\beta}^{0} H_{2}^{\alpha}$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 4$ *и*

$$r_{n,\beta}(\varphi, x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [\varphi(x) - \varphi(x+t)] \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2} t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{2 \sin \frac{t}{2}}\, dt.$$

Тогда

$$r_{n,\beta}(\varphi, x) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3} \frac{1}{k^2} \left\{ \int\limits_0^{2k\pi} \left[\varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{t}{n} + \frac{5-\beta}{2n}\pi\right)\right] \cos t\, dt - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{-2k\pi}^{0} \left[\varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{t}{n} - \frac{3+\beta}{2n}\pi\right)\right] \cos t\, dt \right\} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$$

равномерно по всем функциям $f \in W_{\beta}^{0} H_{2}^{\alpha}$.

Доказательство. Учитывая (2.12), имеем:

$$r_{n,\beta}(\varphi, x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [\varphi(x) - \varphi(x+t)] \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [\varphi(x) - \varphi(x+t)] \cos nt\, dt = \frac{1}{2\pi} \left[\int\limits_{-\pi}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi - \frac{4\pi}{n}} + \int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi - \frac{4\pi}{n}}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi} + \right.$$

$$+\int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi}^{\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt\Big]+O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}[I_1+I_2+I_3]+O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right).$$

Обозначим $\nu_x(t)=\nu(t)=\varphi(x)-\varphi(x+t)$, $\nu(0)=0$, $\nu(t)\in H_2^{\alpha}$. Используя (2.15) и учитывая, что

$$\operatorname{ctg}\frac{t}{2}=\frac{1}{2}\int\limits_{t}^{\pi}\frac{du}{\sin^2\frac{u}{2}},$$

получаем:

$$I_2=\int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi-\frac{4\pi}{n}}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi}\nu(t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi-\frac{4\pi}{n}}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi}\nu(t)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt\left[\int\limits_{t}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi}\frac{du}{\sin^2\frac{u}{2}}+2\operatorname{ctg}\frac{5-\beta}{4n}\pi\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi-\frac{4\pi}{n}}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi}\nu(t)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt\int\limits_{t}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi}\frac{du}{\sin^2\frac{u}{2}}+O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\operatorname{ctg}\frac{5-\beta}{4n}\pi\right).$$

Следовательно,

$$I_2=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi-\frac{4\pi}{n}}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi}\frac{du}{\sin^2\frac{u}{2}}\int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi-\frac{4\pi}{n}}^{u}\nu(t)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt+O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)=$$

$$=2\int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi-\frac{4\pi}{n}}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi}\frac{du}{u^2}\int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi-\frac{4\pi}{n}}^{u}\nu(t)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt+$$

$$+O\left(\int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi-\frac{4\pi}{n}}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi}du\left|\int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi-\frac{4\pi}{n}}^{u}\nu(t)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt\right|\right)+O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right).$$

Но, согласно лемме 3, для всех $\frac{5-\beta}{2n}\pi-\frac{4\pi}{n}\leqslant u\leqslant\frac{5-\beta}{2n}\pi$

$$\int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi-\frac{4\pi}{n}}^{u}\nu(t)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt=O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right).$$

Поэтому

$$I_2 = 2 \int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi - \frac{4\pi}{n}}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi} \nu(t) \sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\frac{5-\beta}{2n}\pi}\right) dt =$$

$$= 2 \int\limits_{-\frac{4\pi}{n}}^{0} \nu\left(t + \frac{5-\beta}{2n}\pi\right) \frac{\cos nt}{t + \frac{5-\beta}{2n}\pi}\, dt + O\left(n \int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi - \frac{4\pi}{n}}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi} \nu(t) \sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt\right).$$

Используя (2.15) и (6.1), выводим отсюда, что

$$I_2 = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \text{ для всех } 0 < \alpha \leqslant 1.$$

Далее,

$$I_1 = \int\limits_{-\pi}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi - \frac{4\pi}{n}} \nu(t) \operatorname{ctg}\frac{t}{2} \sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{-\frac{3+\beta}{2n}\pi} \nu(t) \sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt \int\limits_{-\pi}^{t} \frac{du}{\sin^2 \frac{u}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{-\frac{3+\beta}{2n}\pi} \frac{du}{\sin^2 \frac{u}{2}} \int\limits_{u}^{-\frac{3+\beta}{2n}\pi} \nu(t) \sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt =$$

$$= -2 \int\limits_{-\pi}^{-\frac{3+\beta}{2n}\pi} \frac{du}{u^2} \int\limits_{u}^{-\frac{3+\beta}{2n}\pi} \nu(t) \sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt +$$

$$+ O\left(\int\limits_{-\pi}^{-\frac{3+\beta}{2n}\pi} du \left| \int\limits_{u}^{-\frac{3+\beta}{2n}\pi} \nu(t) \sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt \right|\right).$$

Последнее слагаемое, в силу леммы 3, есть $O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, поэтому

$$I_1 = -2 \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3} \int\limits_{-\frac{3+\beta}{2n}\pi - \frac{2(k+1)\pi}{n}}^{-\frac{3+\beta}{2n}\pi - \frac{2k\pi}{n}} \frac{du}{u^2} \left[\int\limits_{u}^{-\frac{3+\beta}{2n}\pi - \frac{2k\pi}{n}} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{-\frac{3+\beta}{2n}\pi - \frac{2k\pi}{n}}^{-\frac{3+\beta}{2n}\pi} \nu(t) \sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt \right] + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

где интеграл по отрезку длины $O\left(\frac{1}{n}\right)$ вблизи точки $u = -\pi$ оценен сно-

ва по лемме 3. Таким образом,

$$I_1 = -2 \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3} \left(\frac{1}{-\frac{2(k+1)\pi}{n} - \frac{3+\beta}{2n}\pi} - \frac{1}{-\frac{2k\pi}{n} - \frac{3+\beta}{2n}\pi} \right) \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{-\frac{3+\beta}{2n}\pi - \frac{2k\pi}{n}}^{-\frac{3+\beta}{2n}\pi} \nu(t) \sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt +$$

$$+ 2 \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3} \int\limits_{\frac{3+\beta}{2n}\pi - \frac{2(k+1)\pi}{n}}^{\frac{3+\beta}{2n}\pi - \frac{2k\pi}{n}} \nu(t) \sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{-\frac{2k\pi}{n} - \frac{3+\beta}{2n}\pi}\right) dt + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3} \frac{1}{\left(k + \frac{3+\beta}{4}\right)\left(k + \frac{7+\beta}{4}\right)} \int\limits_{-2k\pi}^{0} \nu\left(\frac{t}{n} - \frac{3+\beta}{2n}\pi\right) \cos t\, dt -$$

$$-2 \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3} \int\limits_{-\frac{2(k+3)\pi}{n}}^{-\frac{2(k+2)\pi}{n}} \nu\left(t + \frac{5-\beta}{2n}\pi\right) \cdot$$

$$\cdot \cos nt \left(\frac{1}{t + \frac{5-\beta}{2n}\pi} - \frac{1}{-\frac{2(k+2)\pi}{n} + \frac{5-\beta}{2n}\pi}\right) dt + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3} \frac{1}{k^2} \int\limits_{-2k\pi}^{0} \nu\left(\frac{t}{n} - \frac{3+\beta}{2n}\pi\right) \cos t\, dt + O\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3} \frac{\ln(k+2)}{n^\alpha (k+1)^2}\right) + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Последняя сумма оценена с использованием оценки (6.2). Следовательно,

$$I_1 = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3} \frac{1}{k^2} \int\limits_{-2k\pi}^{0} \left[\varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{t}{n} - \frac{3+\beta}{2n}\pi\right)\right] \cos t\, dt + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Аналогично,

$$I_3 = \int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi}^{\pi} \nu(t) \operatorname{ctg}\frac{t}{2} \sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt =$$

$$= 2 \int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi}^{\pi} \frac{du}{u^2} \int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi}^{u} \nu(t) \sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) =$$

$$=2\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3}\int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi+\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi+\frac{2(k+1)\pi}{n}}\frac{du}{u^2}\left[\int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi+\frac{2k\pi}{n}}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi+\frac{2k\pi}{n}}^{u}\nu(t)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt\right]+O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3}\frac{1}{k^2}\int\limits_0^{2k\pi}\nu\left(\frac{t}{n}+\frac{5-\beta}{2n}\pi\right)\cos t\,dt+O\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3}\frac{\ln(k+2)}{n^\alpha(k+1)^2}\right)+O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3}\frac{1}{k^2}\int\limits_0^{2k\pi}\left[\varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{t}{n}+\frac{5-\beta}{2n}\pi\right)\right]\cos t\,dt+O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Итак, равномерно по всем функциям из $W_\beta^0 H_2^\alpha$

$$r_{n,\beta}(\varphi,x)=\frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3}\frac{1}{k^2}\left\{\int\limits_0^{2k\pi}\left[\varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{t}{n}+\frac{5-\beta}{2n}\pi\right)\right]\cos t\,dt-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{-2k\pi}^{0}\left[\varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{t}{n}-\frac{3+\beta}{2n}\pi\right)\right]\cos t\,dt\right\}+O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

и теорема доказана.

Замечание. Теорема 5 справедлива и при любом $\beta\geqslant 0$, только тогда при доказательстве изменятся интервалы разбиения, а именно:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}=\int\limits_{-\pi}^{\frac{5-\beta'}{2n}\pi-\frac{4\pi}{n}}+\int\limits_{\frac{5-\beta'}{2n}\pi-\frac{4\pi}{n}}^{\frac{5-\beta'}{2n}\pi}+\int\limits_{\frac{5-\beta'}{2n}\pi}^{\pi},$$

где $\beta'=\beta-4\nu$, ν — целое и $\beta'\in[0,4]$.

ЛЕММА 5. *Существует функция* $\psi(x)\in H_2^\alpha$ *такая, что для* $0\leqslant\beta\leqslant 4$ *и* $0<\alpha\leqslant 1$ *справедливо асимптотическое равенство*:

$$r_{n,\beta}(\psi,0)=-\frac{C_2(\alpha)}{\pi}\frac{\ln n}{n^\alpha}+O\left(\frac{\ln\ln n}{n^\alpha}\right).$$

Доказательство. Пусть $f(x)\in H_2^\alpha$ и $f(x)$ такова, что

$$f(x)=f\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)=-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right),\quad f\left(\frac{2-\beta}{2n}\pi\right)=0\ (n\text{ — целое}\geqslant 1)$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f\left(\frac{t}{n}+\frac{5-\beta}{2n}\pi\right)\cos t\,dt=\frac{C_2(\alpha)}{n^\alpha},$$

Существование такой функции доказано автором [см. (7), лемма 1] для класса H_2^1, однако доказательство справедливо и для классов H_2^α при $0<\alpha\leqslant 1$. Для такой функции, в силу леммы 1, имеем:

$$\max_x |f(x)| \leqslant \frac{\pi^\alpha}{2(1+\alpha)n^\alpha}.$$

Пусть

$$d_n = \left[(\ln n)^{\frac{1}{\alpha}}\right] + 1, \quad m(\alpha) = \left[\left(\frac{2}{1+\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]$$

и η — целое $\geqslant m(\alpha)$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{n}\eta, \\ \frac{n^\alpha}{\{2\pi(d_n-\eta)\}^\alpha}\left(x - \frac{2\pi}{n}\eta\right)^\alpha & \text{при} \quad \frac{2\pi}{n}\eta \leqslant x \leqslant \frac{2d_n\pi}{n}, \\ 1 & \text{при} \quad \frac{2d_n\pi}{n} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \varphi(\pi - x) & \text{при} \quad \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi, \\ \varphi(-x) & \text{при} \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0, \end{cases} \tag{6.3}$$

$$\varphi(x+2\pi) = \varphi(x).$$

Очевидно, $\varphi(x) \in \frac{C_1 n^\alpha}{\ln n} H_1^\alpha$, где $C_1 \leqslant \frac{1}{(2\pi)^\alpha} \leqslant 1$.

С помощью $\varphi(x)$ образуем функцию

$$\psi_1(x) = \begin{cases} f(x)\varphi(x) & \text{при } x \geqslant 0, \\ -f(x)\varphi(x) & \text{при } x \leqslant 0 \end{cases} \tag{6.4}$$

[ср. С. Б. Стечкин (21)]. Ясно, что

$$\max_x |\psi_1(x)| \leqslant \frac{\pi^\alpha}{2(1+\alpha)n^\alpha}, \tag{6.5}$$

поэтому условие

$$|\Delta_h^2 \psi_1(x)| \leqslant M|h|^\alpha$$

достаточно проверить только для $0 \leqslant x \leqslant \pi$ и при

$$0 < h \leqslant \frac{\pi}{n}\left(\frac{2}{1+\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant \frac{\pi}{n}(m(\alpha)+1).$$

Имеем:

$$\Delta_h^2 \psi_1(x) = \varphi(x+h)[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] +$$
$$+ 2f(x)[\varphi(x+h) - \varphi(x)] + f(x-h)[\varphi(x-h) - \varphi(x+h)].$$

Отсюда следует:

$$|\Delta_h^2 \psi_1(x)| \leqslant h^\alpha + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\cdot\frac{n^\alpha h^\alpha}{\ln n}\right) + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\cdot\frac{n^\alpha h^\alpha}{\ln n}\right) = h^\alpha\left(1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right).$$

Таким образом, $\psi_1(x) \in \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right) H_2^\alpha$, а поэтому функция

$$\psi(x) = \frac{1}{1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)} \psi_1(x) \tag{6.6}$$

принадлежит классу H_2^α. Согласно теореме 5, в силу $\psi(0) = 0$, имеем:

$$r_{n,\beta}(\psi, 0) = -\frac{1}{2\pi^2\left(1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right)} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3} \frac{1}{k^2}\left\{\int_0^{2k\pi} \psi_1\left(\frac{t}{n} + \frac{5-\beta}{2n}\pi\right)\cos t\,dt -\right.$$
$$\left. - \int_{-2k\pi}^{0} \psi_1\left(\frac{t}{n} - \frac{3+\beta}{2n}\pi\right)\cos t\,dt\right\} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2\pi^2\left(1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right)}\left\{\sum_{k=1}^{d_n+3} + \sum_{k=d_n+4}^{\left[\frac{n}{2}\right]-d_n-1} + \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]-d_n}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3}\right\} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2\pi^2\left(1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right)}\left\{\sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3\right\} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Но, в силу (6.5),

$$\int_0^{2k\pi} \psi_1\left(\frac{t}{n} + \frac{a\pi}{n}\right)\cos t\,dt = O\left(\frac{k}{n^\alpha}\right),$$

поэтому

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{k=1}^{d_n+3} \frac{1}{k^2}\left\{\int_0^{2k\pi} \psi_1\left(\frac{t}{n} + \frac{5-\beta}{2n}\pi\right)\cos t\,dt - \int_{-2k\pi}^{0} \psi_1\left(\frac{t}{n} - \frac{3+\beta}{2n}\pi\right)\cos t\,dt\right\} =$$
$$= O\left(\sum_{k=1}^{d_n+3} \frac{1}{k^2}\left[\frac{k}{n^\alpha} + \frac{k}{n^\alpha}\right]\right),$$

и так как $d_n = \left[(\ln n)^{\frac{1}{\alpha}}\right] + 1$, то

$$\sum\nolimits_1 = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{d_n+3}\frac{1}{k}\right) = O\left(\frac{\ln\ln n}{n^\alpha}\right).$$

Далее,

$$\sum\nolimits_3 = \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]-d_n}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3} \frac{1}{k^2}\left\{\int_0^{2k\pi} \psi_1\left(\frac{t}{n} + \frac{5-\beta}{2n}\pi\right)\cos t\,dt - \int_{-2k\pi}^{0} \psi_1\left(\frac{t}{n} - \frac{3+\beta}{2n}\pi\right)\cos t\,dt\right\} =$$
$$= O\left(\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]-d_n}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3} \frac{1}{k^2}\left[\frac{k}{n^\alpha} + \frac{k}{n^\alpha}\right]\right) + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\ln\frac{n}{n-2d_n}\right) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Наконец, так как

$$\psi_1(t)=\begin{cases} f(t) & \text{при } \frac{5-\beta}{2n}\pi+\frac{2(d_n+4)}{n}\pi\leqslant t\leqslant\frac{5-\beta}{2n}\pi+\frac{2\left(\left[\frac{n}{2}\right]-d_n\right)}{n}\pi,\\ -f(t) & \text{при } \frac{5-\beta}{2n}\pi-\frac{2\left(\left[\frac{n}{2}\right]-d_n\right)}{n}\pi\leqslant t\leqslant\frac{5-\beta}{2n}\pi-\frac{2(d_n+4)}{n}\pi,\end{cases}$$

то

$$\sum\nolimits_2=\sum_{k=d_n+4}^{\left[\frac{n}{2}\right]-d_n-1}\frac{1}{k^2}\left[\int_0^{2k\pi}\psi_1\left(\frac{t}{n}+\frac{5-\beta}{2n}\pi\right)\cos t\,dt-\int_{-2k\pi}^{0}\psi_1\left(\frac{t}{n}-\frac{3+\beta}{2n}\pi\right)\cos t\,dt\right]=$$

$$=\sum_{k=d_n+4}^{\left[\frac{n}{2}\right]-d_n-1}\frac{1}{k^2}\left\{\int_{2(d_n+4)\pi}^{2k\pi}f\left(\frac{t}{n}+\frac{5-\beta}{2n}\pi\right)\cos t\,dt+\right.$$

$$+\int_{-2k\pi}^{-2(d_n+4)\pi}f\left(\frac{t}{n}-\frac{3+\beta}{2n}\pi\right)\cos t\,dt+\left[\int_0^{2(d_n+4)\pi}\psi_1\left(\frac{t}{n}+\frac{5-\beta}{2n}\pi\right)\cos t\,dt-\right.$$

$$\left.\left.-\int_{-2(d_n+4)\pi}^{0}\psi_1\left(\frac{t}{n}-\frac{3+\beta}{2n}\pi\right)\cos t\,dt\right]\right\}.$$

Выражение в квадратных скобках, в силу (6.5), имеет порядок $O\left(\frac{d_n}{n^\alpha}\right)$, а так как, по условию,

$$\int_0^{2\pi}f\left(\frac{t}{n}+\frac{5-\beta}{2n}\pi\right)\cos t\,dt=\frac{\pi C_2(\alpha)}{n^\alpha},$$

то

$$\sum\nolimits_2=\sum_{k=d_n+4}^{\left[\frac{n}{2}\right]-d_n-1}\frac{1}{k^2}\left[\frac{\pi C_2(\alpha)(k-d_n-4)}{n^\alpha}+\frac{\pi C_2(\alpha)(k-d_n-4)}{n^\alpha}\right]+$$

$$+O\left(\frac{d_n}{n^\alpha}\sum_{k=d_n+4}^{\left[\frac{n}{2}\right]-d_n-1}\frac{1}{k^2}\right)=\frac{2\pi C_2(\alpha)}{n^\alpha}\sum_{k=d_n+4}^{\left[\frac{n}{2}\right]-d_n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{d_n+4}{k^2}\right)+O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)=$$

$$=\frac{2\pi C_2(\alpha)}{n^\alpha}\ln\frac{n-2d_n}{2d_n}+O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)=2\pi C_2(\alpha)\frac{\ln n}{n^\alpha}+O\left(\frac{\ln d_n}{n^\alpha}\right)=$$

$$=2\pi C_2(\alpha)\frac{\ln n}{n^\alpha}+O\left(\frac{\ln\ln n}{n^\alpha}\right).$$

Таким образом,

$$r_{n,\beta}(\psi, 0) = -\frac{1}{2\pi^2\left(1+O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right)}\left[2\pi C_2(\alpha)\frac{\ln n}{n^\alpha} + O\left(\frac{\ln\ln n}{n^\alpha}\right)\right] + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) =$$

$$= -\frac{C_2(\alpha)}{\pi}\frac{\ln n}{n^\alpha} + O\left(\frac{\ln\ln n}{n^\alpha}\right),$$

и лемма доказана.

ТЕОРЕМА 6. *Для любого* $0<\alpha\leqslant 1$ *справедливо асимптотическое равенство*:

$$\mathscr{E}_{S_n}(W_\beta^0 H_2^\alpha) = \sup_{f\in W_\beta^0 H_2^\alpha} \| r_{n,\beta}(\varphi, x)\| = \frac{C_2(\alpha)}{\pi}\frac{\ln n}{n^\alpha} + O\left(\frac{\ln\ln n}{n^\alpha}\right).$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть $r_{n,\beta}(\varphi, x)$ в точке $x=0$, так как иначе мы рассмотрели бы функцию

$$f_1(x) = f(x+x_0) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+x_0+t)\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt.$$

Можно также считать, что $\varphi(0)=0$, так как иначе мы рассмотрели бы функцию $\varphi_1(t)=\varphi(t)-\varphi(0)$.

Для оценки

$$\sup_{f\in W_\beta^0 H_2^\alpha} |r_{n,\beta}(\varphi, 0)|$$

сверху применим к представлению $r_{n,\beta}(\varphi, 0)$ из теоремы 5 лемму 2. Имеем:

$$\sup_{f\in W_\beta^0 H_2^\alpha} |r_{n,\beta}(\varphi, 0)| = \sup_{\varphi\in H_2^\alpha}\left|\frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3}\frac{1}{k^2}\left\{\int_0^{2k\pi}\varphi\left(\frac{t}{n}+\frac{5-\beta}{2n}\pi\right)\cos t\,dt -\right.\right.$$

$$\left.\left. -\int_{-2k\pi}^{0}\varphi\left(\frac{t}{n}-\frac{3+\beta}{2n}\pi\right)\cos t\,dt\right\}\right| + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3}\frac{1}{k^2}\left\{\sup_{\varphi\in H_2^\alpha}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2k\pi}\varphi\left(\frac{t}{n}+\frac{5-\beta}{2n}\pi\right)\cos t\,dt\right| +\right.$$

$$\left. +\sup_{\varphi\in H_2^\alpha}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-2k\pi}^{0}\varphi\left(\frac{t}{n}-\frac{3+\beta}{2n}\pi\right)\cos t\,dt\right|\right\} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3}\frac{1}{k^2}\left\{\frac{kC_2(\alpha)+O(\ln k)}{n^\alpha}+\frac{kC_2(\alpha)+O(\ln k)}{n^\alpha}\right\} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) =$$

$$= \frac{C_2(\alpha)}{\pi}\frac{\ln n}{n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

т. е.

$$\sup_{f \in W_\beta^0 H_2^\alpha} |r_{n,\beta}(\varphi, 0)| \leqslant \frac{C_2(\alpha)}{\pi} \frac{\ln n}{n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right). \tag{6.7}$$

Для оценки

$$\sup_{f \in W_\beta^0 H_2^\alpha} |r_{n,\beta}(\varphi, 0)|$$

снизу, в силу леммы 5, для функции $\psi(x)$, определенной в (6.6), имеем:

$$\sup_{f \in W_\beta^0 H_2^\alpha} |r_{n,\beta}(\varphi, 0)| \geqslant |r_{n,\beta}(\psi, 0)| = \frac{C_2(\alpha)}{\pi} \frac{\ln n}{n^\alpha} + O\left(\frac{\ln\ln n}{n^\alpha}\right). \tag{6.8}$$

Таким образом, из (6.7) и (6.8) заключаем, что

$$\sup_{f \in W_\beta^0 H_2^\alpha} |r_{n,\beta}(\varphi, 0)| = \frac{C_2(\alpha)}{\pi} \frac{\ln n}{n^\alpha} + O\left(\frac{\ln\ln n}{n^\alpha}\right),$$

и теорема доказана.

Полагая $\beta = 0$ и $\beta = 1$, получаем

Следствие. *При любом* $0 < \alpha \leqslant 1$ *справедливы асимптотические равенства:*

$$\left.\begin{matrix} \mathscr{E}_{S_n}(H_2^\alpha) \\ \mathscr{E}_{S_n}(\overline{H}_2^\alpha) \end{matrix}\right\} = \frac{C_2(\alpha)}{\pi} \frac{\ln n}{n^\alpha} + O\left(\frac{\ln\ln n}{n^\alpha}\right).$$

ТЕОРЕМА 7. *При любых* $r > 0$ *и* $0 < \alpha \leqslant 1$ *справедливо асимптотическое равенство:*

$$\mathscr{E}_{S_n}(W_\beta^r H_2^\alpha) = \sup_{f \in W_\beta^r H_2^\alpha} \|R_n(f, x)\| = \frac{C_2(\alpha)}{\pi} \frac{\ln n}{n^{r+\alpha}} + O\left(\frac{\ln\ln n}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Доказательство. В силу теоремы 4, имеем:

$$\sup_{f \in W_\beta^r H_2^\alpha} \left\| R_n(f, x) \right\| = \frac{1}{(n+1)^r} \sup_{f \in W_\beta^0 H_2^\alpha} \left\| r_{n,\beta}(\varphi, x) \right\| + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Применяя теорему 6, получаем, что

$$\sup_{f \in W_\beta^r H_2^\alpha} \|R_n(f, x)\| = \frac{C_2(\alpha)}{\pi} \frac{\ln n}{n^{r+\alpha}} + O\left(\frac{\ln\ln n}{n^{r+\alpha}}\right),$$

и теорема доказана.

Полагая $\beta = r$ и $\beta = r + 1$, получаем

Следствие. *При любых* $r > 0$ *и* $0 < \alpha \leqslant 1$ *справедливы асимптотические равенства:*

$$\left.\begin{matrix} \mathscr{E}_{S_n}(W^r H_2^\alpha) \\ \mathscr{E}_{S_n}(\overline{W^r H_2^\alpha}) \end{matrix}\right\} = \frac{C_2(\alpha)}{\pi} \frac{\ln n}{n^{r+\alpha}} + O\left(\frac{\ln\ln n}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Поступило
2. I. 1957

ЛИТЕРАТУРА

[1] Alexits G., Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction par les moyennes de sa série de Fourier, Matematikai es Fezikai Lapok, 48 (1941), 410—433.

[2] Бернштейн С. Н., О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени, Сообщ. Харьк. матем. о-ва, серия 2, т. 13 (1912), 49—194.

[3] La Valée Poussin Ch., Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Paris, 1919.

[4] Вороновская Е. В., Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна, Доклады Ак. наук СССР (1932), 79—85.

[5] Jackson D., Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung, Göttingen, 1911.

[6] Jackson D., The theory of approximation, N. Y., 1930.

[7] Ефимов А. В., О коэффициентах Фурье функций класса $\widetilde{H}_2^1$, Успехи матем. наук, XII, вып. 3 (75) (1957), 303—311.

[8] Ефимов А. В., Оценка модуля непрерывности функций класса $\widetilde{H}_2^1$, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 21 (1957), 283—288.

[9] Ефимов А. В., О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера, Успехи матем. наук, XII, вып. 2 (74), 228—231.

[10] Zamansky M., Classes de saturation de certains procédés d'approximation des séries de Fourier des fonctions continues et applications a quelques problèmes d'approximation, Ann. Sci. Ecole. norm. sup., 66 (1949), 19—93.

[11] Zygmund A., Smooth functions, Duke Mathem. J., 12 (1945), 47—76.

[12] Kolmogoroff A., Zur Grössenordnung des Restglides Fourierscher Reihen differenzierbarer Funktionen, Ann. of Mathem., 36 (1935), 521—526.

[13] Lebesgue H., Sur la représentation trigonometrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz, Bull. Soc. Math. France, 38 (1910), 184—210.

[14] Никольский С. М., Асимптотическая оценка остатка при приближении суммами Фурье, Доклады Ак. наук СССР, 32 (1941), 386—389.

[15] Никольский С. М., Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 4 (1940), 501—508.

[16] Никольский С. М., Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами, Труды Математического института им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, XV, 1945.

[17] Пинкевич В. Т., О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 4 (1940), 521—528.

[18] Privaloff I., Sur les fonctions conjuguées, Bull. Soc. Math. France, 44 (1916), 100—103.

[19] Сакович Г. Н., Некоторые свойства обобщенно-квазигладких функций, Студентські наукові праці, Киевский гос. университет, сборник XVI (1955), 119—150.

[20] Стечкин С. Б., О порядке наилучших приближений непрерывных функций, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 15 (1951), 219—242.

[21] Стечкин С. Б., О теореме Колмогорова — Селиверстова, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 17 (1953), 499—512.

[22] Стечкин С. Б., О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими многочленами, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 20 (1956), 643—648.

[23] Стечкин С. Б., Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 17 (1953), 461—472.

[24] Тиман А. Ф., О квази-гладких функциях, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 15 (1951), 243—254.

[25] Тиман А. Ф., Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона, Доклады Ак. наук СССР, 74 (1950), 17—20.

[26] Тиман А. Ф. и Дзядык В. К., О наилучшем приближении квазигладких функций обыкновенными полиномами, Доклады Ак. наук СССР, 75 (1950), 499—501.

[27] Харшиладзе Ф. И., О модуле непрерывности некоторых классов функций, Ученые записки Ленинградского гос. университета, серия матем. наук, вып. 19 (1950), 155—159.

[28] Титчмарш Е., Теория функций, ГИТТЛ, 1951.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 117—134

В. Г. КАРМАНОВ

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В работе исследуются некоторые краевые задачи для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sgn} y \, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Вместе с доказательством существования решений дается обоснование применения метода конечных разностей для решения рассматриваемых задач.

В настоящей работе решаются некоторые краевые задачи для уравнения смешанного типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sgn} y \, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \qquad (1)$$

Первыми работами, в которых рассматривались вопросы существования решений краевых задач для уравнения (1), были работа М. А. Лаврентьева и А. В. Бицадзе ([1]) и работа А. В. Бицадзе ([2]).

Задачи, рассматриваемые в настоящей работе, являются обобщениями некоторых задач, изученных А. В. Бицадзе. Основным методом, который применяется здесь для решения этих задач, является метод конечных разностей.

§ 1. Постановка задачи T^*. Рассмотрим на плоскости xOy конечную область D, ограниченную в верхней полуплоскости некоторой линией σ, имеющей с осью Ox две общие точки $A(a, 0)$ и $B(b, 0)$ $(b > a)$. В нижней полуплоскости область D ограничена отрезками $[AC]$ и $[BC]$ характеристик $y = a - x$ и $y = x - b$; C — точка пересечения этих характеристик.

З а д а ч а T^*. Требуется найти такую функцию $u(x, y)$, что

1) u является решением уравнения (1) в области D при $y \neq 0$;

2) u непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$;

3) $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ непрерывны внутри D;

4) если линия σ такова, что все ее точки регулярны в смысле Перрона, то на линии σ и на одной из характеристик, например на $[AC]$, функция u принимает заданные значения:

$$u|_\sigma = f, \qquad (1.1)$$

$$u|_{[AC]} = \varphi(x), \qquad (1.2)$$

где

$$f(A) = \varphi(A), \qquad (1.3)$$

причем f непрерывна, а φ дважды дифференцируема.

Замечание. Область D может быть многосвязной. Существенной является односвязность гиперболической части D_2 области D (т. е. той части, которая соответствует значениям $y < 0$). В задаче T^* областью D_2 является треугольник ABC.

§ 2. Метод решения задачи T^*. Покажем, что задача T^* сводится к двум более простым задачам, причем решение одной из этих двух задач выписывается в квадратурах.

Рассмотрим на плоскости односвязную область D_0 следующего вида: в верхней полуплоскости она ограничена полуокружностью σ_0 с концами в точках $A_0(0, 0)$ и $B_0(1, 0)$; в нижней — отрезками $[A_0C_0]$ и $[B_0C_0]$, где точка C_0 имеет координаты $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Не ограничивая общности задачи, можно полагать, что область D целиком, вместе со своей границей, принадлежит области D_0.

Обозначим через $[A'C']$ проекцию отрезка $[AC]$ на отрезок $[A_0C_0]$ по направлению $y = x$ и рассмотрим на линии $\sigma_0 + [A_0C_0]$ такую дважды дифференцируемую функцию ψ, для которой

$$\psi|_{[A'C']} = \varphi\left(x + \frac{a}{2}\right) \quad \text{и} \quad \psi|_{\sigma_0} = 0 \tag{2.1}$$

(на $[A_0A']$ и $[C'C_0]$ функция ψ может вести себя достаточно произвольно, лишь бы выполнялось условие двукратной дифференцируемости ее на $\sigma_0 + [A_0C_0]$ и условие (2.1). Ясно, что такая функция ψ всегда найдется).

А. В. Бицадзе доказал [см. ([2]), гл. 1, § 1—4], что существует единственная функция $v(x, y)$, обладающая следующими свойствами:

1) v является решением уравнения (1) в области D_0 при $y \neq 0$;

2) v непрерывна в замкнутой области $\overline{D}_0$;

3) $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ непрерывны внутри D_0;

4) на полуокружности σ_0 и на одной из характеристик, например на $[A_0C_0]$, функция v принимает заданные значения.

Если в качестве граничной функции взята вышеопределенная функция ψ [см. (2.1)], то v выписывается в квадратурах:

$$v(x, y) = \begin{cases} \operatorname{Re} \dfrac{}{\pi(1+i)} \displaystyle\int_0^1 \sqrt{\dfrac{z(1-z)}{t(1-t)}} \left(\dfrac{1}{t-z} - \dfrac{1}{t+z-2tz}\right) \psi\left(\dfrac{t}{2}\right) dt & \text{при } y \geqslant 0, \\ v(x+y, 0) - \psi\left(\dfrac{x+y}{2}\right) + \psi\left(\dfrac{x-y}{2}\right) & \text{при } y < 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Предположим теперь, что мы умеем строить функцию $w(x, y)$, удовлетворяющую в области D условиям 1), 2), 3) задачи T^* и следующему условию:

4) на линии σ и на отрезке $[AC]$ функция w принимает заданные значения:

$$w|_\sigma = v|_\sigma - f, \tag{2.3}$$

$$w|_{[AC]} = v(A) - f(A). \tag{2.4}$$

Тогда функция $u(x, y) = v(x, y) - w(x, y)$ является решением задачи T^*. Действительно, легко видеть, что u удовлетворяет условиям 1), 2), 3) и (1.1) задачи T^*. Покажем, что выполняются также и условия (1.2) и (1.3). В точке $Q(x, a-x) \in [AC]$, в силу (2.4) и (1.3), получаем:

$$u(Q) = v(Q) - w(Q) = \\ = v(Q) - v(A) + f(A) = v(Q) - v(A) + \varphi(A). \quad (2.5)$$

На основании (2.2) и (2.1),

$$v(Q) - v(A) \equiv v(x, a-x) - v(a, 0) = \\ = -\psi\left(\frac{a}{2}\right) + \psi\left(x - \frac{a}{2}\right) = -\varphi(a) + \varphi(x) \equiv -\varphi(A) + \varphi(Q), \quad (2.6)$$

и, окончательно, из (2.5) и (2.6) выводим:

$$u(Q) = \varphi(Q).$$

Итак, проблема решения задачи T^* свелась к построению решения следующей задачи.

Задача T_1^*. Найти такую функцию $w(x, y)$, что

1) w является решением уравнения (1) в области D при $y \neq 0$;

2) w непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$;

3) $\frac{\partial w}{\partial x}$ и $\frac{\partial w}{\partial y}$ непрерывны внутри D;

4) на линии σ и на отрезке $[AC]$ функция w принимает заданные значения:

$$w|_{\sigma} = F, \quad (2.7)$$

$$w|_{[AC]} = F(A), \quad (2.8)$$

где F — непрерывная функция.

§ 3. Решение задачи T_1^*. Заметим, что в гиперболической части D_2 области D решение w уравнения (1), принимающее на характеристике $[AC]$ постоянное значение, имеет вид

$$w(x, y) = w(x+y, 0);$$

поэтому для решения задачи T_1^* достаточно построить функцию w в замкнутой области $\overline{D}_1$, где D_1 — эллиптическая часть области D. Так как от функции w требуется непрерывность первых производных внутри D, то в интервале (AB) функция w должна удовлетворять условию

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Функцию w будем строить в области $\overline{D}_1$, пользуясь методом конечных разностей.

Рассмотрим квадратную сетку S_h, образованную прямыми $y = k \cdot h$ и $x = a + lh$ ($h > 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Введем обозначения:

$\overline{D}_{1h}$ — область, состоящая из квадратов, целиком принадлежащих $D_1 + (AB)$.

σ_h — совокупность таких квадратов, принадлежащих $\overline{D}_{1h}$, у которых хотя бы одна из вершин лежит на границе области $\overline{D}_{1h}$, исключая те квадраты, нижние основания которых лежат на (AB), а боковые стороны не принадлежат целиком границе области $\overline{D}_{1h}$.

$(AB)_h$ — совокупность тех сторон квадратов сетки, принадлежащих $\overline{D}_{1h} - \sigma_h$, которые целиком лежат внутри интервала (AB).

$D_{1h} = \overline{D}_{1h} - \sigma_h - (AB)_h$.

F_h — функция, определенная в каждом узле из σ_h значениями F в одной из точек границы σ, ближайшей к этому узлу.

D_1^* — область, ограниченная некоторым отрезком $[A^*B^*]$, целиком лежащим внутри интервала (AB), и некоторой линией с концами в точках A^* и B^*, все точки которой (за исключением точек A^* и B^*) являются внутренними точками области D_1.

D_1^{**} — область, содержащаяся целиком, вместе со своей границей, внутри области D_1.

$$w_x(x, y) = \frac{1}{h}[w(x+h, y) - w(x, y)], \quad w_{\bar{x}}(x, y) = \frac{1}{h}[w(x, y) - w(x-h, y)],$$

$$w_y(x, y) = \frac{1}{h}[w(x, y+h) - w(x, y)], \quad w_{\bar{y}}(x, y) = \frac{1}{h}[w(x, y) - w(x, y-h)]$$

— разностные отношения первого порядка; аналогично определяются разностные отношения высших порядков: w_{xx}, $w_{x\bar{x}}$, w_{yy}, $w_{y\bar{y}}$ и т. д.

$$w_l(x, y) = w_x(x, y) - w_y(x, y),$$

$$\Delta_h w(x, y) = \frac{1}{h^2}[w(x+h, y) + w(x-h, y) + w(x, y+h) + w(x, y-h) - 4w(x, y)].$$

Определим в узловых точках, принадлежащих $\overline{D}_{1h}$, функцию $w_h(x, y)$ следующим образом. В узловых точках $(x, y) \in D_{1h} + (AB)_h$ она удовлетворяет уравнению

$$L_h w_h(x, y) = \begin{cases} \Delta_h w_h(x, y) = 0 & \text{при } y > 0, \\ -w_{hl}(x, y) = 0 & \text{при } y = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

а в узловых точках, принадлежащих σ_h, — условию

$$w_h(x, y) = F_h. \tag{3.2}$$

Замечание 1. Говоря о каких-либо свойствах функции $w_h(x, y)$ в некоторой области (например, D_{1h} или D_1^*), мы всегда будем считать, что функция w_h рассматривается на совокупности узловых точек из этой области.

ТЕОРЕМА 1. *Функция $w_h(x, y)$, не равная константе, может принимать наибольшее и наименьшее значения лишь в узловых точках, принадлежащих σ_x.*

Действительно, из определения оператора L_h нетрудно видеть, что предположение, будто функция w_h в некоторых узловых точках из $D_{1h}+(AB)_h$ принимает значение M (или m), наибольшее (или наименьшее) среди всех значений w_h в узловых точках из $\overline{D}_{1h}$, приводит к противоречивому результату, что w_h принимает во всех узловых точках из $\overline{D}_{1h}$ значение M (или m).

Очевидны следующие два следствия.

Следствие 1. *Функция w_h определена в $\overline{D}_{1h}$ единственным образом значениями F_h на σ_h.*

Следствие 2. *В любой узловой точке (x, y) из $\overline{D}_{1h}$ имеет место неравенство*

$$|w_h(x, y)| \leqslant \max_{\sigma_h} |F_h| = M. \tag{3.3}$$

Пусть $h=\frac{1}{2^n}$ и $w_h=w^{(n)}$ $(n=1, 2, \ldots)$. Так как функция $w^{(n)}$ определяется в любой области D_1^{**} соотношением $\Delta_h w^{(n)}=0$, то имеет место

ТЕОРЕМА 2 [см. (3)]. *Во всякой области D_1^{**} семейства всех разностных отношений от функции $w^{(n)}$ равномерно ограничены.*

ТЕОРЕМА 3. *Во всякой области D_1^{*} семейство $\{w_l^{(n)}\}$ равномерно ограничено.*

Доказательство. Поскольку из теоремы 2 следует, что во всякой области D_1^{**} семейство $\{w_l^{(n)}\}$ равномерно ограничено, то теорему достаточно доказать для любого прямоугольника Q: $-\alpha \leqslant x \leqslant +\alpha$, $0 \leqslant y \leqslant \beta$ (начало координат для простоты записи мы помещаем в середину нижнего основания прямоугольника Q). Пусть числа $\alpha>0$ и $\beta>0$ таковы, что, начиная с достаточно большого числа n, стороны прямоугольника Q принадлежат сетке. Для того чтобы оценить $w_l^{(n)}$ в Q, воспользуемся известным приемом С. Н. Бернштейна (4).

Определим в узловых точках прямоугольника Q функцию *

$$Z_1(x, y) = w_l^2(x, y)\cdot R(x) + C_1 W_1(x, y), \tag{3.4}$$

где $R(x)=(\alpha^2-x^2)^2$, $W_1(x, y) = w^2(x, y) + w^2(x+h, y) + w^2(x-h, y)$, а C_1 — константа.

Из (3.4) и (3.3), из условия, что $w_l(x, y)=0$ при $y=0$ и из ограниченности w_l в D_1^{**} следует ограниченность Z_1 на сторонах прямоугольника Q:

$$Z_1 < K_1. \tag{3.5}$$

Если мы покажем, что внутри прямоугольника Q

$$\Delta_h Z_1 \geqslant 0,$$

то неравенство (3.5) будет иметь место во всех узловых точках из Q и, следовательно,

$$w_l^2(x, y) < \frac{K_1}{R(x)}, \tag{3.6}$$

* Индекс n, во избежание громоздкой записи, в ряде случаев опущен.

т. е. $w_l^{(n)}$ равномерно ограничены в прямоугольнике Q^*: $-\alpha^* \leqslant x \leqslant \alpha^*$, $0 \leqslant y \leqslant \beta$, где $\alpha^* > \alpha$.

Оценим $\Delta_h Z_1$. Обозначим $r_1 = 2x + h$ и $r_2 = 2x - h$. Нетрудно проверить, что

$$\Delta_h W_1(x, y) \geqslant \frac{1}{2}\left[w_l^2(x, y) + w_l^2(x+h, y) + w_l^2(x-h, y)\right]$$

и

$$\Delta_h\left[w_l^2(x, y)\cdot R\right] = w_l^2(x, y)\cdot R_{x\bar{x}} + R\left[w_{lx}^2(x, y) + w_{l\bar{x}}^2(x, y) + w_{ly}^2(x, y) + w_{l\bar{y}}^2(x, y)\right] + \left[w_l(x+h, y) + w_l(x, y)\right]\cdot w_{lx}(x, y)\left[-2r_1\sqrt{R} + hr_1^2\right] + \left[w_l(x-h, y) + w_l(x, y)\right]\cdot w_{l\bar{x}}(x, y)\cdot\left[-2r_2\sqrt{R} - hr_2^2\right] \geqslant w_l^2(x, y)\cdot R_{x\bar{x}} + R\cdot\left[w_{lx}^2(x, y) + w_{l\bar{x}}^2(x, y) + w_{ly}^2(x, y) + w_{l\bar{y}}^2(x, y)\right] + r_1^2\left[w_l^2(x+h, y) - w_l^2(x, y)\right] + r_2^2\left[w_l^2(x-h, y) - w_l^2(x, y)\right] - 2r_1\left[w_l(x+h, y) + w_l(x, y)\right]\cdot w_{lx}(x, y)\sqrt{\ } - 2r_2\left[w_l(x-h, y) + w_l(x, y)\right]\cdot w_{l\bar{x}}(x, y)\sqrt{R}. \quad (3.7)$$

Оценим два последних слагаемых:

$$-2r_1\left[w_l(x+h, y) + w_l(x, y)\right]\cdot w_{lx}(x, y)\sqrt{R} \geqslant -2r_1^2 w_l^2(x+h, y) - 2r_1^2 w_l^2(x, y) - R\cdot w_{lx}^2(x, y),$$

$$-2r_2\left[w_l(x-h, y) + w_l(x, y)\right] w_{l\bar{x}}(x, y)\sqrt{R} \geqslant -2r_2^2 w_l^2(x-h, y) - 2r_2^2 w_l^2(x, y) - R\cdot w_{l\bar{x}}^2(x, y).$$

Из (3.7) и из этих неравенств получаем:

$$\Delta_h\left[w_l^2(x, y)\cdot R\right] \geqslant w_l^2(x, y)\left[R_{x\bar{x}} - 3r_1^2 - 3r_2^2\right] - r_1^2 w_l^2(x+h, y) - r_2^2 w_l^2(x-h, y)$$

и окончательно:

$$\Delta_h Z_1(x, y) = \Delta_h\left[w_l^2(x, y)\cdot R\right] + C_1\Delta_h W_1(x, y) \geqslant \left(\frac{1}{2}C_1 - K_2\right)\left[w_l^2(x, y) + w_l^2(x+h, y) + w_l^2(x-h, y)\right],$$

где

$$K_2 = \max\left\{\max_Q\left|R_{x\bar{x}} - 3r_1^2 - 3r_2^2\right|, \quad \max_Q r_1^2, \max_Q r_2^2\right\}.$$

Выбирая $_1 \geqslant 2K_2$, получаем $\Delta_h Z_1 \geqslant 0$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Из равномерной ограниченности семейства $\{w_l^{(n)}\}$ в D_1^* следует равномерная ограниченность семейства $\{w_{lx}^{(n)}\}$ в D_1^*.*

Так же, как и в предыдущем случае, теорему достаточно доказать для всякого прямоугольника Q. Выбрав функцию

$$Z_2(x, y) = w_{lx}^2(x, y)\cdot R(x) + C_1 W_2(x, y),$$

где

$$W_2(x, y) = w_l^2(x, y) + w_l^2(x+h, y) + w_l^2(x-h, y),$$

нетрудно заметить, что на сторонах прямоугольника Q функция Z_2 ограничена; поэтому если внутри прямоугольника $\Delta_h Z_2 \geqslant 0$, то функция Z_2 будет ограничена во всех узловых точках из Q и, следовательно, семейство $\{w_{lx}^{(n)}\}$ будет равномерно ограничено в прямоугольнике Q^*. Оценить $\Delta_h Z_2$, после того как мы уже оценили $\Delta_h Z_1$, не представляет труда, если заметить, что функции w_l и w_{lx} удовлетворяют в D_{1h} конечно-разностному уравнению Лапласа.

Повторяя выкладки предыдущей теоремы применительно к нашему случаю, получим:

$$\Delta_h Z_2(x, y) \geqslant \left(\frac{1}{2} C_1 - K_2\right)[w_{lx}^2(x, y) + w_{lx}^2(x+h, y) + w_{lx}^2(x-h, y)],$$

где C_1 и K_2 — те же, что и раньше.

Замечание 2. Таким же образом доказывается равномерная ограниченность в D_1^* семейств разностных отношений по x более высоких порядков от функции $w_l^{(n)}$.

ТЕОРЕМА 5. *Из равномерной ограниченности семейств* $\{w^{(n)}\}$ *и* $\{w_{lx}^{(n)}\}$ *в* D_1^* *и семейства* $\{w_x^{(n)}\}$ *в* D_1^{**} *следует равномерная ограниченность семейства* $\{w_x^{(n)}\}$ *в* D_1^*.

Доказательство. Ясно, что теорему достаточно доказать для всякого параллелограмма P: $|x+y| \leqslant \alpha$, $0 \leqslant y \leqslant \beta$, целиком принадлежащего области D (начало координат помещаем в середину нижнего основания параллелограмма).

Пусть числа $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ таковы, что, начиная с достаточно большого числа n, точка $(\alpha - \beta, \beta)$ является узловой точкой сетки. Определим в узловых точках параллелограмма P функцию

$$Z_3(x, y) = w_x^2(x, y) \cdot \overline{R}(x, y) + C_2[W_1(x, y) + (x+y)^2],$$

где $\overline{R}(x, y) = [\alpha^2 - (x+y)^2]^2$, W_1 — то же, что и в теореме 3, $C_2 > 0$ — константа.

Ясно, что на сторонах $x + y = \pm\alpha$ и $y = \beta$ функция Z_3 ограничена. Если в узловых точках, лежащих внутри параллелограмма и внутри его нижнего основания, $L_h Z_3 \geqslant 0$, то нетрудно видеть, что Z_3 может принимать наибольшее значение только на сторонах $x + y = \pm\alpha$, $y = \beta$ и, следовательно, Z_3 будет ограничена в P. Отсюда следует ограниченность w_x в параллелограмме P^*: $|x+y| \leqslant \alpha^*$, $0 \leqslant y \leqslant \beta$, где $\alpha^* < \alpha$.

Оценим $L_h Z_3$. При $y = 0$ имеем:

$$-[Z_3(x, y)]_l = \frac{1}{h}[Z_3(x, y+h) - Z_3(x+h, y)] = 0.$$

Пусть $y > 0$. Обозначим

$$\overline{r}_1 = 2(x+y) + h, \quad \overline{r}_2 = 2(x+y) - h.$$

Вычислим $\Delta_h [w_x^2(x, y) \cdot \overline{R}]$:

$$\begin{aligned}\Delta_h [w_x^2(x, y)\overline{R}] = 2w_x^2(x, y)\,\overline{R}_{x\bar{x}} + \\ + \overline{R} \cdot [w_{x\bar{x}}^2(x, y) + w_{xx}^2(x, y) + w_{y\bar{y}}^2(x, y) + w_{yy}^2(x, y)] + \\ + \bar{r}_1^2 [w_x^2(x + h, y) - 2w_x^2(x, y) + w_x^2(x, y + h)] + \\ + \bar{r}_2^2 [w_x^2(x - h, y) - 2w_x^2(x, y) + w_x^2(x, y - h)] - \\ - 2\bar{r}_1 [w_x(x + h, y) + w_x(x, y)]\, w_{xx}(x, y) \sqrt{\overline{R}} - \\ - 2\bar{r}_2 [w_x(x - h, y) + w_x(x, y)]\, w_{x\bar{x}}(x, y) \sqrt{\overline{R}} - \\ - 2\bar{r}_1 [w_x(x, y + h) + w_x(x, y)]\, w_{xy}(x, y) \sqrt{\overline{R}} - \\ - 2\bar{r}_2 [w_x(x, y - h) + w_x(x, y)]\, w_{x\bar{y}}(x, y) \sqrt{\overline{R}}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Оценим четыре последних слагаемых правой части. Первые два из них оцениваются без труда:

$$\begin{aligned}-2\bar{r}_1 [w_x(x + h, y) + w_x(x, y)]\, w_{xx}(x, y) \sqrt{\overline{R}} \geqslant \\ \geqslant - 2r_1^2 w_x^2(x + h, y) - 2\bar{r}_1^2 w_x^2(x, y) - \overline{R} w_{xx}^2(x, y),\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}- 2\bar{r}_2 [w_x(x - h, y) + w_x(x, y)]\, w_{x\bar{x}}(x, y) \sqrt{\overline{R}} \geqslant \\ \geqslant - 2\bar{r}_2^2 w_x^2(x - h, y) - 2\bar{r}_2^2 w_x^2(x, y) - \overline{R} \cdot w_{x\bar{x}}^2(x, y).\end{aligned} \tag{3.10}$$

Для оценки остальных двух слагаемых воспользуемся условием равномерной ограниченности $w_{lx}^{(n)}$ в D_1^*, из которого следует существование такой константы K_3, что для всех n будут иметь место неравенства

$$- | w_x^{(n)}(x, y + h) | \geqslant - K_3 h - | w_x^{(n)}(x + h, y) |$$

и

$$- | w_x^{(n)}(x, y - h) | \geqslant - K_3 h - | w_x^{(n)}(x - h, y) |.$$

Пользуясь ими, получаем:

$$\begin{aligned}- 2\bar{r}_1 [w_x(x, y + h) + w_x(x, y)] \cdot w_{xy}(x, y) \cdot \sqrt{\overline{R}} \geqslant \\ \geqslant - 3\bar{r}_1^2 [K_3^2 h^2 + w_x^2(x + h, y) + w_x^2(x, y)] - \overline{R} \cdot w_{xy}^2(x,y)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}- 2\bar{r}_2 [w_x(x, y - h) + w_x(x, y)] \cdot w_{x\bar{y}}(x,y) \cdot \sqrt{\overline{R}} \geqslant \\ \geqslant - 3\bar{r}_2^2 [K_3^2 h^2 + w_x^2(x - h,y) + w_x^2(x, y)] - \overline{R} \cdot w_{x\bar{y}}^2(x,y).\end{aligned}$$

Сопоставление последних неравенств с неравенствами (3.9), (3.10) и выражением (3.8) дает:

$$\begin{aligned}\Delta_h [w_x^2(x, y) \cdot \overline{R}] \geqslant w_x^2(x, y)\, (2\overline{R}_{x\bar{x}} - 7\bar{r}_1^2 - 7\bar{r}_2^2) - \\ - 4\bar{r}_1^2 \cdot w_x^2(x + h, y) - 4\bar{r}_2^2 \cdot w_x^2(x - h, y) - 3K_3^2 h^2 (\bar{r}_1^2 + \bar{r}_2^2).\end{aligned}$$

Заметив, что

$$\Delta_h W_1(x, y) \geqslant w_x^2(x, y) + w_x^2(x + h, y) + w_x^2(x - h, y),$$

получаем окончательно:

$$\Delta_h Z_3(x, y) = \Delta_h [w_x^2(x, y) \cdot \overline{R}] + C_2 [\Delta_h W_1(x, y) + \Delta_h (x+y)^2] \geqslant$$
$$\geqslant (C_2 - K_4) [w(x,y) + w_x^2(x+h, y) + w_x^2(x-h, y)] \geqslant 0$$

при $C_2 \geqslant K_1$, где

$$K_4 = \max \{\max_P |2\overline{R}_{\bar{x}\bar{x}} - 7\bar{r}_1^2 - 7\bar{r}_2^2|;\ \max_P 4\bar{r}_1^2;\ \max_P 4\bar{r}_2^2;\ \max_P 3K_3^2 h^2 (\bar{r}_1^2 + \bar{r}_2^2)\}.$$

Итак, $L_h Z_3(x, y) \geqslant 0$. Теорема доказана.

Замечание 3. При доказательстве теоремы 5 мы пользовались равномерной ограниченностью семейств $\{w^{(n)}\}$ и $\{w_{lx}^{(n)}\}$ в D_1^* и семейства $\{w_x^{(n)}\}$ в D_1^{**}; для оценок было также необходимо, чтобы $w^{(n)}$, $w_{lx}^{(n)}$ и $w_x^{(n)}$ удовлетворяли конечно-разностному уравнению Лапласа. Так как семейства $\{w_x^{(n)}\}$, $\{w_{lxx}^{(n)}\}$ равномерно ограничены в D_1^*, а семейство $\{w_{xx}^{(n)}\}$ — в D_1^{**}, и $w_x^{(n)}$, $w_{lxx}^{(n)}$, $w_{xx}^{(n)}$ удовлетворяют конечно-разностному уравнению Лапласа, то, повторяя все рассуждения доказательства теоремы 5, можно доказать равномерную ограниченность семейства $\{w_{xx}^{(n)}\}$ в D_1^*.

То же самое касается разностных отношений по x высших порядков от функции $w^{(n)}$.

Замечание 4. Из равномерной ограниченности семейств разностных отношений по x от функций $w_x^{(n)}$ и $w_l^{(n)}$ непосредственно следует равномерная ограниченность семейств остальных разностных отношений от функции $w^{(n)}$ (например, $w_y^{(n)}$, $w_{xy}^{(n)}$, $w_{yy}^{(n)}$ и т. д.). Достаточно вспомнить равенство $w_l^{(n)} = w_x^{(n)} - w_y^{(n)}$ и определение оператора Δ_h.

§ 4. Решение задачи T_1^* (построение функции $w(x, y)$). Построим функцию $w(x, y)$, гармоническую внутри D_1 и такую, что внутри (AB) будет

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y_+} \ *,$$

а во всех точках линии σ, регулярных в смысле Перрона, $w = F$.

Заметим, что формулируемые ниже утверждения не нуждаются в специальных доказательствах, так как последние явились бы, по сути дела, повторениями соответствующих рассуждений, проведенных в работах ([3]) и ([5]).

Разбирая эти доказательства, нетрудно видеть, что они опираются на линейность однородного оператора L_n, на принцип экстремума и на равномерную ограниченность семейства $w^{(n)}$ и семейств соответствующих разностных соотношений **.

I. *Функции $w^{(n)}$, $w_x^{(n)}$, $w_y^{(n)}$, $w_{xx}^{(n)}$ можно так доопределить в $D_1 + (AB)$, что полученные семейства функций $\{w^{(n)}\}$, $\{w_x^{(n)}\}$, $\{w_y^{(n)}\}$, $\{w_{\bar{x}\bar{x}}^{(n)}\}$ будут равномерно ограничены и равностепенно непрерывны в D_1^*.*

---

* $\dfrac{\partial w}{\partial y_+} = \lim\limits_{\Delta y \to +0} \dfrac{w(x, y+\Delta y) - w(x, y)}{\Delta y}$.

** В качестве примера детально проводится доказательство теоремы в п. V настоящего параграфа.

Для доказательства достаточно разбить каждый квадрат сетки на два треугольника прямой, параллельной $y=-x$, и в каждом таком треугольнике определить, например, $w^{(n)}$ как линейную функцию, принимающую в вершинах треугольника ранее определенные значения $w^{(n)}$, а в точках $D_1+(AB)$, не принадлежащих $\overline{D}_{1h}$, доопределить $w^{(n)}$ по непрерывности так, чтобы она была ограничена в $D_1+(AB)$.

II. *Из семейства функций $\{w^{(n)}\}$ можно выбрать такую последовательность, которая будет сходиться в $D_1+(AB)$ (равномерно во всякой D_1^*), а соответствующие ей последовательности первых и вторых разностных отношений также будут сходиться в $D_1+(AB)$ (равномерно во всякой D_1^*).*

Доказывается это с помощью теоремы Арцеля.

III. *Функция $w(x, y)$, являющаяся пределом такой последовательности, обладает следующими свойствами:* а) *$w(x, y)$ имеет в $D_1+(AB)$ непрерывные производные $\frac{\partial w}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$;* б) *$w(x, y)$ имеет в D_1 непрерывные производные $\frac{\partial w}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$;* в) *$w(x, y)$ удовлетворяет внутри области D_1 уравнению Лапласа;* г) *во внутренних точках интервала (AB)*

$$\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial y_+}=0.$$

IV. Пусть точка Q является внутренней точкой границы σ (под внутренней мы понимаем всякую точку Q линии σ, отличную от точек A и B). Имеет место следующая

ТЕОРЕМА. *Функция $w(x, y)$ непрерывна во всякой регулярной в смысле Перрона внутренней точке Q границы σ и принимает в ней заданное значение $F(Q)$.*

Действительно, так как функция w в замкнутой области $\overline{D}_1$ может принимать наибольшее и наименьшее значения только в точках линии σ, то доказательство этой теоремы совпадает с соответствующим доказательством, которое приводит И. Г. Петровский в работе (3) при решении задачи Дирихле методом конечных разностей.

V. Рассмотрим поведение функции $w(x, y)$ в окрестности точек A и B. Для определенности будем рассматривать точку A.

Определение. Функцию $W_A(x, y)$ назовем барьером в точке A, если

1) W_A определена и непрерывна в окрестности Γ_A точки A, являющейся такой частью полной окрестности точки A, которая принадлежит замкнутой области $\overline{D}_1$;

2) $W_A(A)=0$ и $W_A(x, y)>0$ во всех точках $(x, y)\in\Gamma_A$, отличных от A;

3) $L_h W_A \leqslant 0$ при всех достаточно малых h во всех узловых точках, принадлежащих пересечению $\overline{D}_{1h}\cdot\Gamma_A$.

ТЕОРЕМА. *Если в точке A существует барьер W_A, то функция $w(x, y)$ непрерывна в этой точке и принимает в ней значение $F(A)$.*

Доказательство. Пусть $\alpha>0$ и $\beta>0$ — столь малые числа, что область D_A, ограниченная прямыми $x=a+\alpha$, $y=\beta$ и линией σ, при-

надлежит Γ_A. Для простоты записи будем полагать, что прямые $x=a+\alpha$ и $y=\beta$, начиная с достаточно большого числа n, принадлежат сетке.

Для всякого $\varepsilon>0$ найдется такая окрестность $\delta_\varepsilon(A)$ точки A, что во всех узловых точках, принадлежащих пересечению $\delta_\varepsilon(A)\cdot\sigma_h$, будет выполняться неравенство $|F_h-F(A)|<\epsilon$.

Пусть постоянная $C>0$ такова, что во всех узловых точках из $\overline{D}_A-\delta_\varepsilon(A)$ будет

$$CW_A>2\max_\sigma|F|.$$

Рассмотрим функции

$$\Phi=CW_A(x, y)-F(A)+\varepsilon+w^{(n)}(x, y)$$

и

$$\Psi=CW_A(x, y)+F(A)+\varepsilon-w^{(n)}(x, y).$$

В силу определения $\delta_\varepsilon(A)$ и выбора числа C, во всех узловых точках, принадлежащих пересечению $\overline{D}_A\cdot\sigma_h$, и в узловых точках, принадлежащих прямым $x=a+\alpha$ и $y=\beta$, функции Φ и Ψ неотрицательны. Из условия 3) определения барьера W_A следует, что во всех узловых точках области $\overline{D}_{1h}$, принадлежащих области D_A и интервалу $(a, a+\alpha)$, будет $L_h\Phi\leqslant 0$ и $L_h\Psi\leqslant 0$. Из этих неравенств легко заключить, что функции Φ и Ψ принимают наименьшие значения в некоторых узловых точках, принадлежащих пересечению $\overline{D}_A\cdot\sigma_h$ или прямым $y=\beta, x=a+\alpha$, а так как там Φ и Ψ неотрицательны, то они неотрицательны во всех узловых точках из $\overline{D}_{1h}\cdot\overline{D}_A$. Поэтому для всех узловых точек из $\overline{D}_A$ имеют место неравенства:

$$F(A)-\varepsilon-CW_A(x, y)\leqslant w^{(n)}(x, y)\leqslant F(A)+\varepsilon+CW_A(x, y).$$

Переходя в этих неравенствах к пределу в узловой точке (x, y) при $h\to 0$, получим:

$$F(A)-\varepsilon-CW_A(x, y)\leqslant w(x, y)\leqslant F(A)+\varepsilon+CW_A(x, y). \quad (4.1)$$

Так как множество узлов, начиная с некоторого n, всюду плотно в $D_A+(a, a+\alpha)$ и функция $w(x, y)$ непрерывна в $D_A+(a, a+\alpha)$, то неравенства (4.1) имеют место во всех точках из $D_A+(a, a+\alpha)$. Поэтому

$$F(A)-\varepsilon\leqslant \varliminf_{(x, y)\to A} w(x, y)\leqslant \varlimsup_{(x, y)\to A} w(x, y)\leqslant F(A)+\varepsilon.$$

Отсюда, ввиду произвольности $\varepsilon>0$, следует:

$$\lim_{\overline{(x, y)}\to A} w(x, y)=F(A),$$

что и доказывает теорему.

§ 5. Построение барьера. Барьер W_A очень просто построить в одном частном случае, а именно, если вблизи точки A существует отрезок (хотя бы сколь угодно малой длины) линии σ, имеющий с прямой $y=a-x$ одну общую точку $A(a, 0)$ и лежащий выше этой прямой.

В самом деле, легко видеть, что функция $W_A(x, y) = x + y - a$ будет удовлетворять всем условиям барьера.

Перейдем к общему случаю.

Докажем предварительно одну лемму. Рассмотрим односвязную область G, ограниченную в верхней полуплоскости гладкой жордановой линией γ, имеющей с осью Ox две общие точки $A(a, 0)$ и $E(l, 0)$ $(0 < l - a < 1)$. В нижней полуплоскости область G ограничена отрезками $[AH]$ и $[EH]$ характеристик $y = a - x$ и $y = x - l$; H — точка пересечения этих характеристик. Через G_1 обозначим эллиптическую часть области G.

ЛЕММА. *Если функция $\omega(x, y)$ является решением задачи T^* в области G и удовлетворяет краевым условиям:*

$$\omega(x, y)|_\gamma = (x - a)^2 + 2y,$$

$$\omega(x, y)|_{[AH]} = 0,$$

то для всех точек, принадлежащих замкнутой области $\bar{G}_1$, имеет место неравенство

$$\omega(x, y) - (x - a)^2 - 2y \geqslant 0. \tag{5.1}$$

Доказательство. Обозначим

$$\Omega(x, y) = \omega(x, y) - (x - a)^2 - 2y.$$

Если мы покажем, что в замкнутой области $\bar{G}_1$ функция Ω принимает наименьшее значение на γ, то лемма будет доказана, так как $\Omega|_\gamma = 0$. Равенство

$$\Delta\Omega = \frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2} = \Delta\omega - \Delta\,[(x - a)^2 + 2y] = -2,$$

справедливое для любой внутренней точки (x_0, y_0) области G_1, показывает, что в этой точке Ω не может принимать наименьшее значение.

Осталось предположить, что Ω принимает наименьшее значение во внутренней точке $(x_0, 0)$ интервала (AE). В этой точке

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} - \frac{\partial\Omega}{\partial y} = \frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\partial\omega}{\partial y} - 2(x - a) + 2.$$

Из условия $\omega|_{[AH]} = 0$ следует, что $\left[\frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\partial\omega}{\partial y}\right]_{y=0} = 0$, и так как длина отрезка $[AE]$ меньше единицы, то

$$\left[\frac{\partial\Omega}{\partial x} - \frac{\partial\Omega}{\partial y}\right]_{(x_0, 0)} = 2(1 + a - x) > 0. \tag{5.2}$$

Но в точке прямолинейной границы (AE), в которой достигается экстремум, должно быть $\frac{\partial\Omega}{\partial x} = 0$, поэтому из (5.2) следует

$$\left.\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right|_{(x_0, 0)} = -2(1 + a - x) < 0.$$

Однако это неравенство находится в противоречии с предположением, что функция Ω принимает наименьшее значение в точке $(x_0, 0)$.

Замечание 1. В работе А. В. Бицадзе (2) доказывается существование в области G определенной выше функции $\omega(x, y)$: рассматривается область $G^* = G_1 + G_1^*$, где область G_1^* симметрична к G_1 относительно оси Ox, и в $\overline{G}^*$ строится такая гармоническая в G^* функция $\widetilde{\omega}(x, y)$, что для всех $(x, y) \in \overline{G}$ функция

$$\omega(x, y) = \begin{cases} \widetilde{\omega}(x, y) & \text{при } y \geqslant 0 \\ \omega(x+y, 0) & \text{при } y < 0 \end{cases}$$

удовлетворяет условиям леммы.

Перейдем к непосредственному построению барьера.

Пусть линия γ такова, что некоторый отрезок (хотя бы сколь угодно малой длины) линии σ принадлежит области G и имеет с линией γ две и только две общие точки $A(a, 0)$ и $\overline{A}$. В качестве Γ_A мы можем взять любую окрестность точки A, принадлежащую пересечению $\overline{G}_1 \cdot \overline{D}_1$. Рассмотрим в Γ_A функцию

$$W_A(x, y) = \omega(x, y) - \frac{1}{2}[(x-a)^2 + 2y]$$

и проверим для нее условия 1), 2) и 3) определения барьера. В силу сказанного в замечании, условие 1) выполняется. Из леммы следует, что условие 2) для W_A также выполняется. Условие 3) нам достаточно проверить для области вида D_A (см. стр. 127), так как в качестве Γ_A мы можем всегда взять часть области D_A. Для того чтобы исследовать знак $L_h W_A$, заметим, что все производные по x и по y до третьего порядка включительно от $\omega(x, y)$ в любой точке $(x, y) \in D_A + (a, a+\alpha)$ по абсолютной величине не превосходят некоторой величины $M(\rho)$, которая зависит от расстояния ρ этой точки до линии σ и от $\max\limits_{\sigma}|F|$. Это нетрудно проверить, пользуясь сказанным в замечании. В самом деле, для $\widetilde{\omega}(x, y)$ в области G^* утверждение можно проверить, представив в окрестности любой точки $(x, y) \in G^*$ функцию $\widetilde{\omega}$ в виде интеграла Пуассона. А из того, что в $D_A + (a, a+\alpha)$ функция $\widetilde{\omega} = \omega$, следует наше утверждение для ω. Пользуясь для вычислений $L_h\omega$ формулой Тейлора, без труда получаем:

$$|\Delta_h\omega| \leqslant \frac{2}{3} hM(\rho),$$

где $\rho = \rho(h)$ — нижняя грань расстояний точек, принадлежащих $\overline{D}_{1h} - \sigma_h$, до линии σ. Так как

$$-\frac{1}{2}\Delta_h[(x-a)^2 + 2y] = -1,$$

то

$$\Delta_h W_A \leqslant \frac{2}{3} hM(\rho) - 1.$$

Далее,

$$|\omega_l| \leqslant hM(\rho) \text{ и } \frac{1}{2}[(x-a)^2 + 2y]_l = \frac{1}{2}[2(x-a-1) + h],$$

откуда

$$-(W_A)_l \leqslant h\left[M(\rho) + \frac{1}{2}\right] + x - a - 1.$$

Пусть $\rho(h)$ так велико по сравнению с h^*, что

$$hM(\rho(h)) < \frac{1}{2} - \alpha,$$

где α — длина отрезка $[a, a+\alpha]$, $\left(0 < \alpha < \frac{1}{2}\right)$; тогда во всех узлах из $D_A + (a, a+\alpha)$ будет $L_h W_A \leqslant 0$.

Замечание 2. Метод, изложенный в настоящем параграфе, позволяет построить барьер и в точке B. Для этого рассматривается соответствующая область G, ограниченная в верхней полуплоскости гладкой жордановой дугой γ, имеющей с осью Ox две общие точки $E(l, 0)$ и $B(b, 0)$. В нижней полуплоскости G ограничена отрезками $[EH]$ и $[BH]$ характеристик $y = l - x$ и $y = x - b$, причем $0 < b - l < 1$. В качестве $\omega(x, y)$ выбирается решение задачи T^* в области G, удовлетворяющее краевым условиям:

$$\omega(x, y)|_\gamma = (x-b)^2 + 2y,$$
$$\omega(x, y)|_{[EH]} = (l-b)^2.$$

Тогда барьером может служить функция

$$W_B(x, y) = \omega(x, y) - \frac{1}{2}[(x-b)^2 + 2y].$$

§ 6. О некоторых свойствах функции $w(x, y)$ в области D. Пользуясь соотношением

$$w(x, y) = w(x+y, 0) \tag{6.1}$$

при $y < 0$, построим по полученным ранее значениям на отрезке $[AB]$ функцию w в области D_2. Таким образом, в замкнутой области $\bar{D}$ функция w будет полностью определена.

а) Так как в $D_1 + (AB)$ функция w дифференцируема по x сколько угодно раз, то из (6.1) видно, что w будет также дифференцируема по x сколько угодно раз внутри области D.

б) Так как w гармонична в D_1, то, в силу (6.1) и п. а), функция w дифференцируема по y внутри D при $y \neq 0$ сколько угодно раз.

в) Из (6.1) и из п. III § 4 следует непрерывность разности $\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y}$ внутри области D. Отсюда и из п. а) следует непрерывность $\frac{\partial w}{\partial y}$ внутри D.

---

* Естественно, что для этого ширина полосы σ_h должна убывать при $h \to 0$ медленнее, чем само h.

§ 7. О единственности решения задачи T^*. Для доказательства единственности решения задачи T^* достаточно показать, что решение w задачи T_1^* с нулевыми граничными условиями есть нуль. Последнее же следует из принципа экстремума, указанного А. В. Бицадзе [см. (2), стр. 10, замечание 2]. Из единственности решения задачи T_1^* следует

ТЕОРЕМА. *Так как все точки линии σ регулярны в смысле Перрона, то не только некоторая подпоследовательность $\{w^{(n)k}\}$, но и вся последовательность $\{w^{(n)}\}$ сходится в $D_1+(AB)$ к решению $w(x, y)$ задачи T_1^*.*

§ 8. Случай разрывной граничной функции. Пусть на линии σ задана ограниченная функция f, непрерывная в точках A и B. Обозначим в некоторой точке $Q \in \sigma$ через $\bar{f}(Q)$ и $\underline{f}(Q)$ соответственно

$$\overline{\lim_{P\to Q}} f(P)=\bar{f}(Q) \text{ и } \underline{\lim_{P\to Q}} f(P)=\underline{f}(Q).$$

Задача T^*. Требуется найти такую функцию $u(x, y)$, что

1) u является решением уравнения (1) в области D при $y \neq 0$;

2) u, $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ непрерывны внутри D;

3) если линия σ такова, что все ее точки регулярны в смысле Перрона, то на линии σ функция u удовлетворяет условию

$$\underline{f} \leqslant \underline{u} \leqslant \bar{u} \leqslant \bar{f}, \tag{8.1}$$

а на отрезке $[AC]$ функция u принимает заданные значения $u_{[AC]}=\varphi(x)$ причем $\varphi(A)=f(A)$ ($\varphi(x)$ дважды дифференцируема).

Повторяя дословно все рассуждения § 2, мы сведем проблему решения задачи T^* к построению решения $w(x, y)$ задачи T_1^*, граничные условия для которой будут формулироваться так: на линии σ функция w удовлетворяет условию $\underline{F} \leqslant \underline{w} \leqslant \bar{w} \leqslant \bar{F}$, а на отрезке $[AC]$ функция w принимает заданные значения $w|_{[AC]}=F(A)$.

Нетрудно видеть, что все сказанное в § 3, 4 и 5, остается в силе и для данного случая. Исключение составляют лишь теорема о поведении функции w на границе σ и определение функции F_h в узлах полосы σ_h, которое мы сформулируем так: F_h — функция, заданная в каждом узле из σ_h значениями $\frac{1}{2}(\bar{F}+\underline{F})$ в одной из точек границы σ, ближайшей к этому узлу.

Так как $w(x, y)$ гармонична в D_1 и принцип экстремума доказан, то имеет место теорема, справедливая для гармонических функций: *во всякой регулярной в смысле Перрона точке Q линии σ функция w удовлетворяет условию*

$$\underline{F}(Q) \leqslant \underline{w}(Q) \leqslant \bar{w}(Q) \leqslant \bar{F}(Q). \tag{8.2}$$

Здесь предполагается, что точка Q отлична от A и B. Доказательство же того, что $w(A)=F(A)$ и $w(B)=F(B)$, приводится в § 5.

§ 9. Некоторые обобщения.

I. Рассмотрим на плоскости xOy конечную область ϑ, ограниченную в верхней полуплоскости линиями $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ с концами в соответствующих точках Ox: $A_1(a_1, 0)$, $B_1(b_1, 0)$ $(b_1 > a_1)$ и $A_k(a_k, 0)$, $B_k(b_k, 0)$ $(b_1 > a_k > b_k > a_{k-1}$, $k = 2, 3, \ldots, m)$. В нижней полуплоскости область ϑ ограничена отрезками характеристик $[A_iC_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ и $[B_kC_{k-1}]$ $(k = 2, 3, \ldots, m)$, $[B_1C_m]$. При этом отрезки $[A_iC_i]$ параллельны характеристике $y = -x$, а $[B_kC_{k-1}]$ и $[B_1C_m]$ параллельны характеристике $y = x$; C_i — соответствующие точки пересечения.

Задача T_2^*. Требуется найти такую функцию $u(x, y)$, что

1) u является решением уравнения (1) в области ϑ при $y \neq 0$;

2) u непрерывна в замкнутой области $\bar{\vartheta}$;

3) $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ непрерывны внутри ϑ;

4) если линии σ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ таковы, что все их точки регулярны в смысле Иеррона, то на этих линиях и на отрезках характеристик $[A_iC_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ функция u принимает заданные значения:

$$u|_{\sigma_i} = f_i,$$

$$u|_{[A_iC_i]} = \varphi_i(x),$$

причем $f_i(A_i) = \varphi_i(A_i)$, f_i непрерывны, а φ_i дважды дифференцируемы.

II. Так же, как и в случае задачи T^*, мы сведем задачу T_2^* к двум более простым задачам, из которых решение одной выписывается в квадратурах. Не ограничивая общности, можно полагать, что область ϑ, вместе со своей границей, принадлежит области D_0, определение которой дано в § 2.

Обозначим через $[A_i'C_i']$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ проекции отрезков $[A_iC_i]$ на $[A_0C_0]$ по направлению $y = x$ и рассмотрим на линии $\sigma_0 + [A_0C_0]$ такую дважды дифференцируемую функцию ψ, что

$$\psi\Big|_{[A_i'C_i']} = \varphi_i\left(x + \frac{a_i}{2}\right) \text{ и } \psi\Big|_{\sigma_0} = 0.$$

Определим в области D_0 функцию $v(x, y)$ формулами (2.2). Тогда, если мы построим функцию $w(x, y)$, удовлетворяющую в области ϑ условиям 1), 2), 3) задачи T_2^* и условию:

4) на линиях σ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ и на отрезках $[A_iC_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ функция w принимает заданные значения:

$$w|_{\sigma_i} = v|_{\sigma_i} - f_i,$$

$$w|_{[A_iC_i]} = v(A_i) - f_i(A_i),$$

то функция $u = v - w$ будет решением задачи T_2^* (доказательство этого утверждения аналогично тому, которое приводится на стр. 119).

Итак, проблема решения задачи T_2^* свелась к построению решения следующей задачи.

III. Задача T_3^*. Требуется найти такую функцию $w(x, y)$, что

1) w является решением уравнения (1) в области ϑ при $y \neq 0$;

2) w непрерывна в замкнутой области $\bar{\vartheta}$;

3) $\frac{\partial w}{\partial x}$ и $\frac{\partial w}{\partial y}$ непрерывны внутри ϑ;

4) на линиях σ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ и на отрезках $[A_iC_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ функция w принимает заданные значения:

$$w|_{\sigma_i} = F_i,$$

$$w|_{[A_iC_i]} = F_i(A_i),$$

где F_i — непрерывные функции.

Для построения решения w задачи T_3^* достаточно повторить все рассуждения § 3—6.

Замечание 1. Таким же образом, как и в § 7, доказывается единственность решения задачи T_2^*.

IV. Изложенный метод позволяет решить еще одну задачу. Рассмотрим конечную область $\mathfrak{G}$ с той же границей σ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ в верхней полуплоскости, что и у области ϑ (см. п. I настоящего параграфа); в нижней полуплоскости область $\mathfrak{G}$ ограничена отрезками $[A_1E_1]$, $[B_1E_1]$ и $[B_kE_k]$, $[A_kE_k]$ $(k = 2, 3, \ldots, m)$ соответственно характеристик $y = a_1 - x$, $y = x - b_1$ и $y = b_k - x$, $y = x - a_k$; E_1 и E_k — точки пересечения этих характеристик.

Задача T_4^* *. Требуется найти такую функцию $u(x, y)$, что

1) u является решением уравнения (1) в области $\mathfrak{G}$ всюду, за исключением прямых $y = b_k - x$ $(k = 2, 3, \ldots, m)$ и $y = 0$;

2) u непрерывна в замкнутой области $\bar{\mathfrak{G}}$;

3) $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ непрерывны внутри $\mathfrak{G}$ всюду, за исключением, вообще говоря, прямых $y = b_k - x$ $(k = 2, 3, \ldots, m)$;

4) на линиях σ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ и на отрезках $[A_iE_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ функция u принимает заданные значения:

$$u|_{\sigma_i} = f_i, \quad u|_{[A_iE_i]} = \varphi_i(x),$$

причем $f_i(A_i) = \varphi_i(A_i)$,

$$\varphi_k(E_k) = \varphi_k\left(\frac{a_k + b_k}{2}\right) = \varphi_k(b_k) + \varphi_1\left(\frac{a_1 + a_k}{2}\right) - \varphi_1\left(\frac{a_1 + b_k}{2}\right) \quad ^{**}$$
$$(k = 2, 3, \ldots, m),$$

f_i непрерывны, а φ_i дважды дифференцируемы.

Не повторяя рассуждений § 2, укажем только, что тем же путем, что и в случае задачи T^* (т. е. строя область D_0 и определяя в ней соответствующим образом функцию $w(x, y)$), проблема решения задачи T_4^* сво-

* Эта задача является обобщением задачи T_2, рассмотренной А. В. Бицадзе [см. ([2]), гл. II, § 10].

**Требование, чтобы $\varphi_k(E_k)$ удовлетворяли выписанным соотношениям, обеспечивает непрерывность решения u на прямых $y = b_k - x$.

дится к построению функции $w(x, y)$, удовлетворяющей в области $\mathfrak{G}$ условиям 1), 2), 3) задачи T_4^* и условию

4) на линиях σ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ и на отрезках $[A_iE_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ функция w принимает заданные значения:

$$w|_{\sigma_i} = v|_{\sigma_i} - f_i,$$
$$w|_{[A_1E_1]} = v(A_1) - f(A_1),$$
$$w|_{[A_kE_k]} = v|_{[A_kE_k]} - \varphi_k \quad (k = 2, 3, \ldots, m).$$

Нетрудно видеть, что в гиперболической части $(y < 0)$ области $\mathfrak{G}$ функция w представляет собой цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными прямой $y = -x$. Поэтому функцию w достаточно уметь строить в области ϑ как решение задачи T_3^*, ибо в области $\overline{\mathfrak{G}} - \vartheta$ функция w строится элементарно.

V. Замечание 2. Можно несколько обобщить постановку задачи T_2^*, а именно, задавать граничные функции φ_i не обязательно на сторонах $[A_iC_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ углов $A_iC_iB_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$ и $A_mC_mB_1$, а на любой из двух сторон каждого из этих углов. Все прежние доказательства существования и единственности решения и в этом случае остаются в силе. Отличие будет лишь в том, что для построения соответствующей функции $v(x, y)$ потребуются результаты А. В. Бицадзе, изложенные в работе [2], гл. II, § 7—9.

Замечание 3. Соответствующим образом обобщается и постановка задачи T_4^*.

Замечание 4. Ясно, что случай, когда граничные функции f_i разрывны (но ограничены), полностью переносится в прежних формулировках и на задачи T_2^* и T_4^*.

Поступило
11.XII.1956

ЛИТЕРАТУРА

[1] Лаврентьев М. А. и Бицадзе А. В., К проблеме уравнений смешанного типа, Доклады Ак. наук СССР, 70, № 3 (1950), 373—376.

[2] Бицадзе А. В., К проблеме уравнений смешанного типа. Труды Математич. института им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, XLI, 1953.

[3] Петровский И. Г., Новое доказательство существования решения задачи Дирихле методом конечных разностей, Успехи матем. наук, 8 (1941), 161—170.

[4] Бернштейн С. Н., Ограничение модулей последовательных производных решений уравнений параболического типа, Доклады Ак. наук СССР, 18, № 7 (1938), 385—388.

[5] Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, М., ГИТТЛ, 1953.

[6] Карманов В. Г., Об одной граничной задаче для уравнения смешанного типа, Доклады Ак. наук СССР, 95, № 3 (1954), 439—442.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 135—160

В. Н. МАСЛЕННИКОВА

РЕШЕНИЕ В ЯВНОМ ВИДЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В работе строится в явном виде решение задачи Коши для системы уравнений первого порядка и для одного уравнения четвертого порядка в четырехмерном пространстве с помощью фундаментальных функций. При стремлении параметра α к нулю решения обеих задач стремятся к соответствующим решениям, полученным С. Л. Соболевым для системы при $\alpha = 0$.

Введение

Рассматривается следующая система уравнений:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} - v_y + \frac{\partial p}{\partial x} = F_x, \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = F_z,$$
$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x + \frac{\partial p}{\partial y} = F_y, \quad \alpha^2 \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{v} = \varphi, \tag{1}$$

где v_x, v_y, v_z — компоненты вектора $\vec{v}$, p — скалярная функция, заданные в области Ω трехмерного пространства, ограниченного поверхностью S при $0 \leqslant t < \infty$. Точки области Ω определяются значениями координат x, y, z. Рассматриваемая система является одним из простейших примеров класса систем, получивших в последнее время распространение в математической физике. Аналогичные системы встречаются, например, в теории вращающейся жидкости; так, систему (1) можно рассматривать как систему малых колебаний вращающейся жидкости с учетом сжимаемости; подобные системы встречаются также в исследованиях по вопросам магнитной газовой динамики, характерных для современной теории газовых туманностей.

Новым по сравнению с классическими задачами здесь служит наличие силы, направленной перпендикулярно вектору скорости. В теории вращающейся жидкости такой силой является кориолисова сила $2[\vec{\omega} \times v_r]$, в магнитной газовой динамике эта сила возникает вследствие воздействия магнитного поля на движущиеся заряженные частицы. Величина ее при этом равна $\frac{e[\vec{v} \times H]}{C}$.

При помощи исключения неизвестных функций из системы (1) можно получить уравнение, которому будет удовлетворять каждая из неизвестных функций в отдельности:

$$Lp \equiv \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \alpha^2 \left(\frac{\partial^4 p}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right) = f, \tag{2}$$

где Δ — оператор Лапласа.

При $\alpha = 0$ система (1) и уравнение (2) переходят соответственно в систему и уравнение, исследованные С. Л. Соболевым. Для них в работе ([1]) решается в явном виде задача Коши и две смешанные задачи. Исследованием системы (1) и уравнения (2) при $\alpha = 0$ занимались также Р. А. Александрян ([2]), С. А. Гальперн ([3]), Стюартсон ([4]) и другие.

В настоящей работе решается в явном виде задача Коши для системы (1) в неограниченном пространстве с начальными данными [см. формулы 40), (42), (51)]:

$$\vec{v}\,|_{t=0} = \vec{v}^0(x, y, z), \quad p\,|_{t=0} = p^0(x, y, z). \tag{3}$$

Смешанные задачи для системы (1) будут рассмотрены в следующей работе автора.

Метод решения задачи Коши представляет собой развитие классических методов решения волнового уравнения, применявшихся Вольтерра, Кирхгофом и другими авторами и основанных на изучении характеристик и применении формулы Грина. В настоящей работе рассматриваются характеристики системы (1) и находятся фундаментальные решения однородных уравнений (1) и (2), при помощи которых и строится решение задачи Коши.

Заметим, что система (1) не является гиперболической, но задача Коши для нее поставлена равномерно корректно в смысле И. Г. Петровского ([5]). Нашей целью является построение этого решения в явном виде как определенной функции начальных данных и правых частей уравнений системы.

§ 1. Характеристики системы и некоторые соотношения на характеристическом конусе

Уравнение поверхностей характеристик для системы (1)

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 - \alpha^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\right] = 0$$

распадается на два уравнения:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 - \alpha^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 = 0 \tag{4}$$

и

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 = 0. \tag{5}$$

Из формулы (4) следует, что характеристики системы (1) совпадают с характеристиками волнового уравнения, а из (5) следует, что двукратными характеристиками являются цилиндры в четырехмерном пространстве с осями, параллельными оси t, и с произвольными основаниями в пространстве x, y, z. В частности, поверхность конуса

$$(t - t_0)^2 - \alpha^2 r^2 = 0,$$

где

$$r^2 = (x - x_0) + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$

является характеристической поверхностью для системы (1). В дальнейшем нас будут интересовать некоторые соотношения на этом конусе, причем везде мы будем рассматривать его нижнюю половину, т. е. часть, определенную уравнением

$$t-t_0=-\alpha r.$$

Для вывода этих соотношений преобразуем систему уравнений подобно тому, как это делается при решении волнового уравнения методом Кирхгофа, к новым независимым переменным:

$$x=x_1, \quad y=y_1, \quad z=z_1, \quad t_1=t-t_0+\alpha r$$

и обозначим

$$\vec{v}(x_1, y_1, z_1, t_1+t_0-\alpha r)=\vec{v}^1(x_1, y_1\, z_1, t_1),$$
$$p(x_1\, y_1, z_1, t_1+t_0-\alpha r)=p^1(x_1, y_1, z_1, t_1).$$

Тогда система (1) в новых координатах запишется в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x^1}{\partial t_1}=v_y^1-\frac{\partial p^1}{\partial x_1}-\frac{\partial p^1}{\partial t_1}\cdot\frac{\alpha(x_1-x_0)}{r_1}+F_x^1,\\
&\frac{\partial v_y^1}{\partial t_1}=-v_x^1-\frac{\partial p^1}{\partial y_1}-\frac{\partial p^1}{\partial t_1}\cdot\frac{\alpha(y_1-y_0)}{r_1}+F_y^1,\\
&\frac{\partial v_z^1}{\partial t_1}=-\frac{\partial p^1}{\partial z_1}-\frac{\partial p^1}{\partial t_1}\cdot\frac{\alpha(z_1-z_0)}{r_1}+F_z^1,\\
&\alpha^2\frac{\partial p^1}{\partial t_1}=-\operatorname{div}_1\vec{v}^1-\frac{\partial v_x^1}{\partial t_1}\cdot\frac{\alpha(x_1-x_0)}{r_1}-\\
&-\frac{\partial v_y^1}{\partial t_1}\cdot\frac{\alpha(y_1-y_0)}{r_1}-\frac{\partial v_z^1}{\partial t_1}\cdot\frac{\alpha(z_1-z_0)}{r_1}+\psi^1.
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Подставляя в последнее уравнение системы (6) значения $\frac{\partial v_x^1}{\partial t_1}, \frac{\partial v_y^1}{\partial t}, \frac{\partial v_z^1}{\partial t_1}$ из первых трех уравнений и обозначая через $\frac{\partial}{\partial r_1}$ выражение

$$\frac{x_1-x_0}{r_1}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{y_1-y_0}{r_1}\frac{\partial}{\partial y_1}+\frac{z_1-z_0}{r_1}\frac{\partial}{\partial z_1},$$

мы получим первое соотношение на характеристическом конусе:

$$\operatorname{div}_1\vec{v}^1+\frac{\alpha(x_1-x_0)}{r_1}v_y^1-\frac{\alpha(y_1-y_0)}{r_1}v_x^1-\alpha\frac{\partial p^1}{\partial r_1}=N^1, \quad (7)$$

где

$$N^1=\psi^1-\frac{\alpha}{r_1}[(x_1-x_0)F_x^1+(y_1-y_0)F_y^1+(z_1-z_0)F_z^1].$$

Продифференцировав первые три уравнения системы (6) соответственно по x_1, y_1, z_1, сложив их и вычтя из этой суммы продифференцированное один раз по t_1 соотношение (7), получим:

$$\frac{\partial v_y^1}{\partial x_1}-\frac{\partial v_x^1}{\partial y}-\Delta_1 p-2\alpha\frac{\partial^2 p^1}{\partial t_1\,\partial r_1}-\frac{2\alpha}{r_1}\frac{\partial p^1}{\partial t_1}+\operatorname{div}_1\vec{F}^1+$$
$$+\alpha\left(\frac{x_1-x_0}{r_1}\frac{\partial v_y^1}{\partial t_1}-\frac{y-y_0}{r_1}\frac{\partial v_x^1}{\partial t_1}\right)-\frac{\partial N^1}{\partial t_1}=0.$$

Подставляя в это выражение значения $\frac{\partial v_y^1}{\partial t_1}$ и $\frac{\partial v_x^1}{\partial t_1}$ из системы (6) и обозначая известный член

$$\operatorname{div}_1 \vec{F}^1 - \frac{\partial N^1}{\partial t_1}$$

через χ, получим еще одно нужное нам соотношение на характеристическом конусе:

$$\frac{\partial v_y^1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_x^1}{\partial y_1} - \Delta_1 p^1 - \frac{2\alpha}{r_1}\frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1 \frac{\partial p^1}{\partial t_1}\right) +$$
$$+ \alpha\left(\frac{y_1 - y_0}{r_1}\frac{\partial p^1}{\partial x_1} - \frac{x_1 - x_0}{r_1}\frac{\partial p^1}{\partial y_1}\right) - \alpha\left(\frac{x_1 - x_0}{r_1} v_x^1 + \frac{y_1 - y_0}{r_1} v_y^1\right) = \chi^1. \qquad (8)$$

§ 2. Интегральная формула типа формулы Грина

Рассмотрим две системы функций v_x, v_y, v_z, p и w_x, w_y, w_z, q и составим для них следующее выражение:

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} - v_y + \frac{\partial p}{\partial x}\right) w_x + \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x + \frac{\partial p}{\partial y}\right) w_y + \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z}\right) w_z +$$
$$+ \left(\operatorname{div} \vec{v} + \alpha^2 \frac{\partial p}{\partial t}\right) q + \left(\frac{\partial w_x}{\partial t} - w_y + \frac{\partial q}{\partial x}\right) v_x +$$
$$+ \left(\frac{\partial w_y}{\partial t} + w_x + \frac{\partial q}{\partial y}\right) v_y + \left(\frac{\partial w_z}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial z}\right) v_z + \left(\operatorname{div} \vec{w} + \alpha^2 \frac{\partial q}{\partial t}\right) p =$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\left[(w, v) + \alpha^2 pq\right] + \frac{\partial}{\partial x}(pw_x + qv_x) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}(pw_y + qv_y) + \frac{\partial}{\partial z}(pw_z + qv_z).$$

Интегрируя это равенство по четырехмерному конусу, у которого вырезана ось с помощью достаточно малого цилиндра общего вида (заметим, что как боковая поверхность цилиндра, так и боковая поверхность конуса являются характеристиками), применяя формулу Остроградского и полагая, что w_x, w_y, w_z, q удовлетворяют однородной системе (1), а v_x, v_y, v_z, p — искомые решения неоднородной системы, получим:

$$\iiint_{\Omega_3}\left\{\int_0^{t_0 - \alpha r} [(\vec{w}, \vec{F}) + \psi q]\, dt\right\} d\Omega =$$
$$= \iiint_{\Omega_3} [(\vec{w}, \vec{v}) + \alpha^2 pq)]_{\tau = -\alpha r}\, dx\, dy\, dz + (pw_x + qv_x)_{\tau = -\alpha r} + q_x^v dy\, dz\, dt +$$
$$+ (pw_y + qv_y)_{\tau = -\alpha r}\, dx\, dz\, dt + (pw_z + qv_z) + gv_{x\tau = -\alpha r}\, dx\, dy\, dt -$$
$$- \iiint_{S_3}\left\{\int_0^{t_0 - \alpha r} (pw_n + qv_n)\, dt\right\} dS - \iiint_{\Omega_3} [(\vec{w}, \vec{v}) + \alpha^2 q \cdot p]_{t=0}\, dx\, dy\, dz, \qquad (9)$$

где Ω_3 — область трехмерного пространства x, y, z; S_3 — поверхность, ограничивающая эту область, $\vec{n}$ — внутренняя нормаль к поверхности S_3. Этой формулой Грина мы будем пользоваться в дальнейшем.

§ 3. Некоторые частные решения уравнения четвертого порядка и их связь с решениями системы (1)

Укажем некоторые частные решения уравнения

$$\alpha^2\left(\frac{\partial^4\Phi}{\partial t^4}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right)-\frac{\partial^2\Delta\Phi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0, \tag{2*}$$

при помощи которых мы впоследствии построим решение задачи Коши в явном виде.

Одним из частных решений этого уравнения является решение

$$\Phi=\frac{1}{r}J_0\left(\frac{\rho\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{r}\right), \tag{10}$$

которое было найдено С. Л. Соболевым и сообщено автору. Здесь

$$\rho^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2,\quad r^2=\rho^2+(z-z_0)^2,\quad \tau=t-t_0,$$

J_0 — функция Бесселя нулевого порядка. Это решение можно найти например, методом разделения переменных.

Первообразная по t от функции Φ

$$\frac{1}{\rho}\int\limits_0^{\frac{\rho\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{r}}\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\alpha^2\rho^2}}J_0(\xi)\,d\xi \tag{11}$$

будет также решением уравнения (2*).

При построении решения задачи Коши для системы (1) мы используем функцию (11), но ее будет недостаточно, потребуются еще другие частные решения. Мы нашли, что другими частными решениями однородного уравнения (2*) будут функции:

$$\frac{(z-z_0)\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{\rho r^2}J_0'\left(\frac{\rho\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{r}\right), \tag{12}$$

$$\frac{(x-x_0)\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{\rho r^2}J_0'\left(\frac{\rho\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{r}\right), \tag{13}$$

$$\frac{(x-x_0)(\tau^2-\alpha^2r^2)}{r\rho^2\tau}J_0\left(\frac{\rho\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{\rho^3}\right)-\frac{x-x_0}{\rho^3}\int\limits_0^{\frac{\rho\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{r}}\frac{\xi(\xi^2+2\alpha^2\rho^2)}{(\xi^2+\alpha^2\rho^2)^{\frac{3}{2}}}J_0(\xi)\,d\xi \tag{14}$$

и функции, полученные заменой x на y в формулах (13) и (14).

В том, что указанные функции действительно будут удовлетворять уравнению (2*), можно убедиться непосредственным дифференцированием с использованием соотношения

$$J_0''(\xi)=-\frac{1}{\xi}J_0'(\xi)-J_0(\xi).$$

Пользуясь этими решениями, построим систему функций $\Phi_{\rm I}$, $\Phi_{\rm II}$, $\Phi_{\rm III}, Q$, которую назовем фундаментальной для системы (1). Смысл этого названия выяснится из дальнейшего.

Положим

$$\Phi_{\text{I}} = \Phi^{11} - \Phi^{12}, \quad \Phi_{\text{II}} = \Phi^{21} + \Phi^{22},$$

где

$$\left.\begin{aligned}
\Phi^{11} &= \frac{(x-x_0)\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{\rho r^2} J_0'\left(\frac{\rho\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{r}\right),\\
\Phi^{12} &= \frac{(y-y_0)(\tau^2-\alpha^2r^2)}{r\rho^2\tau} J_0\left(\frac{\rho\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{r}\right) - \\
&\qquad - \frac{y-y_0}{\rho^3}\int\limits_0^{\frac{\rho\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{\rho}} \frac{\xi(\xi^2+2\alpha^2\rho^2)}{(\xi^2+\alpha^2\rho^2)^{\frac{3}{2}}} J_0(\xi)\,d\xi,\\
\Phi^{21} &= \frac{(y-y_0)\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{\rho r^2} J_0'\left(\frac{\rho\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{r}\right),\\
\Phi^{22} &= \frac{(x-x_0)(\tau^2-\alpha^2r^2)}{r\rho^2\tau} J_0\left(\frac{\rho\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{r}\right) - \\
&\qquad - \frac{x-x_0}{\rho^3}\int\limits_0^{\frac{\rho\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{r}} \frac{\xi(\xi^2+2\alpha^2\rho^2)}{(\xi^2+\alpha^2\rho^2)^{\frac{3}{2}}} J_0(\xi)\,d\xi,\\
\Phi_{\text{III}} &= \frac{(z-z_0)\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{\rho r^2} J_0'\left(\frac{\rho\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{r}\right),\\
Q &= \frac{1}{\rho}\int\limits_0^{\frac{\rho\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{r}} \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\alpha^2\rho^2}} J_0(\xi)\,d\xi.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

В работе (¹) С. Л. Соболевым было доказано, что решение однородной системы (1) при $\alpha = 0$ представимо в виде:

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \operatorname{grad}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + \left(\operatorname{grad}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\times\vec{k}\right) + \vec{k}\,(\operatorname{grad}\Phi, \vec{k}),\\
p &= -\frac{\partial^3\Phi}{\partial t^3} - \frac{\partial\Phi}{\partial t},
\end{aligned} \tag{16}$$

где Φ есть решение уравнения

$$L_2\Phi \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta\Phi + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0,$$

$\vec{k}$ — единичный орт по оси z.

В нашем случае (при $\alpha \neq 0$) верна аналогичная

ТЕОРЕМА. *Общее решение однородной системы* (1) *дается формулой* (16), *где* Φ *есть некоторое решение уравнения* (2*).

Доказательство этой теоремы по существу ничем не отличается от доказательства аналогичного утверждения при $\alpha = 0$, данного в работе (¹) (нужно только везде вместо решения уравнения $L_2\Phi = 0$ использовать решение уравнения (2*)), поэтому мы его опускаем.

Далее, по формуле (16) с помощью функций (15) мы построим четыре частных решения однородной системы (1) и при помощи этих частных решений построим решение задачи Коши в явном виде; таким образом, будет оправдано название фундаментальной для полученной системы частных решений (15).

§ 4. Построение решения

Переходим непосредственно к решению задачи Коши для системы (1) с начальными данными (3).

Вырежем из области Ω_3 трехмерного пространства x, y, z, содержащей точку x_0, y_0, z_0, цилиндр $|z-z_0| \leqslant h$, $\rho \leqslant \eta$, поверхность которого обозначим через $S_{h,\eta}$. В качестве $\vec{w}$, q в формуле (9) возьмем $\vec{w}^{\mathrm{I}}$, q^{I}, определяемые формулами:

$$\begin{aligned} w_x^{\mathrm{I}} &= w_x^{11} - w_x^{12}, \quad w_z^{\mathrm{I}} = w_z^{11} - w_z^{12}, \\ w_y^{\mathrm{I}} &= w_y^{11} - w_y^{12}, \quad q^{\mathrm{I}} = q^{11} - q^{12}, \end{aligned} \tag{17}$$

где $\vec{w}^{11}$, q^{11} и $\vec{w}^{12}$, q^{12} определяются по формуле (16) с использованием Φ^{11} и Φ^{12} соответственно [см. (15)]. Область Ω в пространстве x, y, z (основание четырехмерного конуса) с вырезанной при помощи цилиндра $S_{h,\eta}$ точкой x_0, y_0, z_0 обозначим через $\Omega_{h,\eta}$. Тогда формулу (9) можно записать так:

$$\iiint\limits_{\Omega_{h,\eta}} \left\{ \int\limits_0^{t_0-\alpha r} [(\vec{w}^{\mathrm{I}}, F) + q^{\mathrm{I}}\psi]\, dt \right\} d\Omega =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega_{h,\eta}} [(\vec{w}^{\mathrm{I}}, \vec{v}) + \alpha^2 q^{\mathrm{I}} p]_{\tau=-\alpha r}\, dx\, dy\, dz + (p w_x^{\mathrm{I}} + q^{\mathrm{I}} v_x)_{\tau=-\alpha r}\, dy\, dz\, dt +$$

$$+ (p w_y^{\mathrm{I}} + q^{\mathrm{I}} v_y)_{\tau=-\alpha r}\, dx\, dz\, dt + (p w_z^{\mathrm{I}} + q^{\mathrm{I}} v_z)_{\tau=-\alpha r}\, dx\, dy\, dt -$$

$$- \iint\limits_{S_{h,\eta}} \left[\int\limits_0^{t_0-\alpha r} (p w_n^{\mathrm{I}} + q^{\mathrm{I}} v_n)\, dt \right] dS - \iiint\limits_{\Omega_{h,\eta}} [(\vec{w}^{\mathrm{I}}, \vec{v}) + \alpha^2 q^{\mathrm{I}} p]_{t=0}\, dx\, dy\, dz. \tag{18}$$

Переходя к пределу при $\eta \to 0$, найдем:

$$\lim_{\eta\to 0} I^{(1)} = \lim_{\eta\to 0} \iiint\limits_{\Omega_{h,\eta}} [(\vec{w}^{\mathrm{I}}, \vec{v}) + \alpha^2 q^{\mathrm{I}} p]_{\tau=-\alpha r}\, dx\, dy\, dz +$$

$$+ (p w_x^{\mathrm{I}} + q^{\mathrm{I}} v_x)_{\tau=-\alpha r}\, dy\, dz\, dt + (p w_y^{\mathrm{I}} + q^{\mathrm{I}} v_y)_{\tau=-\alpha r}\, dx\, dz\, dt +$$

$$+ (p w_z^{\mathrm{I}} + q^{\mathrm{I}} v_z)_{\tau=-\alpha r}\, dx\, dy\, dt \tag{19}$$

и

$$\lim_{\eta\to 0} I^{(2)} = \lim_{\eta\to 0} \iint\limits_{S_{h,\eta}} \left[\int\limits_0^{t_0-\alpha r} (p w_n^{\mathrm{I}} + q^{\mathrm{I}} v_n)\, dt \right] dS. \tag{20}$$

Сначала будем определять предел выражения (19), причем ввиду сложности выкладок удобнее вычислять интегралы для $\vec{w}^{11}$, q^{11}, и $\vec{w}^{12}$, q^{12} отдельно. Найдем пределы $\vec{w}^{11}$ при $\tau \to -\alpha r$:

$$\left.\begin{aligned}
\lim_{\tau\to-\alpha r} w_x^{11} &= \frac{3(x-x_0)^2-r^2}{r^5}+\frac{\alpha^2\rho^2[r^2-4(x-x_0)^2]+2\alpha^2(x-x_0)^2(z-z_0)^2}{2r^5}+\\
&+\frac{\alpha^4\rho^4(x-x_0)^2}{8r^5}-\frac{3\alpha(x-x_0)(y-y_0)}{r^4}+\frac{\alpha^3\rho^2(x-x_0)(y-y_0)}{2r^4},\\
\lim_{\tau\to-\alpha r} w_y^{11} &= \frac{3(x-x_0)(y-y_0)}{r^5}+\frac{\alpha^2(x-x_0)(y-y_0)[(z-z_0)^2-2\rho^2]}{r^5}+\\
&+\frac{\alpha^4\rho^4(x-x_0)(y-y_0)}{8r^5}+\frac{\alpha[3(x-x_0)^2-r^2]}{r^4}-\frac{\alpha^3\rho^2(x-x_0)^2}{2r^4},\\
\lim_{\tau\to-\alpha r} w_z^{11} &= \frac{3(x-x_0)(z-z_0)}{r^5}+\frac{\alpha^2[(z-z_0)^2-2\rho^2](x-x_0)(z-z_0)}{r^5}+\\
&+\frac{\alpha^4\rho^4(x-x_0)(z-z_0)}{8r^5},\\
\lim_{\tau\to-\alpha r} q^{11} &= \frac{\alpha(x-x_0)[\rho^2-2(z-z_0)^2]}{2r^4}-\frac{\alpha^3\rho^4(x-x_0)}{8r^4}.
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Точно так же, используя фундаментальное решение Φ^{12}, найдем:

$$\left.\begin{aligned}
\lim_{\tau\to-\alpha r} w_x^{12} &= -\frac{3\alpha(x-x_0)(y-y_0)}{r^4}+\frac{\alpha^2(y-y_0)^2}{r^3}+\frac{\alpha^3\rho^2(x-x_0)(y-y_0)}{2r^4},\\
\lim_{\tau\to-\alpha r} w_y^{12} &= \frac{\alpha[r^2-3(y-y_0)^2]}{r^4}+\frac{\alpha^3\rho^2(y-y_0)^2}{2r^4}-\frac{\alpha^2(x-x_0)(y-y_0)}{r^3},\\
\lim_{\tau\to-\alpha r} w_z^{12} &= \frac{-3\alpha(y-y_0)(z-z_0)}{r^4}+\frac{\alpha^3\rho^2(y-y_0)(z-z_0)}{2r^4},\\
\lim_{\tau\to-\alpha r} q^{12} &= \frac{y-y_0}{r^3}-\frac{\alpha^2\rho^2(y-y_0)}{2r^3}.
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Подставим в интеграл $\iiint\limits_{\Omega_{h,\eta}}(pw_x^{\mathrm{I}}+q^{\mathrm{I}}v_x)_{\tau=-\alpha r}\,dy\,dz\,dt$ значения пределов $w_x^{\mathrm{I}}=w_x^{11}-w_x^{12}$ и $q^{\mathrm{I}}=q^{11}-q^{12}$ из (21) и (22). В подынтегральную функцию после подстановки $-\alpha r$ вместо τ независимое переменное будет входить только неявно, поэтому здесь удобно сделать замену переменного t на x по формуле $t=t_1-t_0-\alpha r$, оставляя независимые переменные x, y, z на месте: $x=x_1$, $y=y_1$, $z-z_1$. Определитель преобразования при этом будет равен $\frac{\alpha(x_1-x_0)}{r_1}$. В третьем и четвертом слагаемых формулы (19) после подстановки в них пределов из (21) и (22) независимое переменное t заменим по той же формуле соответственно на y и z с определителями преобразования

$$\frac{\alpha(y_1-y_0)}{r_1} \quad \text{и} \quad \frac{\alpha(z_1-z_0)}{r_1},$$

оставляя на месте другие независимые переменные. Приведя подобные члены *, найдем (сразу пишем подынтегральное выражение в удобном для интегрирования виде):

---

* Условимся для краткости записи везде в промежуточных выкладках вместо x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0, r_1, ρ_1 писать x_1, y_1, z_1, r, ρ, подставляя x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0, r_1, ρ_1 лишь в окончательный результат.

$$I^{(1)} = \iiint\limits_{\Omega_{h,\,\eta}} \left\{ v_x^1 \left(\frac{3x_1^2 - r^2}{r^5} - \frac{3\alpha x_1 y_1}{r^4} + \frac{\alpha^2 (r^2\rho^2 - 3\rho^2 x_1^2 + 2r^2 x_1^2)}{2r^5} - \frac{\alpha^2 x_1^2}{r^3} + \frac{\alpha^3 \rho^2 x_1 y_1}{2r^4} \right) + \right.$$

$$+ v_x^1 \left(\frac{2\alpha x_1 y_1}{r^4} - \frac{\alpha^2 y_1^2}{r^3} \right) +$$

$$+ v_y^1 \left(\frac{3x_1 y_1}{r^5} + \frac{\alpha x_1^2}{r^4} + \frac{\alpha (2x_1^2 - r^2)}{r^4} - \frac{\alpha^2 x_1 y_1}{r^3} + \frac{\alpha^2 x_1 y_1 (2z_1^2 - \rho^2)}{2r^5} - \frac{\alpha^3 \rho^2 x_1^2}{2r^4} \right) +$$

$$+ v_y^1 \left(\frac{\alpha (2y_1^2 - r^2)}{r^4} + \frac{\alpha x_1 y_1}{r^3} \right) + v_z^1 \left(\frac{3x_1 z_1}{r^5} - \frac{3\alpha^2 \rho^2 x_1 z_1}{2r^5} \right) +$$

$$\left. + v_z^1 \frac{2\alpha y_1 z_1}{r^4} + p^1 \left(\frac{2\alpha x_1}{r^4} - \frac{\alpha^3 \rho^2 x_1}{r^4} - \frac{\alpha^2 y_1}{r^3} \right) + p^1 \frac{\alpha^2 y_1}{r^3} \right\} dx_1\, dy_1\, dz_1. \tag{23}$$

Здесь интегрирование ведется по характеристической поверхности, поэтому мы будем пользоваться соотношениями на характеристиках (7) и (8), выведенными в § 1. Преобразуем подынтегральное выражение в (23) к дивергентному виду. Пользуясь (7), получим:

$$v_x^1 \frac{3x_1^2 - r^2}{r^5} + v_y^1 \frac{3x_1 y_1}{r^5} + v_z^1 \frac{3x_1 z_1}{r^5} = -\operatorname{div}\left(\frac{x_1}{r^3} \vec{v}^1 \right) +$$

$$+ \frac{\alpha x_1 y_1}{r^4} v_x^1 - \frac{\alpha x_1^2}{r^4} v_y^1 + \frac{\alpha}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(p^1 \cdot \frac{x_1}{r} \right) + \frac{x_1}{r^3} N^1, \tag{24}$$

$$v_x^1 \cdot \frac{\alpha^3 \rho^2 x_1 y_1}{2r^4} - v_y^1 \frac{\alpha^3 \rho^2 x_1^2}{2r^4} = \operatorname{div}\left(\vec{v}^1 \cdot \frac{\alpha^2 \rho^2 x_1}{2r^3} \right) - v_x^1 \cdot \frac{\alpha^2 (r^2\rho^2 - 3\rho^2 x_1^2 + 2r^2 x_1^2)}{2r^5} -$$

$$- v_y^1 \frac{\alpha^2 x_1 y_1 (2z_1^2 - \rho^2)}{2r^5} + v_z \cdot \frac{3\alpha^2 \rho^2 x_1 z_1}{2r^5} -$$

$$- \frac{\alpha^3}{2r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(p^1 \cdot \frac{\rho^2 x_1}{r} \right) + \frac{\alpha^3 \rho^2 x_1}{r^4} p^1 - \frac{\alpha^2 \rho^2 x_1}{2r^3} N^1. \tag{25}$$

Применяя (8) и производя несложные преобразования, найдем:

$$v_y^1 \cdot \frac{\alpha (2x_1^2 - r^2)}{r^4} - v_x^1 \cdot \frac{2\alpha x_1 y_1}{r^4} = \frac{\partial}{\partial y_1} \left(v_x^1 \cdot \frac{\alpha x_1}{r^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(v_y^1 \cdot \frac{\alpha x_1}{r^2} \right) +$$

$$+ \operatorname{div}\left(\frac{\alpha x_1}{r^2} \operatorname{grad} p^1 \right) + \frac{2\alpha}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{x_1}{r} p^1 \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(p^1 \cdot \frac{\alpha}{r^2} \right) -$$

$$- p^1 \cdot \frac{2\alpha x_1}{r^4} + \frac{2\alpha^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(x_1 \cdot \frac{\partial p^1}{\partial t^1} \right) + \frac{\partial}{\partial y_1} \left(p^1 \cdot \frac{\alpha^2 x_1^2}{r^3} \right) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x_1} \left(p^1 \cdot \frac{\alpha^2 x_1 y_1}{r^3} \right) + p^1 \cdot \frac{\alpha^2 y_1}{r^3} + \frac{\alpha^2 x_1^2}{r^3} v_x^1 + \frac{\alpha^2 x_1 y_1}{r^3} v_y^1 + \frac{\alpha x_1}{r^2} \chi^1. \tag{26}$$

Далее, пользуясь (7), получим:

$$v_x^1 \cdot \frac{2\alpha x_1 y_1}{r^4} + v_y^1 \cdot \frac{\alpha (2y_1^2 - r^2)}{r^4} + v_z^1 \cdot \frac{2\alpha y_1 z_1}{r^4} = -\operatorname{div}\left(\frac{\alpha y_1}{r^2} \vec{v}^1 \right) +$$

$$+ \frac{\alpha^2 y_1^2}{r^3} v_x^1 - \frac{\alpha^2 x_1 y_1}{r^3} v_y^1 + \frac{\alpha^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (y_1 p^1) - p^1 \frac{\alpha^2 y_1}{r^3} + \frac{\alpha y_1}{r^2} N^1. \tag{27}$$

Подставляя (24), (25), (26), (27) в (23), производя сокращения и обозначая через θ^1 известный член

$$\left(\frac{x_1}{r^3}+\frac{\alpha y_1}{r^2}-\frac{\alpha^2\rho^2 x_1}{2r^3}\right)N^1+\frac{\alpha x_1}{r^2}\chi^1,$$

получим:

$$I^{(1)}=\iiint\limits_{\Omega_{h,\eta}}\left\{-\operatorname{div}\left(\frac{x_1}{r^3}\vec{v}^1\right)+\operatorname{div}\left(\vec{v}^1\cdot\frac{\alpha^2\rho^2 x_1}{2r^3}\right)+\operatorname{div}\left(\frac{\alpha x_1}{r^2}\operatorname{grad}p^1\right)-\right.$$

$$-\operatorname{div}\left(\frac{\alpha y_1}{r^2}\vec{v}^1\right)+\frac{\partial}{\partial y_1}\left(v_x^1\cdot\frac{\alpha x_1}{r^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y_1}\left(p^1\cdot\frac{\alpha^2 x_1^2}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(p^1\cdot\frac{\alpha}{r^2}\right)-$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(p^1\cdot\frac{\alpha^2 x_1 y_1}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(v_y^1\cdot\frac{\alpha x_1}{r^2}\right)+\theta^1\right\}dx_1dy_1dz_1+$$

$$+\iiint\limits_{\Omega_{h,\eta}}\left\{\frac{3\alpha}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(p^1\cdot\frac{x_1}{r}\right)-\frac{\alpha^3}{2r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(p^1\cdot\frac{\rho^2 x_1}{r}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{2\alpha^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(x_1\cdot\frac{\partial p^1}{\partial t_1}\right)+\frac{\alpha^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(y_1p^1)\right\}dx_1dy_1dz_1. \tag{28}$$

Примем за поверхность, ограничивающую область $\Omega_{h,\eta}$, поверхность $t_0-\alpha r=0$; тогда на ней будет $t=0$ при $t_1=0$. Область $\Omega_{h,\eta}$ в таком случае есть шар радиуса $\frac{t_0}{\alpha}$ с центром в точке x_0, y_0, z_0, причем эта точка вырезана из шара цилиндром $\rho\leqslant\eta$, $|z-z_0|\leqslant h$, поверхность которого у нас обозначена через $S_{h,\eta}$. Рассмотрим сначала первый интеграл в (28). Перейдем в нем от объемного интегрирования к интегрированию по поверхности, написав всюду вместо x_1, y_1, z_1 опять x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0. Затем перейдем от новых координат x_1, y_1, z_1, t_1 к старым и примем во внимание, что

$$\left.\frac{\partial p_1}{\partial n}\right|_{t=0}=\frac{\partial p^0}{\partial n}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial r}{\partial n}\left[\operatorname{div}\vec{v}^0-\psi(x,y,z,0)\right].$$

Тогда получим:

$$\iint\limits_{r=\frac{t_0}{\alpha}}\left\{\left(\frac{x-x_0}{r^3}-\frac{\alpha^2\rho^2(x-x_0)}{2r^3}+\frac{\alpha(y-y_0)}{r^2}\right)v_n^0-\frac{\alpha(x-x_0)}{r^2}\frac{\partial p^0}{\partial n}+\right.$$

$$+\frac{\alpha(x-x_0)}{r^3}p^0-\frac{x-x_0}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}(\operatorname{div}\vec{v}^0-\psi|_{t=0})-\frac{\alpha(x-x_0)(y-y_0)}{r^3}v_x^0+$$

$$\left.+\frac{\alpha(x-x_0)^2}{r^3}v_y^0\right\}dS+\iint\limits_{S_{h,\eta}}\left\{\frac{x-x_0}{r^3}v_n(x,y,z,t_0-\alpha r)+\left[\frac{\alpha(y-y_0)}{r^3}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha^2\rho^2(x-x_0)}{2r^3}\right]v_n-\frac{\alpha(x-x_0)}{r^2}\left(\frac{\partial p}{\partial n}-\alpha\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial p}{\partial t}\right)-\frac{\alpha(x-x_0)}{r^2}v_x\cos(n,y)+$$

$$+\frac{\alpha(x-x_0)}{r^2}v_y\cos(n,x)+\frac{\alpha}{r^2}p\cos(n,x)-\frac{\alpha^2(x-x_0)^2}{r^3}p\cos(n,y)+$$

$$\left.+\frac{\alpha^2(x-x_0)(y-y_0)}{r^3}p\cos(n,x)\right\}dS+\iiint\limits_{r\leqslant\frac{t_0}{\alpha}}\theta\,dxdydz.$$

В интеграле по $S_{h,\eta}$ все члены, за исключением $\frac{x-x_0}{r^3}v_n$ и $\frac{\alpha}{r^2}p\cos(n,x)$, имеют интегрируемую особенность, поэтому интеграл по $S_{h,\eta}$ от них при $\eta\to 0$ стремится к нулю. Предел интеграла

$$\lim_{\eta\to 0}\iint\limits_{S_{h,\eta}} \frac{x-x_0}{r^3} v_n(x, y, z, t_0-\alpha r)\, dS$$

подсчитан в работе С. Л. Соболева (1) и равен $2\pi v_x(x_0, y_0, z_0, t_0)$, так как у нас

$$v_x(x, y, z, t_0-\alpha r)\,|_{x_0,y_0,z_0} = v_x(x_0, y_0, z_0, t_0).$$

Далее,

$$\lim_{\eta\to 0}\iint\limits_{S_{h,\eta}} \frac{\alpha}{r^2} p(x, y, z, t_0-\alpha r)\cos(n, x)\, dS =$$

$$= p(x_0, y_0, z_0, t_0)\lim_{\eta\to 0}\iint\limits_{S_{h,\eta}} \frac{\alpha}{r^2}\cos(n, x)\, dS.$$

В самом деле,

$$\lim_{\eta\to 0}\iint\limits_{S_{h,\eta}} (p-p\,|_{x_0,y_0,z_0})\,\frac{\alpha}{r^2}\cos(n, x)\,\rho dz d\varphi = 0,$$

так как везде, кроме точки $z=z_0$, подынтегральная функция $\frac{\rho}{r^2}$ стремится к нулю, а в окрестности этой точки интеграл сколь угодно мал в силу малости величины $p-p\,|_{x_0,y_0,z_0}$. На дисках $\cos(n, x)=0$, поэтому остается интеграл по боковой поверхности

$$p(x_0, y_0, z_0, t_0)\lim_{\eta\to 0}\int\limits_{-h}^{+h}\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\alpha(x-x_0)}{r^2}\, dz d\varphi,$$

который равен нулю в силу нечетности подынтегральной функции. Во втором интеграле (28) перейдем к сферическим координатам и проинтегрируем точно так же, как и в первом интеграле, воспользовавшись известной формулой

$$[-\operatorname{sign}\cdot\cos(r, n)]\sin\theta d\theta d\varphi = d\omega = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}dS.$$

При этом интеграл по цилиндру $S_{h,\eta}$ будет равен

$$\iint\limits_{S_{h,\eta}} \Big\{-\frac{3\alpha(x-x_0)}{r^3}\frac{\partial r}{\partial n}p + \frac{\alpha^3\rho^2(x-x_0)}{2r^3}\frac{\partial r}{\partial n}p -$$

$$-\frac{2\alpha^2(x-x_0)}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\alpha^2(y-y_0)}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}p\Big\}\, dS.$$

Предел при $\eta\to 0$ от последних трех членов этого интеграла равен нулю, так как они имеют интегрируемую особенность или вовсе не име-

ют ее; предел интеграла от первого члена тоже равен нулю. Действительно,

$$\lim_{\eta\to 0}\iint\limits_{S_{h,\eta}}\frac{x-x_0}{r^3}\frac{\partial r}{\partial n}p\,dS=\lim_{\eta\to 0}\int\limits_{-h}^{h}\int\limits_{0}^{2\pi}\left[\frac{(x-x_0)^3}{r^4}+\frac{(x-x_0)(y-y_0)^2}{r^4}\right]p\,dz\,d\varphi+$$

$$+\lim_{\eta\to 0}\left\{\int\limits_0^{\eta}\int\limits_0^{2\pi}\frac{(x-x_0)\,h}{r^4}\,p\Big|_{z=z_0+h}\rho\,d\rho\,d\varphi+\int\limits_0^{\eta}\int\limits_0^{2\pi}\frac{(x-x_0)\,h}{r^4}\,p\Big|_{z=z_0-h}\rho\,d\rho\,d\varphi\right\}.$$

Предел последних двух интегралов в этом выражении равен нулю, так как при $\eta\to 0$ подынтегральная функция ограничена, а область интегрирования уничтожается. Рассуждения, аналогичные проведенным выше, позволяют убедиться, что предел первого интеграла равен

$$p(x_0,y_0,z_0,t_0)\cdot\lim_{\eta\to 0}\int\limits_{-h}^{h}\int\limits_{0}^{2\pi}\left[\frac{(x-x_0)^3}{r^4}+\frac{(x-x_0)(y-y_0)^2}{r^4}\right]dz\,d\varphi,$$

который будет нулем в силу нечетности подынтегральной функции.

Обозначая

$$\lim_{\eta\to 0}\iiint\limits_{\Omega_{h,\eta}}F(x,y,z,t)\,d\Omega=\text{Гл. зн. ц.}\iiint\limits_{\Omega}F(x,y,z,t)\,d\Omega,$$

имеем окончательно

$$\lim_{\eta\to 0}I^{(1)}=2\pi v_x(x_0,y_0,z_0,t_0)+\iint\limits_{r=\frac{t_0}{\alpha}}\left\{\left(\frac{x-x_0}{r^3}-\frac{\alpha^2\rho^2(x-x_0)}{2r^3}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha(y-y_0)}{r^2}\right)v_n^0-\frac{\alpha(x-x_0)}{r^2}\frac{\partial p^0}{\partial n}+\frac{(x-x_0)}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}[\operatorname{div}\vec{v}^0-\psi^0]-$$

$$-\frac{\alpha(x-x_0)(y-y_0)}{r^3}v_x^0+\frac{\alpha(x-x_0)^2}{r^3}v_y^0+\frac{\alpha(x-x_0)}{r^3}p^0+$$

$$\left.+\left(-\frac{3\alpha(x-x_0)}{r^3}-\frac{\alpha^2(y-y_0)}{r^2}+\frac{\alpha^3\rho^2(x-x_0)}{2r^3}\right)\frac{\partial r}{\partial n}p^0\right\}dS+$$

$$+\iiint\limits_{r<\frac{t_0}{\alpha}}\left\{\left[\frac{x-x_0}{r^3}+\frac{\alpha(y-y_0)}{r^2}-\frac{\alpha^2\rho^2(x-x_0)}{2r^3}\right]N+\frac{\alpha(x-x_0)}{r^2}\chi\right\}dx\,dy\,dz. \qquad (29)$$

Подсчитаем предел выражения (20), где

$$\left.\begin{aligned}
&\vec{w}^I=w^{111}+\vec{w}^{112}-w^{121}-\vec{w}^{122},\\
&q^I=q^{111}+q^{113}-q^{121}=q^{123},\\
&w_x^{111}=\frac{\partial^3\Phi^{11}}{\partial x\partial t^2},\quad w_x^{112}=\frac{\partial^2\Phi^{11}}{\partial y\partial t},\quad w_x^{121}=\frac{\partial^3\Phi^{12}}{\partial x\partial t^2},\quad w_x^{122}=\frac{\partial^2\Phi^{12}}{\partial y\partial t},\\
&w_y^{111}=\frac{\partial^3\Phi^{11}}{\partial y\partial t^2},\quad w_y^{112}=-\frac{\partial^2\Phi^{11}}{\partial x\partial t},\quad w_y^{121}=\frac{\partial^3\Phi^{12}}{\partial y\partial t^2},\quad w_y^{122}=-\frac{\partial^2\Phi^{12}}{\partial x\partial t},\\
&w_z^{111}=\frac{\partial^3\Phi^{11}}{\partial z\partial t^2},\quad w_z^{112}=\frac{\partial\Phi^{11}}{\partial z},\quad w_z^{121}=\frac{\partial^3\Phi^{12}}{\partial z\partial t^2},\quad w_z^{122}=\frac{\partial\Phi^{12}}{\partial z},\\
&q^{111}=-\frac{\partial^3\Phi^{11}}{\partial t^3},\quad q^{113}=-\frac{\partial\Phi^{11}}{\partial t},\quad q^{121}=-\frac{\partial^3\Phi^{12}}{\partial t^3},\quad q^{123}=-\frac{\partial\Phi^{12}}{\partial t}
\end{aligned}\right\}\quad(30)$$

Обозначим

$$\lim_{\eta\to 0}\iint\limits_{S_{h,\eta}} p w_n^{ijk} dS = k^{ijk},$$

$$\lim_{\eta\to 0}\iint\limits_{S_{h,\eta}} q^{ijk} v_x \cos(n, x)\, dS = l_x^{ijk},$$

$$\lim_{\eta\to 0}\iint\limits_{S_{h,\eta}} q^{ijk} v_y \cos(n, y)\, dS = l_y^{ijk},$$

$$\lim_{\eta\to 0}\iint\limits_{S_{h,\eta}} q^{ijk} v_z \cos(n, z)\, dS = l_z^{ijk}.$$

Вычислим k^{ijk}, l_x^{ijk}, l_y^{ijk}, l_z^{ijk}. Начнем с величины l^{ijk}. Как и в работе (1), имеем:

$$l_x^{ijk} = \lim_{\eta\to 0}\iint\limits_{S_{h,\eta}} v_x|_{x_0,y_0,z_0}\, q^{ijk}\cos(n, x)\, dS,$$

$$l_y^{ijk} = \lim_{\eta\to 0}\iint\limits_{S_{h,\eta}} v_y|_{x_0,y_0,z_0}\cdot q^{ijk}\cos(n, y)\, dS,$$

$$l_z^{ijk} = \lim_{\eta\to 0}\iint\limits_{S_{h,\eta}} v_z|_{x_0,y_0,z_0}\cdot q^{ijk}\cos(n, z)\, dS.$$

Так как q^{111} и q^{113} содержат множителем $x - x_0$, а q^{121} и q^{123} содержат множителем $y - y_0$, причем оставшиеся множители не зависят от угла φ в цилиндрических координатах, то среди интегралов l^{ijk} отличными от нуля будут только l_x^{111}, l_x^{113}, l_y^{121}, l_y^{123}, а остальные равны нулю. Имеем:

$$l_x^{111} = -v_x(x_0, y_0, z_0, t)\, a_4(\tau),$$

$$l_x^{113} = -v_x(x_0, y_0, z_0, t)\, a_3(\tau),$$

$$l_y^{121} = -v_y(x_0, y_0, z_0, t)\, a_2(\tau),$$

$$l_y^{123} = -v_y(x_0, y_0, z_0, t)\cdot a_1(\tau),$$

где $\tau = t - t_0$,

$$a_1(\tau) = \lim_{\eta\to 0}\int\limits_{-h}^{h}\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\partial\Phi^{12}}{\partial t}\eta\cos(n, y)\, dz d\varphi,$$

$$a_2(\tau) = a_1''(\tau), \qquad a_3(\tau) = a_1'(\tau), \qquad a_4(\tau) = a_1'''(\tau).$$

Вычислим $a_1(\tau)$:

$$a_1(\tau) = \lim_{\eta\to 0}\int\limits_{-h}^{h}\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{(y-y_0)^2\sqrt{\tau^2-\alpha^2 r^2}}{\rho r^2} J_0'\left(\frac{\rho\sqrt{\tau^2-\alpha^2 r^2}}{r}\right) dz d\varphi.$$

Произведя замену переменных

$$\rho/r = \zeta, \quad dz/\rho = -\frac{d\zeta}{\zeta^2\sqrt{1-\zeta^2}},$$

получим:

$$a_1(\tau) = \lim_{\eta \to 0} 2\pi \int\limits_{\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+h^2}}}^{1} \frac{\sqrt{\zeta^2\tau^2-\alpha^2\rho^2}}{\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} J_0'\left(\sqrt{\zeta^2\tau^2-\alpha^2\rho^2}\right) d\zeta. \tag{31}$$

Совершим предельный переход под знаком интеграла. Для обоснования этого построим мажоранту для подынтегральной функции, не зависящую от ρ. При нижнем пределе интегрирования

$$\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+h^2}}$$

функция

$$\frac{\sqrt{\zeta^2\tau^2-\alpha^2\rho^2}}{\zeta}$$

будет ограниченной и равной

$$\sqrt{\tau^2-\alpha^2(\rho^2+h^2)},$$

функция

$$J_0'\left(\sqrt{\tau^2\zeta^2-\alpha^2\rho^2}\right)$$

тоже ограничена в наших пределах интеграции, поэтому мажорантой для

$$\frac{\sqrt{\zeta^2\tau^2-\alpha^2\rho^2}}{\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} J_0'\left(\sqrt{\zeta^2\tau^2-\alpha^2\rho^2}\right)$$

будет

$$\frac{M}{\sqrt{1-\zeta^2}}.$$

Переходя к пределу под знаком интеграла в (31), получим:

$$a_1(\tau) = 2\pi\tau \int\limits_0^1 \frac{J_0'(\zeta\tau)}{\sqrt{1-\zeta^2}} d\zeta,$$

и, на основании формул (110) работы ([1]),

$$a_1(\tau) = 2\pi(\cos\tau - 1).$$

Вычисляя остальные a_i ($i = 2, 3, 4$), получаем:

$$l_x^{111} + l_x^{113} - l_y^{121} - l_y^{123} = -2\pi v_y(x_0, y_0, z_0, t). \tag{32}$$

Переходим к вычислению интегралов k^{ijk}. Запишем их в преобразованном виде. Пусть

$$k^{ijk} = \lim_{\eta \to 0} \iint\limits_{S_{h,\eta}} \left[p_{x_0,y_0,z_0,t} + (x-x_0)\frac{\partial p}{\partial x}\bigg|_{x_0,y_0,z_0,t} + (y-y_0)\frac{\partial p}{\partial y}\bigg|_{x_0,y_0,z_0,t} + \right.$$

$$\left. + (z-z_0)\frac{\partial p}{\partial z}\bigg|_{x_0,y_0,z_0,t}\right] w_n^{ijk} dS + \lim_{\eta \to 0} \iint\limits_{S_{h,\eta}} \left[p - p\,|_{x_0,y_0,z_0,t} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial p}{\partial x}\bigg|_{x_0,y_0,z_0,t}(x-x_0) - \frac{\partial p}{\partial y}\bigg|_{x_0,y_0,z_0,t}(y-y_0) - \frac{\partial p}{\partial z}\bigg|_{x_0,y_0,z_0,t}(z-z_0)\right] w_n^{ijk} dS.$$

Последнее слагаемое этой формулы равно нулю, когда точка x, y, z стремится к точке x_0, y_0, z_0. Действительно, рассматривая выражение в квадратных скобках как остаточный член ряда Тейлора, видим, что оно имеет порядок r^2, $w_n^{ijk}\rho$ имеет порядок $\frac{A}{r^2}$, следовательно, подынтегральное выражение ограничено в окрестности точки x_0, y_0, z_0, а область интегрирования стягивается в точку. Кроме того,

$$p_{x_0,y_0,z_0,t}\cdot\iint\limits_{S_{h,\eta}} w_n^{ijk}\,dS=0,$$

так как все w_n^{ijk} представляют собой нечетные функции от одной из переменных $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ и имеют при этом суммарную нечетную степень по всем этим переменным вместе. Подсчитаем оставшееся выражение:

$$\vec{k}^{\,ijk}=\operatorname{grad}p\,|_{x_0,y_0,z_0,t}\cdot\vec{b}^{\,ijk},$$

где

$$b_x^{ijk}=\lim_{\eta\to 0}\iint\limits_{S_{h,\eta}}(x-x_0)w_n^{ijk}\,dS \tag{33}$$

и т. д. На площадках $z=\pm h$ и на боковой поверхности цилиндра интегралы от w_z^{ijk} в (33) обращаются в нуль, следовательно, остается подсчитать

$$\int\limits_{-h}^{h}\int\limits_{0}^{2\pi}(x-x_0)\left[\frac{x-x_0}{\rho}w_x^{ijk}+\frac{y-y_0}{\rho}w_y^{ijk}\right]\rho\,dz\,d\varphi$$

и, соответственно, в b_y^{ijk} и b_z^{ijk}.

Заметим, что b_x^{112} и b_x^{121} равны нулю, так как под знаком интеграла у них стоит нечетная функция от $x-x_0$ и $y-y_0$.

Производя интегрирование по φ и некоторые преобразования, получаем:

$$b_x^{111}=\lim_{\eta\to 0}\int\limits_{-h}^{h}\int\limits_{0}^{2\pi}\left[(x-x_0)^2\frac{\partial^3\Phi^{11}}{\partial x\partial t^2}+(y-y_0)(x-x_0)\frac{\partial^3\Phi^{11}}{\partial y\,\partial t^2}\right]dz\,d\varphi=$$

$$=\lim_{\eta\to 0}2\pi\int\limits_{-h}^{h}\left\{\frac{\rho^2(3\rho^2-r^2)}{r^5}J_0+\frac{\rho^4[(z-z_0)^2\tau^4-\alpha^2r^4\tau^2]}{r^7(\tau^2-\alpha^2r^2)}J_0+\right.$$

$$\left.+\frac{2\rho^3\tau^2(2\rho^2-r^2)}{r^6\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}J_0'+\frac{\alpha^2\rho^3[(z-z_0)^2\tau^2-\rho^2\tau^2-\alpha^2r^4]}{r^4(\tau^2-\alpha^2r^2)^{\frac{3}{2}}}J_0'\right\}dz.$$

Мы условимся не писать аргументы у бесселевых функций, если они равны

$$\frac{\rho\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{r}.$$

Делая, как и раньше, замену

$$\frac{dz}{\rho} = -\frac{d\zeta}{\zeta^2\sqrt{1-\zeta^2}},$$

получим:

$$b_x^{111} = 2\pi\cdot\lim_{\eta\to 0}\int\limits_{\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+h^2}}}^{1}\left\{\left[\frac{\zeta(3\zeta^2-1+\tau^2\zeta^2)}{\sqrt{1-\zeta^2}} - \frac{\tau^4\zeta^7}{\sqrt{1-\zeta^2}\,(\zeta^2\tau^2-\alpha^2\rho^2)}\right]\cdot\right.$$

$$\cdot J_0\left(\sqrt{\zeta^2\tau^2-\alpha^2\rho^2}\right) + \left[\frac{-\zeta\sqrt{\tau^2\zeta^2-\alpha^2\rho^2}}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{6\zeta^5\tau^2-\tau^2\zeta^8}{\sqrt{1-\zeta^2}\sqrt{\zeta^2\tau^2-\alpha^2\rho^2}} -\right.$$

$$\left.\left. - \frac{2\zeta^7\tau^4}{\sqrt{1-\zeta^2}\,(\zeta^2\tau^2-\alpha^2\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\right]J_0'\left(\sqrt{\tau^2\zeta^2-\alpha^2\rho^2}\right)\right\}d\zeta.$$

Построив мажоранты для каждого члена в этом интервале, можно убедиться в его равномерной сходимости по параметру ρ. Совершив предельный переход, получим:

$$b_x^{111} = 2\pi\int\limits_0^1\left\{\left(\frac{3\zeta^2-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{\tau^2(\zeta^3-\zeta^5)}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)J_0(\zeta\tau) + \frac{\tau(4\zeta^4-2\zeta^2)}{\sqrt{1-\zeta^2}}J_0'(\zeta\tau)\right\}d\zeta = 2\pi\cos\tau. \tag{34}$$

Далее,

$$b_x^{122} = \lim_{\eta\to 0}\int\limits_{-h}^{h}\int\limits_0^{2\pi}\left[(x-x_0)^2\,\frac{\partial^2\Phi^{12}}{\partial y\partial t} - (y-y_0)(x-x_0)\,\frac{\partial^2\Phi^{12}}{\partial x\partial t}\right]dzd\varphi =$$

$$= \lim_{\eta\to 0}\int\limits_{-h}^{h}\int\limits_0^{2\pi}\frac{(x-x_0)^2\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{\rho r^2}\,J_0'\,dzd\varphi =$$

$$= \lim_{\eta\to 0}2\pi\int\limits_{\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+h^2}}}^{1}\frac{\sqrt{\zeta^2\tau^2-\alpha^2\rho^2}}{\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}\,J_0'\left(\sqrt{\zeta^2\tau^2-\alpha^2\rho^2}\right)d\zeta = 2\pi(\cos\tau-1). \tag{35}$$

Таким образом, в сумме имеем:

$$k_x^{111} + k_x^{112} - k_x^{121} - k_x^{122} = 2\pi\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x_0,y_0,z_0,t}. \tag{36}$$

Ввиду нечетности подынтегральной функции, все k_z^{ijk}, а также b_y^{111} и b_y^{122} равны нулю. Вычисляя точно так же, находим:

$$b_y^{112} = 2\pi\sin\tau, \tag{37}$$

$$b_y^{121} = 2\pi\sin\tau. \tag{38}$$

Находя сумму всех k^{ijk}, получаем:

$$k^{111} + k^{112} - k^{121} - k^{122} = 2\pi\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x_0,y_0,z_0,t}. \tag{39}$$

Подставляя все полученное в (18) и пользуясь тем, что, в силу системы,

$$\int_0^{t_0} \left[\frac{\partial p}{dx} - v_y\right]_{x_0, y_0, z_0, t} = \int_0^{t_0} F_x\,|_{x_0, y_0, z_0, t} dt + v_x(x_0, y_0, z_0, t_0) - v_x(x_0, y_0, z_0, t),$$

получаем окончательную формулу для v_x:

$$v_x(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{1}{2} v_x(x_0, y_0, z_0, 0) - \frac{1}{4\pi} \iint_{r=\frac{t_0}{\alpha}} \left\{\left(\frac{x-x_0}{r^3} + \frac{\alpha(y-y_0)}{r^2} - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{\alpha^2 \rho^2 (x-x_0)}{2r^3}\right) v_n^0 + \frac{\alpha(x-x_0)}{r^3}\left[(x-x_0)v_y^0 - (y-y_0)v_x^0\right] + \left[\frac{\alpha(x-x_0)}{r^3} - \right.$$

$$\left. - \frac{3\alpha(x-x_0)}{r^3}\frac{\partial r}{\partial n} - \frac{\alpha^2(y-y_0)}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\alpha^3\rho^2(x-x_0)}{2r^3}\frac{\partial r}{\partial n}\right] p^0 - \frac{\alpha(x-x_0)}{r^2}\frac{\partial p^0}{\partial n} +$$

$$\left. + \frac{x-x_0}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}\left[\operatorname{div}\vec{v}^0 - \psi^0\right]\right\} dS + \text{Г. з. ц. } \frac{1}{4\pi} \iiint_{r<\frac{t_0}{\alpha}} \left[(\vec{w}^I, \vec{v}) + \right.$$

$$\left. + \alpha^2 q^I p\right]_{t=0} dx dy dz + \frac{1}{2}\int_0^{t_0} F_x(x_0, y_0, z_0, t)\,dt + \frac{1}{4\pi}\iiint_{r<\frac{t_0}{\alpha}} \left\{\left(-\frac{x-x_0}{r^3} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\alpha(y-y_0)}{r^2} + \frac{\alpha^2\rho^2(x-x_0)}{2r^3}\right) N(x, y, z, t_0 - \alpha r) - \frac{\alpha(x-x_0)}{r^2}\chi(x, y, z, t_0 - \alpha r)\right\} \times$$

$$\times dx dy dz + \text{Г. з. ц. } \frac{1}{4\pi}\iiint_{r<\frac{t_0}{\alpha}} \left\{\int_0^{t_0 - \alpha r} \left[(\vec{w}^I, \vec{F}) + q\,\psi\right] dt\right\} dx dy dz. \qquad (40)$$

Таким образом, функции N и χ, которые выражаются через свободные члены уравнений системы (см. § 1), входят в решение с запаздывающим аргументом $t_0 - \alpha r$.

Для вычисления $v_y(x_0, y_0, z_0, t_0)$ мы должны применить те же рассуждения к фундаментальным функциям Φ^{21} и Φ^{22} формулы (15), но ввиду их симметричности тот же результат можно получить из формулы (40), заменив y на $-y$, v_y на $-v_y$ и поменяв ролями переменные x и y.

Для определения v_z в формуле Грина (9) вместо $\vec{w}$, q подставим $\vec{w}^{III}$, q^{III}, которые выражаются следующим образом через Φ^{III} [см. (15)];

$$w_x^{III} = \frac{\partial^3 \Phi^{III}}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^2 \Phi^{III}}{\partial y \partial t}, \quad w_z^{III} = \frac{\partial^3 \Phi^{III}}{\partial z \partial t^2} + \frac{\partial \Phi^{III}}{\partial z},$$
$$w_y^{III} = \frac{\partial^3 \Phi^{III}}{\partial y \partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi^{III}}{\partial x \partial t}, \quad q^{III} = -\frac{\partial^3 \Phi^{III}}{\partial t_3} - \frac{\partial \Phi^{III}}{\partial t}. \qquad (41)$$

Производя далее выкладки в том же порядке, как и при нахождении v_x, и вычисляя соответствующие интервалы при $h \to 0$ (главное значение

по диску) получим:

$$v_z(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{1}{4\pi} \text{Г. з. д.} \iiint\limits_{r \leqslant \frac{t_0}{\alpha}} \left\{ \int\limits_0^{t_0 - \alpha r} [(\vec{w}^{\text{III}}, \vec{F}) + q^{\text{III}}\psi] \, dt \right\} d\Omega -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{r = \frac{t_0}{\alpha}} \left\{ \left(\frac{z - z_0}{r^3} - \frac{\alpha^2 \rho^2 (z - z_0)}{2r^3} \right) v_x^0 + \frac{\alpha (x - x_0)(z - z_0)}{r^3} v_y^0 - \right.$$

$$- \frac{\alpha (y - y_0)(z - z_0)}{r^3} v_x^0 - \frac{\alpha (z - z_0)}{r^2} \frac{\partial p^0}{\partial n} + \frac{z - z_0}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} [\operatorname{div} \vec{v}^0 - \psi^0] +$$

$$\left. + \frac{\alpha (z - z_0)}{r^3} p^0 + \left[\frac{\alpha^3 \rho^2 (z - z_0)}{2r^3} - \frac{3\alpha (z - z_0)}{r^3} \right] \frac{\partial r}{\partial n} p^0 \right\} dS +$$

$$+ \iiint\limits_{r \leqslant \frac{t_0}{\alpha}} \left\{ \left(\frac{z - z_0}{r^3} - \frac{\alpha^2 \rho^2 (z - z_0)}{2r^3} \right) N(x, y, z, t_0 - \alpha r) + \frac{\alpha (z - z_0)}{r^2} \times \right.$$

$$\left. \times \chi(x, y, z, t_0 - \alpha r) \right\} dxdydz + \text{Г. з. д.} \iiint\limits_{r < \frac{t_0}{\alpha}} [(\vec{w}^{\text{III}}, \vec{v}) + \alpha^2 q^{\text{III}} p]_{t=0} \, dxdydz \,. \tag{42}$$

Функция p вычисляется при помощи той же формулы Грина (9) с подстановкой в нее функций $\vec{w}^{\text{IV}}$, q^{IV}, которые определяются формулами:

$$\left.\begin{aligned}
w_x^{\text{IV}} &= w_x^{41} + w_x^{43}, \quad w_x^{41} = \frac{\partial^3 Q}{\partial x \partial t^2}, \quad w_x^{43} = \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial t}, \\
w_y^{\text{IV}} &= w_y^{41} + w_y^{43}, \quad w_y^{41} = \frac{\partial^3 Q}{\partial y \partial t^2}, \quad w_y^{43} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t}, \\
w_z^{\text{IV}} &= w_z^{41} + w_z^{43}, \quad w_z^{41} = \frac{\partial^3 Q}{\partial z \partial t^2}, \quad w_z^{43} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \\
q^{\text{IV}} &= q^{41} + q^{43}, \quad q^{41} = -\frac{\partial^3 Q}{\partial t^3}, \quad q^{43} = -\frac{\partial Q}{\partial t},
\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

где

$$Q = \frac{1}{\rho} \int\limits_0^{\frac{\rho\sqrt{\tau^2 - \alpha^2 r^2}}{\rho}} \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \alpha^2 \rho^2}} J_0(\xi) \, d\xi \,.$$

Подсчитаем предел функций $\vec{w}^{\text{IV}}$, q^{IV} на нижней части конуса при $\tau \to -\alpha r$ и подставим его в первый интеграл правой части формулы Грина (9), который обозначим через $I^{(4)}$. Произведя в этом интеграле прежнюю замену переменного, получим:

$$I^{(4)} = \iiint\limits_{\Omega_{h,\eta}} \left\{ v_x^1 \left(-\frac{y_1 - y_0}{r^3} + \frac{\alpha (x_1 - x_0)(z_1 - z_0)^2}{r^4} - \frac{\alpha (x_1 - x_0)}{r^2} + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha^2 \rho^2 (y_1 - y_0)}{2r^3} \right) + v_y^1 \left(\frac{x_1 - x_0}{r^3} + \frac{\alpha (y_1 - y_0)(z_1 - z_0)^2}{r^4} - \frac{\alpha^2 \rho^2 (x_1 - x_0)}{2r^3} - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\alpha (y_1 - y_0)}{r^2} \right) - v_z^1 \cdot \frac{\alpha \rho^2 (z_1 - z_0)}{r^4} - p^1 \frac{\alpha^2 \rho^2}{r^3} \right\} dx_1 \, dy_1 \, dz_1. \tag{44}$$

Преобразуем подынтегральное выражение в (44) к дивергентному виду, используя снова соотношения (7) и (8). Мы имеем:

$$\frac{x_1-x_0}{r^3}v_y^1-\frac{y_1-y_0}{r^3}v_x^1=\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{1}{r}v_x^1\right)-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r}v_y^1\right)+\frac{1}{r}\Delta p^1+$$
$$+\frac{2\alpha}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p^1}{\partial t_1}\right)+\frac{\partial}{\partial y_1}\left[p^1\cdot\frac{\alpha(x_1-x_0)}{r^2}\right]-\frac{\partial}{\partial x_1}\left[p^1\cdot\frac{\alpha(y_1-y_0)}{r^2}\right]+$$
$$+\frac{\alpha(x_1-x_0)}{r^2}v_x^1+\frac{\alpha(y_1-y_0)}{r^2}v_y^1+\frac{1}{r}\chi^1, \tag{45}$$

$$\frac{\alpha^2\rho^2(y_1-y_0)}{2r^3}v_x^1-\frac{\alpha^2\rho^2(x_1-x_0)}{2r^3}v_y^1=\operatorname{div}\left(\vec{v}^1\cdot\frac{\alpha\rho^2}{2r^2}\right)-$$
$$-v_x^1\cdot\frac{\alpha(x_1-x_0)(z_1-z_0)^2}{r^4}-v_y^1\cdot\frac{\alpha(y_1-y_0)(z_1-z_0)^2}{r^4}+v_z^1\cdot\frac{\alpha\rho^2(z_1-z_0)}{r^4}-$$
$$-\frac{\alpha^2}{2r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\rho^2p^1)+\frac{\alpha^2\rho^2}{r^3}p^1-\frac{\alpha\rho^2}{2r^2}\cdot N^1. \tag{46}$$

Подставляя значения функций из (45) и (46) в (44) и производя сокращения, получим:

$$I^{(4)}=\iiint\limits_{\Omega_{h,\eta}}\left\{\frac{1}{r}\Delta p^1+\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{1}{r}v_x^1\right)-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r}v_y^1\right)+\frac{\partial}{\partial y_1}\left[p^1\cdot\frac{\alpha(x_1-x_0)}{r^2}\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial x_1}\left[p^1\cdot\frac{\alpha(y_1-y_0)}{r^2}\right]+\operatorname{div}\left(v^1\cdot\frac{\alpha\rho^2}{2r^2}\right)\right\}dx_1\,dy_1\,dz_1+$$
$$+\iiint\limits_{\Omega_{h,\eta}}\left\{\frac{2\alpha}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial p^1}{\partial t_1}\right)-\frac{\alpha^2}{2r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\rho^2p^1)\right\}dx_1\,dy_1\,dz_1+$$
$$+\iiint\limits_{\Omega_{h,\eta}}\left\{\frac{1}{r}\chi^1(x_1,y_1,z_1,t_1)-\frac{\alpha\rho^2}{2r^2}N^1\right\}dx_1\,dy_1\,dz_1. \tag{47}$$

Перейдем в первом и втором интегралах от объемного интегрирования к интегрированию по поверхности, приняв, как и прежде, за эту поверхность сферу $t_0-\alpha r$ и поверхность $S_{h,\eta}$, и воспользуемся известной формулой

$$\lim_{\sigma\to0}\iiint\limits_{\Omega-\sigma}\frac{1}{r}\Delta p^1d\Omega=\iint\limits_{S}\left(p^1\cdot\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial p^1}{\partial n}\right)dS-4\pi p_1(x_0,y_0,z_0).$$

При этом интегралы по цилиндру $S_{h,\eta}$ при $h\to0$ будут все равны нулю, так как под интегралом будет стоять ограниченная функция, а область интегрирования уничтожается. Окончательно имеем:

$$I^{(4)}=-4\pi p(x_0,y_0,z_0,t_0)+\iint\limits_{=\frac{t_0}{\alpha}}\left\{p^0\cdot\frac{\partial\frac{1}{r}}{dn}-\frac{1}{r}\frac{\partial p^0}{\partial n}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\alpha r}\frac{\partial r}{\partial n}[\psi^0-\operatorname{div}\vec{v}^0]-\frac{y-y_0}{r^2}v_x^0+\frac{x-x_0}{r^2}v_y^0-\frac{\alpha\rho^2}{2r^2}v_n^0+\frac{\alpha^2\rho^2}{2r^2}\frac{\partial r}{\partial n}p^0\right\}dS+$$
$$+\text{Г. з. д.}\iiint\limits_{r\leqslant\frac{t_0}{\alpha}}\left\{\frac{1}{r}\chi(x,y,z,t_0-\alpha r)-\frac{\alpha\rho^2}{2r^2}N(x,y,z,t_0-\alpha r)\right\}dx\,dy\,dz. \tag{48}$$

Вычислим предел интеграла по цилиндру:

$$\lim_{h\to 0}\left[\iint\limits_{S_{h,\eta}} (pw_n^{\mathrm{IV}} + q^{\mathrm{IV}} v_n)\, dS\right] = \vec{l}^{41} + \vec{l}^{43} + k^{41} + k^{43},$$

где

$$k^{4j} = \lim_{h\to 0}\iint\limits_{S_{h,\eta}} pw_n^{3j} dS,$$

$$l_x^{4j} = \lim_{h\to 0}\iint\limits_{S_{h,\eta}} q^{4j} v_x \cos(n, x)\, dS$$

и т. д. Интегралы l_x^{4j} и l_y^{1j} стремятся к нулю, так как на верхнем и нижнем основаниях $\cos(n, x)$ и $\cos(n, y)$ равны нулю, а интегралы по боковой поверхности имеют пределом нуль. Интегралы l_z^{4j} — тоже нули, в силу того, что на верхнем и нижнем основаниях цилиндра подынтегральная функция имеет одинаковые по абсолютной величине, но разные по знаку значения. Подсчитаем k^{4j}. Как и раньше, положим:

$$k^{4j} = \lim_{h\to 0}\iint\limits_{S_{h,\eta}}\left[p\Big|_{x_0,y_0,z_0,t} + (x-x_0)\frac{\partial p}{\partial x}\Big|_{x_0,y_0,z_0,t} + (y-y_0)\frac{\partial p}{\partial y}\Big|_{x_0,y_0,z_0,t} + \right.$$

$$\left. + (z-z_0)\frac{\partial p}{\partial z}\Big|_{x_0,y_0,z_0,t}\right] w_n^{4j} dS + \lim_{h\to 0}\iint\limits_{S_{h,\eta}}\left[p - p\Big|_{x_0,y_0,z_0,t} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial p}{\partial x}\Big|_{x_0,y_0,z_0,t}\cdot(x-x_0) - \frac{\partial p}{\partial y}\Big|_{x_0,y_0,z_0,t}\cdot(y-y_0) - \frac{\partial p}{\partial z}\Big|_{x_0,y_0,z_0,t}(z-z_0)\right] w_n^{4j} dS. \tag{49}$$

Величина в квадратных скобках в последнем интеграле имеет порядок r^2, $w_n^{4j}\rho$ имеет порядок $\frac{1}{r}$, поэтому предел последнего интеграла равен нулю. Интеграл от первого члена в (49) равен:

$$k_0^{43} = p(x_0, y_0, z_0, t)\lim_{h\to 0}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\eta}(w_z^{43}\cos(n, z)\,|_{z=z_0+h} +$$

$$+ w_z^{43}\cos(n, z)\,|_{z=z_0-h})\,\rho d\rho d\varphi = -2p(x_0, y_0, z_0, t)\cdot$$

$$\cdot\lim_{h\to 0}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\eta}\frac{h\tau}{r^3}J_0\rho d\rho d\varphi = -4\pi p(x_0, y_0, z_0, t)\cdot b(\tau),$$

где

$$b(\tau) = \lim_{h\to 0}\int\limits_0^{\eta}\frac{h\tau\rho}{r^3}J_0 d\rho.$$

Производя замену переменных

$$\rho / r = \zeta, \quad \rho d\rho = \frac{h^2\varsigma d\varsigma}{(1-\varsigma^2)^2},$$

получим:

$$b(\tau) = \lim_{h\to 0}\int\limits_0^{\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+h^2}}}\frac{\varsigma\tau}{\sqrt{1-\varsigma^2}}J_0\left(\sqrt{\zeta^2\tau^2 - \frac{\alpha^2h^2\varsigma^2}{1-\varsigma^2}}\right)d\zeta = \sin\tau.$$

Очевидно

$$k_0^{41} = 4\pi p(x_0, y_0, z_0, t) \cdot \frac{\partial^2 b(\tau)}{\partial \tau^2} = 4\pi p(x_0, y_0, z_0, t) \cdot \sin \tau.$$

Таким образом,

$$k_0^{43} + k_0^{41} = 0.$$

Интегралы k_x^{4j} и k_y^{4j} равны нулю в силу нечетности подынтегральной функции, интегралы k_z^{4j} имеют своим пределом также нуль, так как при $z = z_0 + h$ и $z = z_0 - h$ подынтегральная функция в них имеет одинаковые по абсолютной величине, но противоположные по знаку значения, а интеграл по боковой поверхности стремится к нулю при $h \to 0$. Поэтому

$$k^{43} + k^{41} = 0.$$

инимая во внимание все сказанное, получаем:

$$\lim_{h \to 0} \iint\limits_{S_{h,\eta}} \left[\int\limits_0^{t_0 - \alpha r} (p w_n^{\mathrm{IV}} + q^{\mathrm{IV}} v_n)\, dt \right] dS = 0. \tag{50}$$

Подставляя значения (48) и (50) в формулу Грина, находим:

$$p(x_0, y \ldots = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{r = \frac{t_0}{\alpha}} \left\{ p^0 \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial p^0}{\partial n} - \frac{1}{\alpha r} \frac{\partial r}{\partial n} [\psi^0 - \operatorname{div} \vec{v^0}] - \right.$$

$$\left. - \frac{y - y_0}{r^2} v_x^0 + \frac{x - x_0}{r^2} v_y^0 - \frac{\alpha \rho^2}{2r^2} v_n^0 + \frac{\alpha^2 \rho^2}{2r^2} \frac{\partial r}{\partial n} p^0 \right\} dS +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\leqslant \frac{t_0}{\alpha}} \left\{ \frac{1}{r} \chi(x, y, z, t_0 - \alpha r) - \frac{\alpha \rho^2}{2r^2} N(x, y, z, t_0 - \alpha r) \right\} dx\, dy\, dz -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\leqslant \frac{t_0}{\alpha}} \left\{ \int\limits_0^{t_0 - \alpha r} [(\vec{w}^{\mathrm{IV}}, \vec{F}) + q^{\mathrm{IV}} \psi]\, dt \right\} dx\, dy\, dz -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{r \leqslant \frac{t_0}{\alpha}} [(\vec{w}^{\mathrm{IV}}, \vec{v}) + \alpha^2 q^{\mathrm{IV}} p]_{t=0}\, dx\, dy\, dz. \tag{51}$$

Заметим, что при вычислении функции p мы могли бы переходить к пределу и при $\eta \to 0$, так как все встречающиеся при этом интегралы существуют не только в смысле главного значения.

§ 5. Решение задачи Коши для уравнения четвертого порядка

В этом параграфе рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 \Delta u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \alpha^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = f \tag{52}$$

и решим для него задачу Коши в неограниченной среде, т. е. найдем решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \varphi_k, \quad k = 0, 1, 2, 3. \tag{53}$$

Построим для уравнения (52) формулу Грина. Имеем:

$$wLu - uLw \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(w \cdot \frac{\partial \Delta u}{\partial t} - \Delta u \frac{\partial w}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial u}{\partial t} w + \alpha^2 \frac{\partial w}{\partial t} u - \right.$$

$$\left. - \alpha^2 w \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \alpha^2 \frac{\partial^3 w}{\partial t^3} u - \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha^2 \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - u \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x \cdot \partial t^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - u \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t^2}\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + w\right) - u \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + w\right)\right].$$

Интегрируя эту формулу по объему четырехмерного конуса с вырезанной осью, получим:

$$\iiint\limits_{\Omega_{h,\eta}} \left\{ \int\limits_0^{t_0 - \alpha r} (wLu - uLw)\, dt \right\} d\Omega = \iiint\limits_{\Omega_{h,\eta}} \left(w \frac{\partial \Delta u}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial t} \Delta u - \right.$$

$$- \alpha^2 w \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha^2 \frac{\partial w}{\partial t} u - \alpha^2 w \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \alpha^2 \frac{\partial^3 w}{\partial t^3} u - \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} +$$

$$\left. + \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial w}{\partial t}\right)_{\tau = -\alpha r} dx\, dy\, dz + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - u \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}\right)_{\tau = -\alpha r} dy\, dz\, dt +$$

$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - u \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2}\right)_{\tau = -\alpha r} dx\, dz\, dt + \left[\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + w\right) - \right.$$

$$\left. - u\left(\frac{\partial^3 w}{\partial z \partial t^2} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]_{\tau = -\alpha r} dx\, dy\, dt - \iiint\limits_{\Omega_{h,\eta}} \left[w \frac{\partial \Delta u}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial t} \Delta u + \right.$$

$$+ \alpha^2 \left(u \frac{\partial w}{\partial t} - w \frac{\partial u}{\partial t} - w \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial t^3} u - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\right]_{t=0} dx\, dy\, dz - \iint\limits_{S_{h,\eta}} \left\{ \int\limits_0^{t_0 - \alpha r} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial n} + \left(u \frac{\partial w}{\partial z} - w \frac{\partial u}{\partial z}\right) \cos nz \right] dt \right\} dS. \tag{54}$$

Пусть u в (54) — искомое решение уравнения (52) при условиях (53).

Возьмем в качестве w решение уравнения $Lw = 0$ в виде

$$w = \frac{1}{\rho} \int\limits_0^{\frac{\rho\sqrt{\tau^2 - \alpha^2 r^2}}{r}} \frac{\varsigma}{\sqrt{\varsigma^2 + \alpha^2 \rho^2}} J_0(\zeta)\, d\zeta. \tag{55}$$

Будем искать решение задачи (52) — (53) при помощи формулы (54), переходя в ней к пределу, например, при $\eta \to 0$, причем заметим, что и в данном случае предел не зависит от способа сжимания поверхности

$S_{h,\eta}$, т. е. все интегралы существуют не только в смысле главного значения. Вычислим сначала первое слагаемое правой части (54), которое для удобства обозначим через K. Для этого найдем значения на поверхности конуса функций:

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{\tau\to -\alpha r} w = 0, \quad \lim_{\tau\to -\alpha r}\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{r}, \quad \lim_{\tau\to -\alpha r}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\alpha\rho^2}{2r^2},\\
&\lim_{\tau\to -\alpha r}\frac{\partial^3 w}{\partial t^3} = -\frac{\rho^2}{2r^3} + \frac{\alpha^2\rho^4}{8r^3}, \quad \lim_{\tau\to -\alpha r}\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\alpha(z-z_0)}{r^2},\\
&\lim_{\tau\to -\alpha r}\frac{\partial^3 w}{\partial t^2\partial x} = \frac{-\alpha(x-x_0)[\rho^2-2(z-z_0)^2]}{2r^4} + \frac{\alpha^3\rho^4(x-x_0)}{8r^4},\\
&\lim_{\tau\to -\alpha r}\frac{\partial^3 w}{\partial t^2\partial y} = \frac{-\alpha(y-y_0)[\rho^2-2(z-z_0)^2]}{2r^4} + \frac{\alpha^3\rho^4(y-y_0)}{8r^4},\\
&\lim_{\tau\to -\alpha r}\frac{\partial^3 w}{\partial t^2\partial z} = -\frac{3\alpha\rho^2(z-z_0)}{2r^4} + \frac{\alpha^3\rho^4(z-z_0)}{8r^4}.
\end{aligned}\right\} \quad (56)$$

Подставив полученные значения в интеграл K, перейдем в этом интеграле к характеристическим координатам

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad z = z_1, \quad t_1 = t - t_0 + \alpha r,$$

заменив при этом интегрирование по t_1 интегрированием по x, y, z в соответствующих интегралах. Учитывая, что

$$\Delta u = \Delta u_1 + 2\alpha\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\right) + \alpha^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial t_1^2} + \frac{2\alpha}{r}\frac{\partial u_1}{\partial t_1},$$

преобразуя подынтегральное выражение и складывая коэффициенты при одинаковых функциях, получим:

$$K = \iiint\limits_{\Omega_{h,\eta}}\left[-\frac{1}{r}\Delta u_1 - \frac{2\alpha}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\right) + \frac{\alpha^2}{2r^2}\frac{\partial}{\partial r}(u_1\rho^2)\right]dx_1\,dy_1\,dz_1.$$

Приняв за поверхность, ограничивающую область $\Omega_{h,\eta}$, сферу $t_0 - \alpha r = 0$ и поверхность $S_{h,\eta}$, перейдем от объемного интегрирования к интегрированию по поверхности; тогда, перейдя во втором и третьем слагаемых к сферическим координатам, получим:

$$K = 4\pi u(x_0, y_0, z_0, t_0) + \iint\limits_{r=\frac{t_0}{\alpha}}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_0}{\partial n} + \frac{\alpha}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\varphi_1 + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\alpha^2\rho^2}{2r^2}\right)\frac{\partial r}{\partial n}\varphi_0\right\}dS + \iint\limits_{S_{h,\eta}}\left(\frac{2\alpha}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\alpha^2\rho^2}{2r^2}\frac{\partial r}{\partial n}u\right)dS. \quad (57)$$

Очевидно, предел при $\eta\to 0$ интеграла по $S_{h,\eta}$ в (57) равен нулю, так как подынтегральная функция имеет интегрируемую особенность. Покажем теперь, что предел при $\eta\to 0$ последнего интеграла в формуле (54) равен нулю. Действительно, в пределе обращаются в нуль члены, содержащие $\cos(n, z)$, так как $\cos(n, z)$ отличен от нуля лишь на дисках, а

мы переходим к пределу при $\eta \to 0$. Далее,

$$\lim_{\eta\to 0}\iint\limits_{S_{h,\eta}} \frac{\partial u}{\partial n}\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,dS = \lim_{\eta\to 0}\iint\limits_{S_{h,\eta}} \frac{\partial u}{\partial n}\,\frac{\rho\tau}{r^2\sqrt{\tau^2-\alpha^2 r^2}}\,J_0'\left(\frac{\rho\sqrt{\tau^2-\alpha^2 r^2}}{r}\right)dS = 0,$$

так как под интегралом стоит величина порядка $\frac{1}{r}$. Вычислим предел остающегося слагаемого. Рассуждениями, аналогичными проведенным при решении системы, можно показать, что

$$I \equiv \lim_{\eta\to 0}\iint\limits_{S_{h,\eta}} u\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,dS = u(x_0, y_0, z_0, t)\iint\limits_{S_{h,}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\cos(n, x) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\cos(n, y) + \frac{\partial}{\partial z}\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\cos(n, z)\right)dS.$$

Далее,

$$I \equiv u(x_0, y_0, z_0, t)\lim_{\eta\to 0}\int\limits_{-h}^{h}\int\limits_{0}^{2\pi}\left\{\frac{-\tau\rho^2\left[\alpha^2 r^4 - \tau^2(z-z_0)^2\right]}{r^5(\tau^2-\alpha^2 r^2)}\,J_0\left(\frac{\rho\sqrt{\tau^2-\alpha^2 r^2}}{r}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{3\alpha^2 r^2\rho^2\tau - \rho^3\tau^3}{r^4(\tau^2-\alpha^2 r^2)^{\frac{3}{2}}}\,J_0'\left(\frac{\rho\sqrt{\tau^2-\alpha^2 r^2}}{r}\right)\right\}dz\,d\varphi.$$

Произведя замену независимого переменного

$$\frac{\rho}{r} = \zeta, \qquad \frac{dz}{\rho} = -\frac{d\varsigma}{\varsigma^2\sqrt{1-\varsigma^2}},$$

получим:

$$I \equiv 4\pi u(x_0, y_0, z_0, t)\lim_{\eta\to 0}\int\limits_{\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+h^2}}}^{1}\left\{\frac{-\tau\varsigma}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\,J_0\left(\sqrt{\varsigma^2\tau^2-\alpha^2\rho^2}\right) + \right.$$

$$+ \frac{\tau^3\varsigma^5}{\sqrt{1-\varsigma^2}\,(\varsigma^2\tau^2-\alpha^2\rho^2)}\,J_0 + \left(\frac{2\alpha^2\tau\varsigma^3\rho^2}{\sqrt{1-\varsigma^2}\,(\varsigma^2\tau^2-\alpha^2\rho^2)^{\frac{3}{2}}} - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{\tau\varsigma^3}{\sqrt{1-\varsigma^2}\sqrt{\varsigma^2\tau^2-\alpha^2\rho^2}}\right)J_0\right\}d\zeta.$$

Убеждаясь в равномерной сходимости интегралов по ρ с помощью построения соответствующих мажорант, находим:

$$I \equiv 4\pi u(x_0, y_0, z_0, t)\int\limits_{0}^{1}\left\{\frac{-\tau\varsigma}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\,J_0(\zeta\tau) + \right.$$

$$\left. + \frac{\tau\varsigma^3}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\,J_0(\zeta\tau) - \frac{\varsigma^2}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\,J_0'(\zeta\tau)\right\}d\zeta = 0.$$

Подставляя все найденное в формулу (54), окончательно получаем реше-

ние поставленной задачи в виде

$$u(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{r=\frac{t_0}{\alpha}} \left\{ -\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_0}{\partial n} - \frac{\alpha}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\varphi_1 + \right.$$

$$+ \left(\frac{\alpha^2\rho^2}{2r^2} - \frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial r}{\partial n}\varphi_0 \Big\} dS + \iiint\limits_{r\leqslant\frac{t_0}{\alpha}} \left(\int\limits_0^{t_0-\alpha r} w\cdot f dt \right) d\Omega +$$

$$+ \iiint\limits_{r\leqslant\frac{t_0}{\alpha}} \Big\{ \Delta\varphi_1\cdot w - \Delta\varphi_0\cdot\frac{\partial w}{\partial t} + \alpha^2\varphi_0\left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^3 w}{\partial t^3}\right) -$$

$$- \alpha^2\varphi_1\left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) + \alpha^2\varphi_2\frac{\partial w}{\partial t} - \alpha^2\varphi_3 w \Big\}_{t=0} dx\,dy\,dz. \qquad (58)$$

§ 6. Качественные выводы

Из полученных формул для решений системы и уравнения четвертого порядка можно сделать следующие выводы.

1. Область зависимости решений конечна и представляет собой шар (основание конуса в четырехмерном пространстве) радиуса $\frac{t_0}{\alpha}$. Так как решение зависит от начальных данных на всем основании конуса, то возмущение, произведенное в начальный момент в окрестности точки x_0, y_0, z_0, в момент времени t_1 отзывается во всех точках, лежащих внутри сферы радиуса t_1 с центром в x_0, y_0, z_0 при $t_1 > 0$. Таким образом, волна имеет резкий передний край и размытый задний, т. е. происходит диффузия заднего фронта волны. Заметим, что у волнового уравнения с постоянными коэффициентами и с нечетным числом пространственных переменных диффузии не бывает. Скорость распространения возмущений при этом равна $\frac{1}{\alpha}$, т. е. конечна, что является показателем сжимаемости жидкости. В несжимаемой жидкости при $\alpha = 0$ скорость распространения возмущений становится бесконечной.

2. Формулы для решений системы (1) и уравнения (2) при $\alpha \to 0$ переходят в соответствующие решения, полученные С. Л. Соболевым (1) для его системы при $\alpha = 0$. При этом область зависимости из ограниченной переходит во все пространство; характеристический конус вырождается в гиперплоскость $t = t_0$. Функция p при $\alpha = 0$ уже не зависит от начальных данных в случае системы, а в случае уравнения четвертого порядка при $\alpha = 0$ не нужно задавать в начальный момент вторую и третью производную по времени от искомой функции.

3. Фундаментальные функции и возмущающие силы входят в формулы для решений с запаздывающим аргументом $t_0 - \alpha r$.

4. Решение построено с помощью функции типа

$$\frac{1}{r} J_0\left(\frac{\rho\sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}}{r}\right)$$

в области $t^2 \geqslant \alpha^2 r^2$. Если рассмотреть сферу радиуса r, то на ней аргумент функции Бесселя, входящий в эту формулу, будет меняться от нуля

(при $t = \alpha r$) до $\sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}$, а колебания будут такого же вида, как при $\alpha = 0$. Но на сфере большего радиуса r_1 колебания будут возникать в более поздние моменты времени и до момента времени t_1 на ней образуется меньше волн, чем до того же момента времени на меньшей сфере.

5. Особенности фундаментальных решений одинаковы у системы при $\alpha \neq 0$ и при $\alpha = 0$, хотя эти системы относятся к различным типам и решения задачи Коши для них отличаются одно от другого, как это видно из формул (40), (42), (51) и соответствующих формул при $\alpha = 0$.

В заключение выражаю глубокую благодарность С. Л. Соболеву за постановку задачи и ценные советы.

Поступило
24. X. 1955

ЛИТЕРАТУРА

[1] Соболев С. Л., Об одной новой задаче математической физики. Известия Ак. наук СССР, серия матем., 18 (1954), 3—50.

[2] Александрян Р. А., Об одной задаче Соболева для специального уравнения с частными производными четвертого порядка, Доклады Ак. наук СССР, 73, № 4 (1950), 631—634.

[3] Гальперн С. А., Задача Коши для уравнения типа С. Л. Соболева. Успехи математ. наук, т. 8, вып. 5 (1953), 191—193.

[4] Stewartson K., A weak spherical source in a rotating fluid, Quart. J. Mech. and Appl. Math., 6, № 1 (1953), 45—49.

[5] Петровский И. Г., О проблеме Коши для системы линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций. Бюллетень МГУ, 1, вып. 7, 1938.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 161—164

И. М. ВИНОГРАДОВ

НОВАЯ ОЦЕНКА ФУНКЦИИ $\zeta(1+it)$

На частном примере функции $\zeta(1+it)$ дано новое усовершенствование метода автора оценки тригонометрических сумм.

В этой работе на примере оценки функции $\zeta(1+it)$, точнее говоря на примере оценки суммы S теоремы этой работы, развито новое видоизменение моего метода оценки тригонометрических сумм. Однако доказательство построено так, что тривиально и без потери точности оценок оно может быть перенесено и на широкий класс сумм, в некотором отношении аналогичных сумме S, причем для этого класса может быть легко выведена некоторая общая теорема (раньше такие суммы оценивались при помощи теорем, аналогичных теореме 1,а работы ([2])).

Идея видоизменения уже применялась для различных целей в моих прежних работах [например, в работе ([4])]; различные варианты этого видоизменения могут быть с успехом применены к улучшению оценок тригонометрических сумм, принадлежащих и другим общим классам. Лемма этой работы, являющаяся основой доказательства, без существенного ухудшения результатов может быть заменена и одним из ее прежних вариантов [например, вариантами работ ([2]) и ([3])].

Результаты этой работы в несколько менее точной форме (полученной применением менее совершенного варианта видоизменения) были сообщены без доказательства в работе ([1]).

Обозначения. $\theta, \theta', \ldots$ — числа, модули которых не превосходят 1, n — целое число, $n \geqslant 7$, a — целое,

$$k_0 = \left[\frac{n}{6}\right], \quad n_0 = 8n, \quad a \geqslant e^{5000\, n_0^2},$$

$$X = [a^{\frac{3}{4}}], \quad Y = [a^{\frac{1}{8}}], \quad t = a^{n-\theta}, \quad 0 < \theta \leqslant 1.$$

Символами $x, x_1, \ldots$ обозначаем переменные, пробегающие значения $1, \ldots, X$, а символами $y, y_1, \ldots$ — переменные, пробегающие значения $1, \ldots, Y$.

ЛЕММА. *Пусть* n_1 — *целое*, $n_1 \geqslant 11$, l_1 — *целое*, $l_1 > 2$, X_1 — *целое*,

$$X_1 \geqslant (4n_1^2)^{e^{1,1 l_1 n_1}}, \quad b_1 = \left[n_1^2 l_1 + \frac{n_1(n_1+1)}{4} + 1\right], \quad \nu_1 = \frac{1}{n_1}$$

и каждое $\xi_1, \ldots, \xi_{2b_1}$ *пробегает значения* $1, \ldots, X_1$. *Тогда при любых заданных* $z_1, \ldots, z_{n_1}$ *число решений системы*

$$\xi_1 + \ldots + \xi_{b_1} - \xi_{b_1+1} - \ldots - \xi_{2b_1} = z_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\xi_1^{n_1} + \ldots + \xi_{b_1}^{n_1} - \xi_{b_1+1}^{n_1} - \ldots - \xi_{2b_1}^{n_1} = z_{n_1}$$

не превосходит U', где

$$U' = U'_0 X_1^{2b_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} + \frac{n_1(n_1+1)}{2}(1-\nu_1)^{l_1 n_1}}, \quad U'_0 = 2^{2b_1 l_1 n_1} n_1^{n_1^{l_1}}.$$

Доказательство. Доказательство этой леммы является дальнейшим усовершенствованием доказательств прежних ее вариантов (леммы 2 и 3 работы (2), теорема 1 работы (3)).

ТЕОРЕМА. *Пусть a_1 — целое, $a < a_1 \leqslant 2a$,*

$$S = \sum_{a < x \leqslant a_1} e^{2\pi i f(x)}, \quad f(x) = \frac{-t \ln x}{2\pi}.$$

Тогда имеем:

$$|S| < 1{,}04\, a^{1-\rho}, \quad \rho = \frac{1}{653000\, n_0^2}.$$

Доказательство. Примем обозначения: $r = 2b$, $r_0 = 2b_0$,

$$b = \left[9n_0^2 + \frac{n_0(n_0+1)}{4} + 1\right], \quad b_0 = \left[7n_0^2 + \frac{n_0(n_0+1)}{4} + 1\right].$$

Имеем [сравн. доказательство леммы 8 работы (4)]:

$$S = \frac{1}{XY} \sum_{a < u \leqslant a_1} S_u + 2\theta' a^{\frac{7}{8}}, \quad S_u = \sum_x \sum_y e^{2\pi i f(u+xy)},$$

$$f(u+xy) = \psi(x, y) + \lambda(x, y), \quad \psi(x, y) = A_0 + A_1 xy + \ldots + A_{n_0} x^{n_0} y^{n_0},$$

$$A_0 = f(u), \quad A_s = \frac{(-1)^s t}{2\pi s u^s} \text{ при } s > 0, \quad |\lambda(x, y)| \leqslant \frac{a^{-\frac{1}{8}}}{16\pi n},$$

$$S_u = S'_u + \frac{\theta''}{7n} XY a^{-\frac{1}{8}}, \quad S'_u = \sum_x \sum_y e^{2\pi i \psi(x, y)},$$

$$|S'_u|^{r_0} \leqslant X^{r_0 - 1} \sum_x \sum_{y_1, \ldots, y_{r_0}} e^{2\pi i (A_1 x Y'_1 + \ldots + A_{n_0} x^{n_0} Y'_{n_0})},$$

$$Y'_s = y_1^s + \ldots + y_{b_0}^s - y_{b_0+1}^s - \ldots - y_{r_0}^s,$$

$$|S'_u|^{r_0 r} \leqslant X^{(r_0-1)r} Y^{n_0(r-1)} \sum_{y_1, \ldots, y_{r_0}} \sum_{x_1, \ldots, x_r} e^{2\pi i (A_1 Y'_1 X_1 + \ldots + A_{n_0} Y'_{n_0} X_{n_0})},$$

$$X_s = x_1^s + \cdots + x_b^s - x_{b+1}^s - \cdots - x_r^s.$$

Здесь каждое X_s принимает лишь значения, совпадающие с целыми числами z_s интервала $-bX^s < z_s \leqslant bX^s$, причем, согласно лемме, число решений системы $X_1 = z_1, \ldots, X_{n_0} = z_{n_0}$ не превосходит U, где

$$U = U_0 X^{r - \frac{n_0(n_0+1)}{2} + \frac{n_0(n_0+1)}{2}(1-\nu_0)^{9n_0}}, \quad U_0 = 2^{18bn_0} n_0^{9n_0^2},$$

причем, заставляя каждое z_s пробегать все rX^s целых чисел указанного интервала, получим:

$$|S'_u|^{r_0 r} \leqslant X^{(r_0-1) r} Y^{r_0(r-1)} U \sum_{z_1, \ldots, z_{n_0}} \left| \sum_{y_1, \ldots, y_{r_0}} e^{2\pi i (A_1 Y'_1 z_1 + \ldots + A_{n_0} Y'_{n_0} z_{n_0})} \right|,$$

$$|S'_u|^{2r_0r} \leqslant X^{2(r_0-1)r} Y^{2r_0(r-1)} U^2 r^{n_0} X^{\frac{n_0(n_0+1)}{2}} \sum_{z_1,\ldots,z_{n_0}} \sum_{y_1,\ldots,y_{2r_0}} e^{2\pi i(A_1Y_1z_1+\ldots+A_{n_0}Y_{n_0}z_{n_0})},$$

$$Y_s = y_1^s + \ldots + y_{r_0}^s - y_{r_0+1}^s - \ldots - y_{2r_0}^s.$$

Здесь каждое Y_s принимает лишь значения, совпадающие с целыми числами η_s интервала $-r_0Y^s < \eta_s \leqslant r_0Y^s$, причем число решений системы $Y_1 = \eta_1, \ldots, Y_{n_0} = \eta_{n_0}$, как нетрудно сообразить, применяя лемму, не превосходит W, где

$$W = W_0 Y^{2r_0 - \frac{n_0(n_0+1)}{2} + \frac{n_0(n_0+1)}{2}(1-\nu_0)^{7n_0}}, \quad W_0 = 2^{14b_0n_0} n_0^{7n_0^3}.$$

Таким образом, заставляя каждое η_s пробегать все $2r_0Y^s$ целых чисел указанного интервала, получим:

$$|S'_u|^{2r_0r} \leqslant X^{2(r_0-1)r} Y^{2r_0(r-1)} \bar{U}^2 r^{n_0} X^{\frac{n_0(n_0+1)}{2}} W \sum_{\eta_1,\ldots,\eta_{n_0}} H_1 \ldots H_{n_0},$$

$$H_s = \left| \sum_{z_s} e^{2\pi i A_s \eta_s z_s} \right|. \qquad (1)$$

Заменяя каждое H_s числом rX_s, получим грубую оценку:

$$|S'_u|^{2r_0r} \leqslant D,$$

$$D = (XY)^{2r_0r} \; X^{(1-\nu_0)^{9n_0}} Y^{0,5(1-\nu_0)^{7n_0}} (2r_0r^2)^{n_0} U_0^2 W_0.$$

Для получения более точной оценки оценим сначала ту часть E_1 правой части неравенства (1), которая отвечает условию, что среди чисел

$$\eta_{n+k+1}, \ldots, \eta_{n+k+2n} \qquad (2)$$

имеется не меньше чем n равных нулю. Отношение числа систем значений чисел (2) с указанным условием к числу всех таких систем не превосходит

$$(2n)^n (Y^{n+k+1})^{-n} < a^{-\frac{n^2}{8}}.$$

Поэтому

$$E_1 < Da^{-\frac{n^2}{8}}.$$

Далее, оценим оставшуюся часть E_2 правой части неравенства (1). Здесь, оценивая произведение $H_{n+k+1} \ldots H_{n+k+2n}$, следует учесть, что среди его сомножителей H_s найдется не меньше чем n таких, что соответствующее значение η_s не равно нулю, причем имеем:

$$|A_s\eta_s| \leqslant \frac{t2r_0Y^s}{2\pi s a^s} < \frac{r_0Y^{n+k+1}}{\pi n a^{k+1}} < \frac{2b_0}{\pi n} a^{\frac{n}{8} - \frac{7}{8}(k+1)} < 0,1,$$

$$\frac{H_s}{rX^s} \leqslant \frac{1}{2|A_s|rX^s} \leqslant \frac{\pi s 2^s a^s}{a^{n-1}rX^s} < \frac{10n2^s a^{\frac{1}{4}s+1-n}}{r} < 0,5\,a^{-\frac{n}{16}}.$$

Поэтому

$$E_2 < 0,5Da^{-\frac{n^2}{16}}, \qquad |S'_u|^{2r_0r} < E_1 + E_2 < Da^{-\frac{n^2}{16}}.$$

Далее находим:

$$9{,}25\,n_0^2 < b < 9{,}3\,n_0^2, \quad 7{,}25\,n_0^2 < b_0 < 7{,}3\,n_0^2, \quad 2r_0r > 536{,}5\,n_0^4,$$

$$n_0(n_0+1)\left(\frac{3}{4}e^{-9}+\frac{1}{16}e^{-7}\right) < 0{,}009761\,n^2 < \frac{1}{16}n^2 - \frac{1}{1}n^2,$$

$$2r_0r^2 \leqslant 8b_0b^2 < 5060\,n_0^6, \qquad 36bn_0 + 14b_0n_0 < 437\,n_0^3,$$

$$18\,n_0^3 + 7\,n_0^3 = 25\,n_0^3,$$

$$|S'_u|^{2r_0r} < (5060\,n_0^6)^{n_0}\,2^{437n_0^3}\,n_0^{25n_0^3}(XY)^{2r_0r}a^{-\frac{n^2}{19}},$$

откуда, замечая, что

$$\frac{n_0(\ln 5060 + 6\ln n_0) + (437\ln 2 + 25\ln n_0)n_0^3}{536{,}5\,n_0^4} < 0{,}015, \qquad e^{0{,}15} < 1{,}02,$$

$$\frac{n^2}{19\cdot 536{,}5\,n_0^4} > \rho,$$

находим:

$$|S'_u| < 1{,}02\,XYa^{-\rho}, \quad |S_u| < 1{,}03\,XYa^{-\rho}, \quad |S| < 1{,}04a^{1-\rho}.$$

Следствия. Пользуясь доказанной теоремой и некоторым видоизменением рассуждений главы VI книги ([5]), уже легко доказать, что [сравн. работы ([5]) — ([8])]

$$\zeta(1+it) = O\left((\ln t)^{\frac{2}{3}}\right)$$

и что $\zeta(\sigma+it)$ *не имеет нулей в области* (A — *положительное постоянное число*)

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{A}{(\ln t)^{\frac{2}{3}}}.$$

Применяя же теорему 23 главы III книги ([6]), отсюда легко вывести, что

$$\pi(x) = \int\limits_2^x \frac{dx}{x} + O\left(xe^{-\alpha(\ln x)^{0{,}6}}\right),$$

где α — положительное постоянное число.

Можно улучшить также и другие оценки теории распределения простых чисел.

Математический институт
им. В. А. Стеклова Академии наук СССР

Поступило
4.XI.1957

ЛИТЕРАТУРА

[1] Виноградов И. М., О функции $\zeta(s)$, Доклады Ак. наук СССР, 118, № 4 (1958), 631—634.

[2] Виноградов И. М., Общие теоремы о верхней границе модуля тригонометрической суммы, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 15(1951), 109—130.

[3] Hua L. K., An improvement of Vinogradov's mean-value theorem and several applications, Quart. J. Math., 20 (1949), 48—61.

[4] Виноградов И. М., Некоторые общие леммы и их применение к оценке тригонометрических сумм, Матем. сборн., 3(45) : 3 (1938), 435—471.

[5] Titchmarsh E. C., The theory of the Riemann Zeta-function, Oxford, 1951.

[6] Ingham M. A., The distribution of prime numbers, Cambridge, 1932.

[7] Чудаков Н. Г., On zeros of Dirichlet's L-functions, Матем. сборн., 1(43) : 4 (1936), 591—602.

[8] Коробов Н. М., О нулях функции $\zeta(s)$, Доклады Ак. наук СССР, 118, № 3 (1958), 431—434.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 165—176

Б. В. БОЯРСКИЙ и И. Н. ВЕКУА

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЖЕСТКОСТИ КУСОЧНО-РЕГУЛЯРНЫХ ЗАМКНУТЫХ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

В. Бляшке принадлежит изящное доказательство жесткости овалоидов, основанное на одном выведенном им же интегральном тождестве [см. ([1]), стр. 220]. Используя это тождество, авторы настоящей работы доказывают жесткость весьма широкого класса замкнутых кусочно-регулярных выпуклых поверхностей неотрицательной кривизны.

Пусть S — регулярная поверхность, ограниченная конечным числом кусочно-гладких простых кривых $L_0, L_1, \ldots, L_m$, совокупность которых будем обозначать через L. Если $\mathbf{X} = \mathbf{X}(u, v)$ — параметрическое уравнение поверхности S, то, рассматривая орт нормали к S

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v}{|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v|},$$

будем предполагать, что тройка векторов $\mathbf{X}_u$, $\mathbf{X}_v$, $\mathbf{n}$ составляет в каждой точке поверхности правую систему. Примем в качестве положительной стороны поверхности ту, куда направлена нормаль $\mathbf{n}$, а в качестве положительного направления обхода вдоль L условимся считать то, которое оставляет слева положительную сторону поверхности.

Пусть $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(u, v)$ и $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(u, v)$ — поля смещений и вращений, соответствующие некоторому бесконечно малому изгибанию поверхности. Векторы $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ удовлетворяют следующим равенствам:

$$d\mathbf{Y} = \mathbf{Z} \times d\mathbf{X}, \quad d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{Y} = 0. \tag{1}$$

Если учесть эти равенства, то из формулы Остроградского легко вывести следующее соотношение [см ([1])]:

$$2 \iint_S \mathbf{X}\mathbf{Z}_u\mathbf{Z}_v \, du \, dv = \int_L \mathbf{X}\mathbf{Z} \, d\mathbf{Z}, \tag{2}$$

где интеграл по L берется в положительном направлении.

Относительно векторов $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{Z}$ достаточно предположить, что *

$$\mathbf{X}(u, v) \in C^3(S + L), \quad \mathbf{Y}(u,v) \in C^2(S + L), \ \mathbf{Z}(u,v) \in C^2(S + L).$$

* Заметим, что, привлекая аппарат современной теории интегрирования, эти ограничения можно значительно ослабить.

Обозначим через $\mathbf{l}$ и $\mathbf{s}$ два единичных вектора, касательных к поверхности в некоторой точке, и будем считать, что векторы $\mathbf{l}$, $\mathbf{s}$, $\mathbf{n}$ составляют правую систему. Из равенств (1) легко следует, что производная вектора $\mathbf{Z}$ по направлению $\mathbf{s}$ представляет собой вектор, принадлежащий поверхности [см. ([2])]:

$$\frac{d\mathbf{Z}}{ds} \equiv \mathbf{T}_{(l)} = \mathbf{l}G_l + \mathbf{s}H_l, \tag{3}$$

где G_l и H_l — нормальная и касательная составляющие вектора $\mathbf{T}_{(l)}$ [механический и геометрический смысл этих величин см. в работе ([2])]. Легко показать, что $H_l = -H_s$.

Если отнести поверхность к системе координат в линиях кривизны, то из (3) получим:

$$\mathbf{Z}_u = -\frac{A}{B} G_2 \mathbf{X}_v - H\mathbf{X}_u, \quad \mathbf{Z}_v = \frac{B}{A} G_1 \mathbf{X}_u + H\mathbf{X}_v, \tag{4}$$

где G_1, G_2, $H = H_1 = -H_2$ представляют собой нормальные и касательные составляющие векторов $\mathbf{T}_{(1)}$ и $\mathbf{T}_{(2)}$, соответствующих главным направлениям.

Из (1) и (4) нетрудно вывести, что величины G_1, G_2, H удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial BG_1}{\partial u} + \frac{\partial AH}{\partial v} + \frac{\partial A}{\partial v} H - \frac{\partial B}{\partial u} G_2 = 0, \\ &\frac{\partial AG_2}{\partial v} + \frac{\partial BH}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial u} H - \frac{\partial A}{\partial v} G_1 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$k_1 G_1 + k_2 G_2 = 0, \tag{5'}$$

где k_1 и k_2 — главные кривизны поверхности.

В силу (4), формула (2) принимает вид:

$$-2\iint\limits_S (H^2 - G_1 G_2)\, \mathbf{X}\mathbf{n}\, du\, dv = \int\limits_L \mathbf{X}\mathbf{Z}\, d\mathbf{Z} \tag{6}$$

Эта формула справедлива для любой регулярной поверхности.

В дальнейшем мы будем рассматривать замкнутую выпуклую поверхность, склеенную из конечного числа регулярных поверхностей неотрицательной гауссовой кривизны. Эти поверхности мы подразделим на три группы. В группу I включим те из них, для которых $k_1 = k_2 \equiv 0$, т. е. плоские фигуры. В группу II включим цилиндрические поверхности: на каждой поверхности этой группы $K \equiv 0$, но одна из главных кривизн положительна почти всюду. Наконец, в группу III включим поверхности, для которых гауссова кривизна $K \geqslant 0$, причем знак равенства, возможно, имеет место на множестве (плоской) меры нуль. Таким образом, мы не предполагаем наличия конических точек у рассматриваемой поверхности. Однако предлагаемый метод распространяется также и на этот случай (см. замечание).

Линии склеивания рассматриваемых поверхностей будем предполагать кусочно-гладкими. Совокупность этих линий разобьем на две группы группу A, включающую простые замкнутые или разомкнутые линии склеивания, и группу B, включающую те линии склеивания, на которых

лежит конечное число точек, из которых исходят три или более (конечное число) линий склеивания. Эти точки условно назовем вершинами. Группа **B** может состоять из нескольких связных множеств $B_1, B_2, \ldots, B_n$, $n \geqslant 1$, причем $B_i B_k = 0$, если $i \neq k$. Кривые каждой группы B_i состоят из конечного числа ребер, причем каждое ребро содержит лишь две вершины в качестве начала и конца. Здесь не исключается случай, когда ребро является замкнутой кривой, т. е. когда начало и конец ребра совпадают и, следовательно, ребро представляет собой петлю.

На каждом ребре, а также на каждой из кривых группы **A**, которые можно назвать изолированными ребрами, мы будем различать два берега — левый и правый, отмечая их знаками «+» и «—» соответственно, причем направление, оставляющее левый берег слева, будем считать положительным. Так, если L — совокупность линий склеивания, то через L^+ и L^- мы будем обозначать соответственно совокупности их левых и правых берегов.

Применяя к каждому гладкому куску рассматриваемой поверхности S формулу (6), а затем суммируя по всем кускам, мы получим:

$$I \equiv -2\iint_S (H^2 - G_1 G_2)\, \mathbf{Xn}\, du\, dv = \int_{L^+} (\mathbf{XZ}^+ d\mathbf{Z}^+ - \mathbf{XZ}^- d\mathbf{Z}^-). \tag{7}$$

Если начало вектора **X** поместить внутри поверхности, то $\mathbf{Xn} > 0$ и, значит, $I \leqslant 0$ (мы, следовательно, считаем, что **H** — внешняя нормаль).

Из неразрывности деформации следует непрерывность вектора смещения **Y**, т. е. $\mathbf{Y}^+ = \mathbf{Y}^-$ на L. Дифференцируя это равенство по дуге кривой L и учитывая (1), получим:

$$\mathbf{Z}^+ - \mathbf{Z}^- = -\mu \mathbf{s} \ (\text{на } L), \tag{8}$$

где μ — скалярная функция точки кривой L. Продифференцировав это равенство по дуге кривой L, найдем:

$$d\mathbf{Z}^+ - d\mathbf{Z}^- = -\mathbf{s}\, d\mu - k\mu \mathbf{m}\, ds,$$

где **m** — главная нормаль кривой L, а k — ее кривизна. Умножая поочередно обе части последнего равенства скалярно на **m** и на бинормаль **b** кривой L, мы, в силу (3), получим [см. (2)]:

$$G_{l^+} \cos\theta^+ - G_{l^-} \cos\theta^- = 0, \quad G_{l^+} \sin\theta^+ - G_{l^-} \sin\theta^- = k\mu, \tag{9}$$

или

$$k\mu \cos\theta^+ = -\sin\vartheta\, G_{l^-}, \quad k\mu \cos\theta^- = -\sin\vartheta\, G_{l^+}, \quad \vartheta = \theta^- - \theta^+, \tag{10}$$

где $\mathbf{l}^+$ и $\mathbf{l}^-$ — тангенциальные нормали кривой L, соответствующие поверхностям S^+ и S^-, прилегающим к левому и правому ее берегам, θ^+ и θ^- — углы между главной нормалью **m** кривой L и нормалями $\mathbf{n}^+$ и $\mathbf{n}^-$ поверхностей S^+ и S^- соответственно, причем угол θ считается положительным, если в результате вращения вокруг **s** на угол θ против часовой

стрелки триедр **s**, **m**, **b** совпадает с триедром **s**, **n**, **l** (см. рис. 1). На рис. 1 углы θ^+ и θ^- положительны, причем $\theta^- > \theta^+$. Поэтому $0 < \vartheta < \pi$. Так как в случае выпуклой поверхности

$$\cos\theta^- \leqslant 0, \quad \cos\theta^+ \leqslant 0, \quad \sin\vartheta > 0,$$

то из (10) следует, что

$$\mu G_{l^-} \geqslant 0, \quad \mu G_{l^+} \geqslant 0. \tag{11}$$

Поверхность является жесткой тогда и только тогда, когда система уравнений (5), (5′) допускает лишь тривиальное решение $G_1 = G_2 = H \equiv 0$ и $\mu \equiv 0$ на L, т. е. когда поле вращений $\mathbf{Z}(u, v)$ постоянно на всей поверхности S. Равенство $G_1 = G_2 = H \equiv 0$ гарантирует, что на каждом из кусков, из которых склеена поверхность S, $\mathbf{Z}(u, v) = \text{const}$, т. е. что каждый из них допускает лишь бесконечно малые движения. Условие $\mu = 0$ на L исключает возможность вращений отдельных кусков поверхности S относительно друг друга.

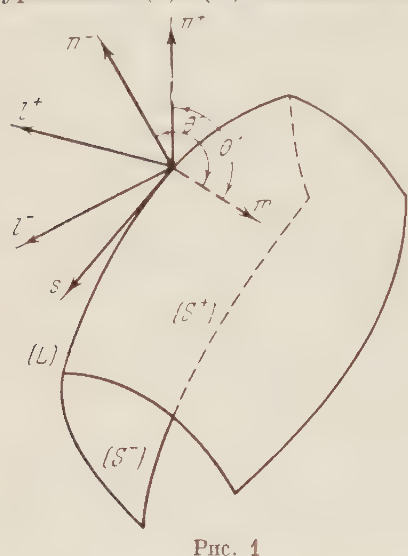


Рис. 1

На поверхностях группы I система (5), (5′) допускает решения вида (полагаем $A = B = 1$):

$$G_1 = \frac{\partial^2\Omega}{\partial v^2}, \quad G_2 = \frac{\partial^2\Omega}{\partial u^2},$$
$$H = -\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}, \tag{12}$$

где $\Omega(u, v)$ — любая функция от u, v. Поэтому говорить о жесткости плоских частей поверхности не имеет смысла. Однако мы не будем исключать из нашего рассмотрения поверхностей группы I, допуская для них лишь тривиальные бесконечно малые изгибания:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}_0 \times \mathbf{X} + \mathbf{C},$$

где $\mathbf{Z}_0 = \text{const}$, $\mathbf{C} = \text{const}$. Тогда для поверхностей группы I условие $G_1 = G_2 = H = 0$ выполняется автоматически.

Легко обнаружить, что жесткость поверхности следует из условий: $\mu \equiv 0$ на L и $H^2 - G_1G_2 \equiv 0$ почти всюду. В самом деле, на каждой поверхности группы III, как это следует из (5′), $G_1G_2 \leqslant 0$, причем знак равенства возможен лишь на множестве (плоской) меры нуль. Поэтому если $H^2 - G_1G_2 \equiv 0$, то $H = G_1 = G_2 \equiv 0$ почти всюду. Если же на поверхности группы II выполняется равенство $H^2 - G_1G_2 = 0$ и, например, равенство $k_1 \equiv 0$, то

$$H = G_2 \equiv 0.$$

Далее, из рассмотрения системы (5) и уравнения Кодацци $(k_1A)_v = k_2A_v$ легко заключить, что

$$(BG_1)_u = 0.$$

Отсюда, если учесть, что на границе поверхности группы II $G_1 = 0$, вытекает, что и $G_1 \equiv 0$.

Если для плоских частей рассматриваемой поверхности мы будем допускать произвольные бесконечно малые изгибания вида (12), то в этом случае необходимо дополнительно предположить, что каждая линия $v = \text{const}$ на поверхности группы II ($k_1 \equiv 0$) имеет по крайней мере одну общую точку с границей поверхности группы III. Но следует иметь в виду, что в этом случае будет обеспечиваться лишь жесткость совокупности поверхностей групп II и III.

Равенство (7) можно переписать в виде:

$$I = \int_{L^+} \mathbf{X}(\mathbf{Z}^+ - \mathbf{Z}^-)\,d\mathbf{Z}^+ + \int_{L^+} \mathbf{X}\mathbf{Z}^-\,d(\mathbf{Z}^+ - \mathbf{Z}^-). \tag{13}$$

Интегрируя по частям, получим:

$$\int_{L^+} \mathbf{X}\mathbf{Z}^- d(\mathbf{Z}^+ - \mathbf{Z}^-) = \int_{L^+} d\mathbf{X}\mathbf{Z}^-(\mathbf{Z}^+ - \mathbf{Z}^-) - \int_{L^+} \mathbf{Z}^-(\mathbf{Z}^+ - \mathbf{Z}^-)\,d\mathbf{X} + \int_{L^+} \mathbf{X}(\mathbf{Z}^+ - \mathbf{Z}^-)\,d\mathbf{Z}^-.$$

В силу (8), второй интеграл правой части этого равенства равен нулю, и равенство (13) принимает вид:

$$I = \delta + \int_{L^+} \mathbf{X}(\mathbf{Z}^+ - \mathbf{Z}^-)\,d\mathbf{Z}^+ + \int_{L^+} \mathbf{X}(\mathbf{Z}^+ - \mathbf{Z}^-)\,d\mathbf{Z}^-, \tag{14}$$

где δ обозначает приращение $\mathbf{X}\mathbf{Z}^-\mathbf{Z}^+$ при однократном обходе всех ребер в положительном направлении:

$$\delta = \{\mathbf{X}\mathbf{Z}^-\mathbf{Z}^+\}_{L^+}. \tag{15}$$

В силу (3) и (8), равенство (14) можно переписать в виде:

$$I = \int_{L^+} \mu G_{l^+} \mathbf{X}\mathbf{n}^+ ds + \int_{L^+} \mu G_{l^-} \mathbf{X}\mathbf{n}^- ds + \delta \tag{16}$$

(здесь мы учли, что $\mathbf{l}^+ \times \mathbf{s} = \mathbf{n}^+$, $\mathbf{l}^- \times \mathbf{s} = \mathbf{n}^-$).

Так как начало вектора $\mathbf{X}$ взято внутри рассматриваемой поверхности, то $\mathbf{X}\mathbf{n}^+ > 0$, $\mathbf{X}\mathbf{n}^- > 0$. Таким образом, в силу неравенств (11), криволинейные интегралы, фигурирующие в правой части равенства (16), будут неотрицательны. Если, кроме того, будет доказано, что $\delta \geqslant 0$, то правая часть равенства (16) будет неотрицательной, в то время как левая его часть, равная левой части равенства (7), неположительна. Отсюда следуют равенства:

$$H^2 - G_1 G_2 = 0, \quad \delta = 0,$$

которые, как мы уже отмечали выше, вместе с равенством $\mu \equiv 0$ на L, означают жесткость рассматриваемой поверхности. Таким образом, остается доказать, что $\delta \geqslant 0$, и обнаружить, что из равенств $H = G_1 = G_2 = 0$, $\delta = 0$, следует, что $\mu \equiv 0$ на L. Очевидно, $\delta = \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_p$, где

δ_i обозначает приращение $\mathbf{XZ^-Z^+}$ на ребре L_i^+. Если A_i и B_i — начало и конец ребра L_i, то, очевидно,

$$\delta_i = (\mathbf{XZ^-Z^+})_{B_i} - (\mathbf{XZ^-Z^+})_{A_i}. \tag{17}$$

Так как мы считаем, что векторы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Z}$ непрерывны на замкнутых поверхностях, из которых склеена рассматриваемая поверхность, то приращения величины $\mathbf{XZ^-Z^+}$ на ребрах, входящих в группу $\mathbf{A}$, равны нулю. В самом деле, для замкнутых ребер $A_i = B_i$ и, очевидно, $\delta_i = 0$; для разомкнутого ребра $\mathbf{Z}^+_{A_i} = \mathbf{Z}^-_{A_i}$, $\mathbf{Z}^+_{B_i} = \mathbf{Z}^-_{B_i}$ и также $\delta_i = 0$. Если $\mathbf{Z}^+$ постоянно вдоль L_i^+ и $\mathbf{Z}^-$ постоянно вдоль L_i^-, то из (8) и (9) следует равенство $\mu \equiv 0$ на всяком ребре L_i, на котором существует хоть одна точка с $k \neq 0$. Из (8) также следует, что $\mu = 0$ на разомкнутых ребрах. На прямолинейном ребре L_i, в силу (8), $\mu = C_i = \mathrm{const}$. Следовательно, $\mu = 0$ на всяком ребре группы $\mathbf{A}$, представляющем собой замкнутую простую ломаную, состоящую из прямолинейных или криволинейных отрезков. Итак, мы доказали, что из равенств $H^2 - G_1G_2 = 0$, $\delta = 0$ вытекает, что $\mu \equiv 0$ на всяком ребре группы $\mathbf{A}$.

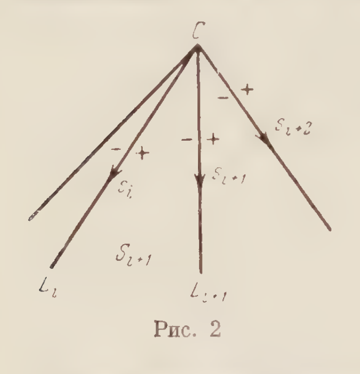


Рис. 2

Таким образом, установлена жесткость выпуклой кусочно-гладкой поверхности неотрицательной кривизны для того случая, когда линии склеивания представляют собой кусочно-гладкие простые кривые Жордана (замкнутые или разомкнутые).

Перейдем теперь к доказательству этого предложения в общем случае. Прежде всего мы должны обнаружить, что $\delta \geqslant 0$.

Суммируя выражение (17) по ребрам группы $\mathbf{B}$ и группируя слагаемые по соответствующим вершинам, получим:

$$\delta = \delta_A + \delta_B + \ldots + \delta_M, \tag{17'}$$

где $A, B, \ldots, M$ обозначают вершины всех ребер, а δ_C — сумма всех тех слагаемых, фигурирующих в правых частях равенств (17), которые относятся к вершине C. Докажем, что $\delta_C \geqslant 0$ для любой вершины C.

Пусть в точке C пересекаются n ребер $L_1, L_2, \ldots, L_n$. Окрестность точки C на поверхности будет подразделена этими ребрами на n участков $S_1, \ldots, S_n$, причем мы будем считать, что они перенумерованы таким образом, что, во-первых, L_i является общей границей S_i и S_{i+1} и, во-вторых, направление перехода от S_i к S_{i+1} противоположно движению часовой стрелки (см. рис. 2).

Пусть $\mathbf{s}_i$ — орт касательной к ребру L_i $(i = 1, \ldots, n,\ \mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_1)$. Будем считать, что векторы $\mathbf{s}_i$ направлены таким образом, что многогранник, построенный на них, расположен в отношении точки C так же, как и рассматриваемая поверхность.

Если C является началом ребра L_i, то в сумме δ_C соответствующее слагаемое будет равно

$$-(\mathbf{X}\mathbf{Z}^-\mathbf{Z}^+)_C = -\mathbf{X}\mathbf{Z}_i\mathbf{Z}_{i+1}, \tag{18}$$

а если C есть конец ребра L_i, то, согласно формуле (17), будем иметь:

$$(\mathbf{X}\mathbf{Z}^-\mathbf{Z}^+)_C = \mathbf{X}\mathbf{Z}_{i+1}\mathbf{Z}_i = -\mathbf{X}\mathbf{Z}_i\mathbf{Z}_{i+1}, \tag{18'}$$

где $\mathbf{Z}_i$ обозначает предел вектора вращения $\mathbf{Z}(M)$, когда точка M поверхности стремится к C, оставаясь в области S_i. По предположению, вектор $\mathbf{Z}$ непрерывен в каждой из областей S_i, включая их границы. Поэтому очевидно, что $\mathbf{Z}_i$ существует.

Суммируя выражения (18) и (18′) по всем ребрам, будем иметь:

$$\delta_C = -\mathbf{X}\Omega_C,$$

где

$$\Omega_C = \mathbf{Z}_1 \times \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3 + \ldots + \mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_1. \tag{19}$$

Согласно (8),

$$\mathbf{Z}_{i+1} = \mathbf{Z}_i - \mu_i \mathbf{s}_i = \mathbf{Z}_1 - (\mu_1 \mathbf{s}_1 + \ldots + \mu_i \mathbf{s}_i). \tag{20}$$

Суммируя эти равенства, получим:

$$\mu_1 \mathbf{s}_1 + \mu_2 \mathbf{s}_2 + \ldots + \mu_n \mathbf{s}_n = 0. \tag{21}$$

Внося (20) в (19) и учитывая (21), найдем:

$$\Omega_C = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i-1} \mu_i \mu_k \mathbf{s}_k \times \mathbf{s}_i,$$

но из (21) следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \mu_i \mu_k \mathbf{s}_k \times \mathbf{s}_i = 0.$$

Поэтому равенство (19) мы можем записать в виде:

$$\Omega_C = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} \mu_i \mu_k \mathbf{s}_k \times \mathbf{s}_i. \tag{22}$$

Мы не исключаем из рассмотрения случай, когда некоторые ребра имеют общую касательную в точке C, т. е. когда среди векторов $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n$ некоторые совпадают. Пусть среди них различными являются $\mathbf{s}_1', \ldots, \mathbf{s}_m'$, $m \leqslant n$. В таком случае равенства (21) и (22) принимают вид:

$$\mu_1' \mathbf{s}_1' + \mu_2' \mathbf{s}_2' + \ldots + \mu_m' \mathbf{s}_m' = 0,$$

$$\Omega_C = -\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=i+1}^{m} \mu_i' \mu_k' \mathbf{s}_k' \times \mathbf{s}_i'.$$

Таким образом, с самого начала мы можем предположить, что все векторы $\mathbf{s}_i$ различны. Нам нужно доказать, что $\delta_C = -\mathbf{X}\Omega_C \geqslant 0$. Для это-

го достаточно показать, что вектор $-\Omega_C$ составляет с каждым из векторов s_k угол, больший чем $\frac{\pi}{2}$, т. е. что

$$\Omega_C s_k \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{23}$$

причем знак равенства для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ возможен лишь тогда, когда $\Omega_C = 0$. Это означает, что вектор $-\Omega_C$, если он не нуль, лежит внутри сферического изображения телесного угла V при вершине C, внутреннего в отношении рассматриваемой поверхности.

Для справедливости высказанного утверждения необходимо сделать одно добавочное предположение: векторы s_k $(k = 1, \ldots, n)$ не могут все лежать в одной плоскости, т. е. телесный угол V не должен вырождаться в плоскость ни при одной из вершин рассматриваемой поверхности *.

Для доказательства неравенства (23) предположим сначала, что никакая тройка векторов s_k, s_{k+1}, s_{k+2} не компланарна. Если $n \leqslant 3$, то из (21) следует, что все $\mu_k = 0$ и, следовательно, $\Omega_C = 0$, т. е. $\delta_C = 0$. Пусть $n \geqslant 4$. Тогда векторы s_k, $k \geqslant 4$, можно представить в виде

$$s_k = \sum_{\alpha=1}^{3} \beta_{k\alpha} s_\alpha, \quad k = 4, \ldots, n, \tag{24}$$

где

$$\beta_{k1} = \frac{s_k s_1 s_3}{s_1 s_2 s_3} > 0, \quad \beta_{k2} = \frac{s_1 s_k s_3}{s_1 s_2 s_3} < 0, \quad \beta_{k3} = \frac{s_1 s_2 s_k}{s_1 s_2 s_3} > 0.$$

Внося выражение (24) в (21), получим:

$$\mu_\alpha = -\sum_{k=4}^{n} \beta_{k\alpha}\mu_k, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Нумерацию векторов s_i мы можем произвести так, чтобы рассматриваемый вектор s_k совпал с s_3. Легко видеть, что при таком изменении нумерации вектор Ω_C не изменится. Поэтому достаточно доказать, что $\Omega_C s_3 \geqslant 0$.

Умножая обе части равенства (22) скалярно на s_3, получим:

$$-\Omega_C s_3 = \mu_1\mu_2 s_2 s_1 s_3 + \mu_1 \left(\sum_{k=4}^{n} \mu_k s_k\right)(s_1 \times s_3) + \mu_2 \left(\sum_{k=4}^{n} \mu_k s_k\right)(s_2 \times s_3) +$$
$$+ \sum_{i=4}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} \mu_i\mu_k s_k s_i s_3 = -\mu_1\mu_2 s_1 s_2 s_3 + \sum_{i=4}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} \mu_i\mu_k s_k s_i s_3. \tag{25}$$

* Это добавочное предположение необходимо только для высказанного вспомогательного утверждения, а не для доказываемой теоремы, если исключить из поверхности плоские части. Так как для невырожденного выпуклого многогранного угла всегда $\delta_C \geqslant 0$, то и в предельном, вырожденном случае, очевидно, $\delta_C \geqslant 0$. Однако, как видно из дальнейших рассуждений, отсюда можно заключить, что $\mu \equiv 0$ лишь тогда, когда поверхность S не содержит плоских частей.

В силу (24),

$$\mathbf{s}_k\mathbf{s}_i\mathbf{s}_3 = \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\lambda=1}^{3}\beta_{k\alpha}\beta_{i\lambda}(\mathbf{s}_\alpha \times \mathbf{s}_\lambda)\,\mathbf{s}_3 = (\beta_{k1}\beta_{i2} - \beta_{k2}\beta_{i1})\,\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2\mathbf{s}_3. \qquad (25')$$

Поэтому равенство (25) принимает вид:

$$-\Omega_C\mathbf{s}_3 = (\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2\mathbf{s}_3)\left[\sum_{i=4}^{n}\sum_{k=i+1}^{n}\mu_i\mu_k(\beta_{k1}\beta_{i2} - \beta_{k2}\beta_{i1}) - \mu_1\mu_2\right] =$$

$$= (\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2\mathbf{s}_3)\left[\sum_{i=4}^{n}\sum_{k=i+1}^{n}\mu_i\mu_k(\beta_{k1}\beta_{i2} - \beta_{k2}\beta_{i1}) - \sum_{i=4}^{n}\sum_{k=4}^{n}\beta_{k1}\beta_{i2}\mu_k\mu_{i1}\right] =$$

$$= (\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2\mathbf{s}_3)\left[-\sum_{i=4}^{n}\sum_{k=i+1}^{n}\mu_i\mu_k\beta_{k2}\beta_{i1} - \sum_{i=4}^{n}\sum_{k=4}^{i}\mu_i\mu_k\beta_{k1}\beta_{i2}\right],$$

т. е.

$$\Omega_C\mathbf{s}_3 = (\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2\mathbf{s}_3)\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}A_{ik}\xi_i\xi_k, \qquad (26)$$

где

$$\xi_i = \mu_{i+3}, \quad i = 1, 2, \ldots, \quad m = n - 3,$$

$$A_{ik} = A_{ki} = \begin{cases}\beta_{i+3,2}\beta_{k+3,1} & \text{при } k \leqslant i,\\ \beta_{k+3,2}\beta_{i+3,1} & \text{при } k > i.\end{cases}$$

Если учесть, что тройки векторов $\mathbf{s}_i\mathbf{s}_k\mathbf{s}_j$ при $i < k < j$ составляют систему левого вращения (см. рис. 2), то будем иметь:

$$\mathbf{s}_i\mathbf{s}_k\mathbf{s}_j < 0 \text{ при } i < k < j. \qquad (27)$$

Так как $\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2\mathbf{s}_3 < 0$, то из (26) следует, что $\Omega_C\mathbf{s}_3 > 0$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}A_{ik}\xi_i\xi_k < 0, \qquad (28)$$

а для этого достаточно, чтобы выполнялись неравенства:

$$(-1)^k\Delta_k > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m), \qquad (29)$$

где

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1k}\\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2k}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ A_{k1} & A_{k2} & \ldots & A_{kk}\end{vmatrix}.$$

При помощи индукции легко убедиться, что

$$\Delta_k = \beta_{41}(\beta_{42}\beta_{51} - \beta_{41}\beta_{52})(\beta_{52}\beta_{61} - \beta_{51}\beta_{62})\ldots(\beta_{k+2,2}\beta_{k+3,1} - \beta_{k+2,1}\beta_{k+3,2})\,\beta_{k+3,2},$$

или, используя (25′),

$$\Delta_k = \frac{(\mathbf{s}_4\mathbf{s}_2\mathbf{s}_3)(\mathbf{s}_5\mathbf{s}_4\mathbf{s}_3)(\mathbf{s}_6\mathbf{s}_5\mathbf{s}_3)\ldots(\mathbf{s}_{k+3}\mathbf{s}_{k+2}\mathbf{s}_3)(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_{k+3}\mathbf{s}_1)}{(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2\mathbf{s}_3)^{k+1}}.$$

Если в соотношении (27) для $i = 3$ нигде не присутствует знак равенства, то легко видеть, что неравенства (29) выполняются. Квадратичная

форма (28) оказывается отрицательно определенной и $\delta_C > 0$, если

$$\sum \xi_i^2 = \sum_{i \geqslant 4} \mu_i^2 > 0.$$

В общем случае, когда некоторые тройки векторов $\mathbf{s}_i$, $\mathbf{s}_k$, $\mathbf{s}_j$ компланарны, форма (28) не будет уже отрицательно определенной. Однако тогда, по непрерывности, она будет во всяком случае неположительно определенной. Поэтому для всех $k = 1, \ldots, n$ будем иметь: $\Omega_C \mathbf{s}_k \geqslant 0$, причем, если $\Omega_C \mathbf{s}_k = 0$ для $k = 1, \ldots, n$, то $\Omega_C = 0$; в противном случае все $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n$ лежали бы в плоскости, ортогональной вектору $\Omega_C \neq 0$, а это противоречит нашему предположению. Следовательно, и в этом случае $\delta_C \geqslant 0$; отсюда выводим, что $\delta_C = 0$ и $\Omega_C = 0$ во всех вершинах C рассматриваемой поверхности.

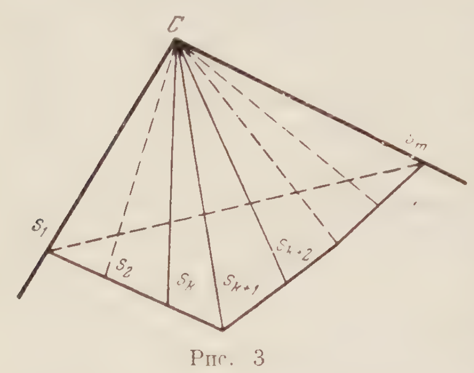


Рис. 3

Если в вершине C существует хоть одна тройка ребер $\mathbf{s}_k$, $\mathbf{s}_{k+1}$, $\mathbf{s}_{k+2}$ такая, что в плоскостях $\mathbf{s}_{k+1}\mathbf{s}_{k+2}$ и $\mathbf{s}_k\mathbf{s}_{k+2}$ не имеется никаких других ребер при вершине C, то тогда выражение для скалярного произведения $\Omega_C \mathbf{s}_{k+2}$ будет, согласно разобранному выше случаю, отрицательно определенной формой переменных $\mu_1, \ldots, \mu_{k-1}, \mu_{k+3}, \ldots, \mu_n$, причем $\Omega_C \mathbf{s}_{k+2} = 0$, так что $\mu_i = 0$ для всех ребер L_i при вершине C. В силу (8) и (9), на всех ребрах, на которых хоть в одной точке кривизна $k \neq 0$, также будет $\mu = 0$. Поэтому при доказательстве равенства $\mu = 0$ на всех ребрах при вершине C криволинейные ребра можно заранее исключить из рассмотрения.

Остается исследовать только тот случай, когда в вершине C сходится несколько прямолинейных ребер, причем при любом выборе тройки $\mathbf{s}_k$, $\mathbf{s}_{k+1}$, $\mathbf{s}_{k+2}$ в одной из каждых двух плоскостей $\mathbf{s}_k\mathbf{s}_{k+1}$, $\mathbf{s}_k\mathbf{s}_{k+2}$, $\mathbf{s}_{k+1}\mathbf{s}_{k+2}$ имеются векторы $\mathbf{s}_i$, отличные от $\mathbf{s}_k$, $\mathbf{s}_{k+1}$, $\mathbf{s}_{k+2}$. Это будут так называемые ненастоящие ребра (см. рис. 3).

Так как не все $\mathbf{s}_i$, $i = 1, \ldots, n$, лежат в одной плоскости, то имеется такая тройка, для которой $\mathbf{s}_k\mathbf{s}_{k+1}\mathbf{s}_{k+2} \neq 0$. Предположим, что $\mathbf{s}_i \neq -\mathbf{s}_k$ ни для одной пары i и k. Тогда если $\mathbf{s}_{k+3}, \ldots, \mathbf{s}_m$ — все ребра при вершине C, лежащие в плоскости $\mathbf{s}_{k+1}\mathbf{s}_{k+2}$, то, рассматривая квадратичную форму $\Omega_C \mathbf{s}_{k+2}$, аналогичную форме (26), получим, что все $\mu_i = 0$ для $i < k$ и $i > m$. Рассматривая же формы $\Omega_C \mathbf{s}_{k+1}$ или $\Omega_C \mathbf{s}_{k+2}$, легко выведем, что и все остальные μ_i равны нулю.

В силу выпуклости и нашего добавочного предположения о некомпланарности всех $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n$, может существовать самое большее одна пара $\mathbf{s}_{i_0}$, $\mathbf{s}_{k_0}$ такая, что $\mathbf{s}_{i_0} = -\mathbf{s}_{k_0}$. Это будет иметь место тогда, когда угол V вырождается в двугранный угол с ребром вдоль $\mathbf{s}_{i_0}$; вершина C будет его ненастоящей вершиной. Тогда из условия $\Omega_C = 0$ и из равенства (21) уже нельзя заключить, что все $\mu_i = 0$. Однако, исключая вектор $\mathbf{s}_{k_0}$ из формул (21) и (22), мы сведем рассматриваемый случай к преды-

дущему и легко получим, что $\mu_i = 0$ для $i \neq i_0$, k_0 и $\mu_{i_0} = \mu_{k_0}$, т. е. при переходе через вершину C в направлении ребра двугранного угла V величина μ сохраняет свое значение. Поэтому для установления равенства $\mu_{i_0} = 0$ достаточно заметить, что, передвигаясь вдоль ребра $\mathbf{s}_{i_0}$, мы, очевидно, после конечного числа шагов придем к вершине C', через которую ребро в направлении s_{i_0} уже не продолжимо или продолжимо лишь как криволинейное ребро. В обоих случаях мы получим, что $\mu'_{i_0} = 0$ при вершине C', откуда, согласно сказанному, следует уже, что и при вершине C $\mu_{i_0} = \mu_{k_0} = 0$.

Это полностью завершает доказательство предложения о жесткости произвольной кусочно-гладкой замкнутой выпуклой поверхности неотрицательной кривизны.

Заметим, что наше рассуждение дает также доказательство жесткости выпуклых многогранников. Для этого достаточно заметить, что, согласно формуле (17), все $\delta_i = 0$; в самом деле, вектор вращения $\mathbf{Z}$ принимает постоянное значение на каждой грани и поэтому

$$\mathbf{Z}^+_{B_i} = \mathbf{Z}^+_{A_i}, \quad \mathbf{Z}^-_{B_i} = \mathbf{Z}^-_{A_i}.$$

Таким образом,

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \ldots = 0.$$

Но, в силу (17′), $\delta > 0$, если изгибание не тривиально, ибо найдется хоть одна такая вершина C, для которой не все μ_i равны нулю, что невозможно.

Равенство $\delta = 0$ следует также из интегрального равенства (16), ибо для многогранников $H = G_1 = G_2 = 0$.

Замечание. Пусть P — коническая точка поверхности S. Если из S вырезать точку P при помощи маленького контура L_δ, стягивающегося к точке P при $\delta \to 0$, и к оставшейся части применить формулу (2), то в правой части формулы (7) появится добавочный член вида $\int\limits_{L_\delta} \mathbf{XZ}d\mathbf{Z}$.

Докажем, что

$$\lim_{\delta \to 0} \int\limits_{L_\delta} \mathbf{XZ}d\mathbf{Z} \geqslant 0. \tag{30}$$

Неравенство (30) есть непрерывный аналог неравенства (23). При его выводе ограничимся для простоты случаем, когда в окрестности точки P поверхность S есть выпуклый конус. Учитывая, что в координатной системе в линиях кривизны первую квадратичную форму конуса можно представить в виде

$$ds^2 = dv^2 + v^2 du^2,$$

мы из системы уравнений бесконечно малых изгибаний для векторов смещения и вращения получим следующие выражения:

$$\mathbf{Y} = v\,[\psi(u)\,\mathbf{l}'(u) + \nu(u)\,\psi'(u)\,\mathbf{n}],$$

$$\mathbf{Z} = \psi(u)\,\mathbf{n} - \nu\psi'\mathbf{l}' + \left[\frac{\psi}{\nu} + (\nu\psi')'\right]\mathbf{l},$$

$$\frac{d\mathbf{Z}}{du} = \left\{\left[\frac{\psi}{\nu} + (\nu\psi')'\right]' + \psi' \operatorname{tg}\theta\right\}\mathbf{l} \equiv G\cdot\mathbf{l},$$

где $\nu = \frac{1}{vk_2}$, $\cos\theta = \mathbf{mn}$ и $\psi(u)$ — некоторая периодическая функция переменного u $(0 \leqslant u \leqslant 2\pi,\ v > 0)$.

При выводе этих формул принято, что в вершине P вектор смещения $\mathbf{Y}$ равен нулю; не нарушая общности, этого всегда можно добиться добавлением тривиального изгибания (своего для каждой вершины).

Из приведенных формул следует, что

$$|Z|\cdot v \to 0, \qquad (31)$$
$$\left|\frac{dZ}{ds}\right|\cdot v < C, \quad C = \text{const}$$

при $v \to 0$. Частные суммы вида

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{Z}_i \times (\mathbf{Z}_{i+1} - \mathbf{Z}_i),$$

где $\mathbf{Z}_{i+1} - \mathbf{Z}_i = H(u_i)\,\mathbf{l}(u_i) \equiv \mu_i \mathbf{l}_i$ и $\mathbf{l}_i$ — некоторая последовательность образующих конуса, будут, очевидно, при любом фиксированном $v > 0$ приближать интеграл

$$\int_{L_\delta} \mathbf{Z} \times \frac{d\mathbf{Z}}{ds}\,ds, \quad \delta = v = \text{const}.$$

Но в силу того, что

$$\mathbf{Z}_{i+1} - \mathbf{Z}_i = \mu_i \mathbf{l}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

и того, что $\mathbf{l}_i$ можно считать ребрами некоторого выпуклого многогранного угла, эти частные суммы имеют вид (19) и к ним применимы рассуждения на стр. 171—172. Поэтому

$$\mathbf{X}_0 \int_{L_\delta} \mathbf{Z} \times \frac{d\mathbf{Z}}{ds}\,ds \geqslant 0.$$

Представляя интеграл (30) в виде

$$\int_{L_\delta} \mathbf{XZ}d\mathbf{Z} = \mathbf{X}_p \int_{L_\delta} \mathbf{Z} \times d\mathbf{Z} + \int_{L_\delta} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_p)\,\mathbf{Z} \times d\mathbf{Z}$$

и учитывая соотношения (31), отсюда легко выводим неравенство (30).

Поступило
1.IV.1957

ЛИТЕРАТУРА

1 Бляшке В., Дифференциальная геометрия, М.—Л., ОНТИ, 1936.
2 Векуа И. Н., Некоторые вопросы бесконечно малых изгибаний поверхностей, Доклады Ак. наук СССР, 112, № 3 (1957), 377—380.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 177—200

А. М. ТЕР-КРИКОРОВ

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ВИХРЯ ПОД ПОВЕРХНОСТЬЮ ЖИДКОСТИ

(*Представлено академиком* **А. А. Дородницыным**)

В работе рассмотрена задача об установившемся движении вихря под поверхностью идеальной несжимаемой тяжелой жидкости конечной глубины. Доказано, что существует единственное решение, переходящее в плоскопараллельный поток, когда циркуляция стремится к нулю.

Задача об установившемся движении подводного крыла в линейной постановке изучена подробно. Основные результаты были получены в работах М. В. Келдыша, М. А. Лаврентьева [см. ([1]), ([2])] и Н. Е. Кочина ([3]) [стр. 105—182].

Если распределить по поверхности крыла вихри (или источники) и воспользоваться выражением для потенциала вихря при его движении под поверхностью жидкости, найденным Келдышем, то задача сведется к линейным интегральным уравнениям, которые имеют весьма сложный вид. Эффективное решение для тонкого крыла было дано Келдышем и Лаврентьевым, а для глубоко погруженного тела — Кочиным.

Большие успехи в области нелинейной теории волн, достигнутые в последнее время (в частности, доказательство существования одиночной волны, данное независимо М. А. Лаврентьевым ([4]) и К. Фридрихсом ([5])), позволяют поставить вопрос о существовании решения задачи о движении подводного тела в точной постановке и о единственности такого решения. В настоящей работе этот вопрос разрешен для вихря в канале конечной глубины в том случае, когда $c^2 > gH$ и $\gamma = \frac{\Gamma}{cH}$ мало, где c — скорость вихря, H — глубина канала, g — ускорение силы тяжести, Γ — интенсивность вихря.

§ 1. Постановка задачи

Вихрь постоянной интенсивности движется с постоянной скоростью в канале конечной глубины под поверхностью идеальной тяжелой жидкости. Предполагается, что далеко впереди перед вихрем жидкость покоится и свободная поверхность параллельна дну канала. Дно канала горизонтально. Не ограничивая общности, скорость вихря и глубину жидкости на бесконечности всегда можно принять равными единице. Движение можно обратить и рассматривать обтекание вихря потоком жидкости со скоростью на бесконечности, равной единице.

Возьмем систему координат, как показано на рис. 1. Вихрь находится в точке $P(0, \alpha)$ и имеет интенсивность γ. Пусть $y = Y(x)$ — уравнение свободной границы (L), а $y = 0$ — дно канала (S). Область, заключенную между (L) и (S), обозначим через D. Пусть $z = x + iy$, $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ — комплексный потенциал.

Рис. 1

Задача сводится к определению функции $w(z)$, аналитической в D, имеющей в точке $z = i\alpha$ логарифмическую особенность и удовлетворяющую граничным условиям:

$$\frac{1}{2}\left|\frac{dw}{dz}\right|^2 + \gamma y = \text{const} \quad \text{на } (L), \tag{1.1}$$

$$\psi = 1 \qquad \text{на } (L), \tag{1.2}$$

$$\psi = 0 \qquad \text{на } (S) \tag{1.3}$$

и асимптотическим условиям:

$$\lim_{x \to -\infty} Y(x) = 1, \tag{1.4}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{dw}{dz} = 1. \tag{1.5}$$

Отметим, что кривая (L) не известна и должна быть определена в процессе решения. Гидродинамически условие (1.1) означает, что давление на свободной границе постоянно, а условия (1.2), (1.3) — что в установившемся движении свободная граница и дно являются линиями тока, γ — величина ускорения силы тяжести в нашей системе единиц.

§ 2. Сведе́ние задачи с граничными условиями на неизвестной границе к задаче с граничными условиями на известной границе

Отобразим конформно область D на полосу $\sum (0 < \eta < 1)$ при помощи некоторой аналитической в D функции

$$\zeta(z) = \xi(x + y) + i\eta(x, y)$$

так, чтобы бесконечно удаленной точке в плоскости z соответствовала бесконечно удаленная точка в плоскости ζ. Пусть точке $z = i\alpha$ соответствует точка $\zeta = i\beta$. Легко найти выражение для комплексного потенциала в плоскости ζ. Как известно, при конформном отображении вихрь переходит в вихрь той же интенсивности. В полосе $\sum$ $w(\zeta)$ имеет логарифмическую особенность в точке $\zeta = i\beta$ и удовлетворяет на границах условиям:

$$\operatorname{Im} w(\zeta) = 0, \quad \eta = 0, \tag{2.1}$$

$$\operatorname{Im} w(\zeta) = 1, \quad \eta = 1. \tag{2.2}$$

Нетрудно проверить, что функция

$$w(\zeta)=\frac{\gamma}{2\pi i}\ln\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}(\zeta-i\beta)}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}(\zeta+i\beta)}+\zeta \tag{2.3}$$

удовлетворяет всем этим требованиям.

Подставляя $\frac{dw}{d\zeta}$ в (1.1), получаем:

$$\frac{1}{2}\left[1-\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\sin\beta\pi}{\operatorname{ch}\pi\xi+\cos\beta\pi}\right]^2\cdot\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2+\nu y=\text{const}. \tag{2.4}$$

Для того чтобы скорость не обращалась в нуль на свободной границе, необходимо выполнение условия

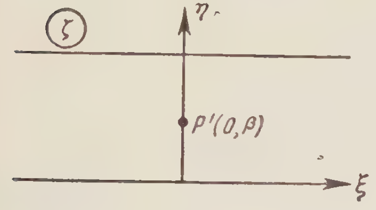


Рис. 2

$$1-\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\sin\beta\pi}{1+\cos\beta\pi}>0 \tag{2.5}$$

или

$$\gamma<2\operatorname{ctg}\frac{\beta\pi}{2}. \tag{2.5′}$$

Условие (2.5′) всегда выполняется для $\gamma<0$.

Асимптотические условия (1.4), (1.5) запишутся следующим образом:

$$\lim_{\xi\to-\infty} y(\xi,1)=1, \tag{2.6}$$

$$\lim_{\xi\to-\infty}\frac{dz}{d\zeta}=1. \tag{2.7}$$

Кроме того, так как оси $y=0$ соответствует ось $\eta=0$,

$$y(\xi,0)=0. \tag{2.8}$$

Для упрощения граничных условий введем новую переменную τ, положив:

$$\frac{d\zeta}{dz}=e^{-i\tau(\zeta)},\quad \tau(\zeta)=\theta(\xi,\eta)+i\lambda(\xi,\eta). \tag{2.9}$$

Подставляя (2.9) в (2.4), получаем:

$$\frac{1}{2}\left[1-\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\sin\beta\pi}{\operatorname{ch}\pi\xi+\cos\beta\pi}\right]^2e^{2\lambda}+\nu y=\text{const}. \tag{2.10}$$

Продифференцировав (2.10) по ξ и приняв во внимание, что

$$\frac{\partial y}{\partial\xi}=\operatorname{Im}\frac{\partial z}{\partial\zeta}=\operatorname{Im}e^{i\tau(\zeta)}=e^{-\lambda}\cdot\sin\theta,$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}=-\frac{\partial\theta}{\partial\eta},$$

находим:

$$-\frac{1}{2}\left[1-\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\sin\beta\pi}{\operatorname{ch}\pi\xi+\cos\beta\pi}\right]^2 e^{2\lambda}\cdot 2\cdot\frac{\partial\theta}{\partial\eta}+$$

$$+e^{2\lambda}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\left[1-\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\sin\beta\pi}{\operatorname{ch}\pi\xi+\cos\beta\pi}\right]^2+\nu e^{-\lambda}\sin\theta=0, \tag{2.11}$$

что после простых преобразований можно записать в виде:

$$\frac{\partial\theta}{\partial\eta}-\nu\theta=F(\theta,\lambda,\xi,\beta), \tag{2.12}$$

где

$$F(\theta,\lambda,\xi,\beta)=\nu\frac{e^{-3\lambda}\sin\theta-\theta}{\left[1-\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\sin\beta\pi}{\operatorname{ch}\pi\xi+\cos\beta\pi}\right]^2}+$$

$$+\nu\theta\left[\left(1-\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\sin\beta\pi}{\operatorname{ch}\pi\xi+\cos\beta\pi}\right)^{-2}-1\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\xi}\ln\left[1-\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\sin\beta\pi}{\operatorname{ch}\pi\xi+\cos\beta\pi}\right]. \tag{2.13}$$

Условие (2.8) для функции $\tau(\zeta)=\theta+i\lambda$ будет иметь вид:

$$\theta(\xi,0)=0. \tag{2.14}$$

Условие (2.7), в силу (2.9), дает:

$$\lim_{\xi\to-\infty}\tau(\zeta)=0. \tag{2.15}$$

Условие (2.6) определяет зависимость β от $\tau(\zeta)$.

Из (2.9), учитывая, что точке $\zeta=i\beta$ соответствует точка $z=i\alpha$, получаем:

$$z=i\alpha+\int_{i\beta}^{\zeta}e^{i\tau(t)}\,dt, \tag{2.16}$$

или

$$z=i(\alpha-\beta)+\zeta+\int_{i\beta}^{\zeta}[e^{i\tau(t)}-1]\,dt. \tag{2.17}$$

Отделяя действительную и мнимую части, находим:

$$x=\xi+\operatorname{Re}\int_{i\beta}^{\zeta}[e^{i\tau(t)}-1]\,dt, \tag{2.18}$$

$$y=\eta+(\alpha-\beta)+\operatorname{Im}\int_{i\beta}^{\zeta}[e^{i\tau(t)}-1]\,dt. \tag{2.19}$$

Отсюда, в силу (2.6), будет следовать, что

$$\beta=\alpha+\operatorname{Im}\int_{i\beta}^{i-\infty}[e^{i\tau(t)}-1]\,dt. \tag{2.20}$$

Мы пришли к следующей задаче: найти функцию $\tau(\zeta)$, аналитическую в полосе $0<\eta<1$, непрерывную на границах полосы и удовлетворяю-

щую условиям:

$$\frac{\partial\theta}{\partial\eta} - \nu\theta = F(\theta, \lambda, \xi, \beta), \tag{2.21}$$

$$\theta(\xi, 0) = 0, \tag{2.22}$$

$$\lim_{\xi\to-\infty} \tau(\zeta) = 0, \tag{2.23}$$

где β есть функционал

$$\beta = \alpha + \operatorname{Im} \int_{i\beta}^{i-\infty} [e^{i\tau(t)} - 1]\, dt, \tag{2.24}$$

а $F(\theta, \lambda, \xi, \beta)$ определяется формулой (2.13).

Наложим на параметры γ, β и ν следующие ограничения:

$$\gamma > 0, \quad 0 < \beta < 1, \quad \nu < 1. \tag{2.25}$$

Первое ограничение несущественно, так как все доказательства для случая $\gamma < 0$ проводятся аналогично. Второе ограничение показывает, что вихрь не находится на границах жидкости. Смысл третьего условия будет ясен из дальнейшего.

§ 3. Построение функции Грина

Рассмотрим следующую задачу: найти функцию $\theta(x, y)$, гармоническую в полосе $0 < y < 1$, непрерывную при $y = 0$ и $y = 1$ и удовлетворяющую граничным условиям:

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} - \nu\theta = f(x) \quad \text{при } y = 1, \tag{3.1}$$

$$\theta = 0 \qquad \text{при } y = 0, \tag{3.2}$$

где $f(x)$ — абсолютно интегрируемая функция.

Назовем функцией Грина этой задачи функцию $G(x, y, \xi, \eta)$, гармоническую в полосе $0 < y < 1$, имеющую логарифмическую особенность в точке $x = \xi$, $y = \eta$ и удовлетворяющую однородным граничным условиям:

$$\frac{\partial G}{\partial y} - \nu G = 0 \quad \text{при } y = 1, \tag{3.3}$$

$$G = 0 \quad \text{при } y = 0. \tag{3.4}$$

Выделяя логарифмическую особенность, мы можем представить G в виде

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi} \log \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2} - G_1(x, y, \xi, \eta), \tag{3.5}$$

где $G_1(x, y, \xi, \eta)$ — гармоническая функция, не имеющая особенностей в полосе $0 < y < 1$.

Из (3.3) и (3.4) получаем граничные условия для определения G_1:

$$\left[\frac{\partial G_1}{\partial y} - \nu G_1\right]_{y=1} = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{2(1-\eta)}{(x-\xi)^2+(1-\eta)^2} - \frac{2(1+\eta)}{(x-\xi)^2+(1+\eta)^2} - \right.$$
$$\left. - \nu \log\frac{(x-\xi)^2+(1-\eta)^2}{(x-\xi)^2+(1+\eta)^2}\right], \tag{3.6}$$
$$[G_1]_{y=0} = 0. \tag{3.7}$$

Если воспользоваться формулами

$$\frac{a}{a^2+b^2} = \int\limits_0^\infty e^{-ak}\cos bk\,dk, \quad a>0, \tag{3.8}$$

$$\log\frac{a^2+(d-c)^2}{a^2+(d+c)^2} = -4\int\limits_0^\infty e^{-kd}\operatorname{sh} kc\cdot\cos ka\frac{dk}{k}, \tag{3.9}$$

то после несложных преобразований можно получить:

$$\left[\frac{\partial G_1}{\partial y} - \nu G_1\right]_{y=1} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-k}\cdot\operatorname{sh} k\eta\cdot\frac{\nu+k}{k}\cdot\cos k(x-\xi)\,dk. \tag{3.10}$$

Будем искать $G_1(x, y, \xi, \eta)$ в виде:

$$G_1(x, y, \xi, \eta) = \int\limits_0^\infty \mu(k)\cdot\operatorname{sh} ky\cdot\cos k(x-\xi)\,dk. \tag{3.11}$$

Очевидно, что условие (3.7) выполняется. Для выполнения условия (3.10) необходимо положить

$$\mu(k) = \frac{1}{\pi}e^{-k}\operatorname{sh} k\eta\,\frac{\nu+k}{k(k\operatorname{ch}k - \nu\operatorname{sh}k)}. \tag{3.12}$$

Подставляя (3.12) в (3.11) и учитывая (3.5), получаем:

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi}\log\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2} -$$
$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-k}\frac{\operatorname{sh} k\eta\cdot\operatorname{sh} ky}{k\operatorname{ch}k-\nu\operatorname{sh}k}\cdot\frac{\nu+k}{k}\cos k(x-\xi)\,dk\ *. \tag{3.13}$$

Легко видеть, что

$$G(x, y, \xi, \eta) = G(\xi, \eta, x, y),$$

т. е. G — симметричная функция. При $\nu<1$ выражение $k\operatorname{ch}k - \nu\operatorname{sh}k$ имеет единственный действительный корень $k=0$.

При $0\leqslant y\leqslant\eta\leqslant 1$, в силу (3.9), справедливо равенство

$$\log\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2} = -4\int\limits_0^\infty e^{-k\eta}\frac{\operatorname{sh} ky}{k}\cdot\cos k(x-\xi)\,dk.$$

Подставляя это выражение в (3.13), после простых выкладок получим:

$$G(x, y, \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sh} ky}{k}\cdot\frac{k\operatorname{ch}k(1-\eta)-\nu\operatorname{sh}k(1-\eta)}{k\operatorname{ch}k-\nu\operatorname{sh}k}\cos k(x-\xi)\,dk,$$
$$0\leqslant y\leqslant\eta\leqslant 1. \tag{3.14}$$

---

* Построение аналогичной функции Грина в специальном случае $\nu=1$ было сделано в работе [7]; случай $\nu\neq 1$ рассматривался в работе [6].

В дальнейшем нам понадобится также комплексная функция Грина $H(z,\zeta)$,

$$G(x, y, \xi, \eta) = \operatorname{Re} H(z, \zeta). \tag{3.15}$$

Нетрудно проверить, что

$$H(z, \zeta) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin k(z-\xi)}{k} \cdot \frac{k \operatorname{ch} k(1-\eta) - \nu \operatorname{sh} k(1-\eta)}{k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k}. \tag{3.16}$$

Положим в этой формуле $\eta = 1$ и исследуем поведение $H(z, \xi + i)$ при $|x - \xi| \to \infty$.

ЛЕММА 3.1 *$H(z, \xi + i)$ можно разбить на два слагаемых $H_1(z, \xi + i)$ и $H_2(z, \xi + i)$, где $H_2(z, \xi + i) \to 0$, когда $|x - \xi| \to \infty$, а*

$$H_1(z, \xi + i) = \frac{1}{2} \cdot \frac{is}{1-\nu}, \qquad s = \operatorname{sgn}(x - \xi). \tag{3.17}$$

Доказательство. Из (3.16) получаем:

$$H(z, \xi + i) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin k(z-\xi)}{k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k} dk. \tag{3.18}$$

Пусть σ — путь интегрирования, лежащий в нижней полуплоскости и проходящий между точками $k = 0$ и $k = -i\delta$, где $-i\delta$ — первый корень уравнения $k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k = 0$, а $\bar\sigma$ — путь интегрирования, симметричный с σ относительно оси $\operatorname{Im} k = 0$. Заменим в (3.18) $\sin k(z - \xi)$ через показательные функции; тогда

$$H(z, \xi + i) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{e^{ik(z-\xi)} - e^{-ik(z-\xi)}}{k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k} dk. \tag{3.19}$$

Если $x - \xi > 0$, то

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{e^{ik(z-\xi)}}{k \operatorname{sh} k = \nu \operatorname{sh} k} dk = -\frac{1}{4\pi} \int_{\bar\sigma} \frac{e^{ik(z-\xi)}}{k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k} dk + \frac{1}{2} \cdot \frac{i}{1-\nu} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{e^{-ik(z-\xi)}}{k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k} dk + \frac{1}{2} \cdot \frac{i}{1-\nu},$$

и из (3.19) получим:

$$H(z, \xi + i) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{e^{-ik(z-\xi)}}{k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k} dk + \frac{1}{2} \cdot \frac{i}{1-\nu}. \tag{3.20}$$

Аналогично, при $x - \xi < 0$

$$H(z, \xi + i) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{e^{ik(z-\xi)}}{k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k} dk - \frac{1}{2} \cdot \frac{i}{1-\nu}. \tag{3.20'}$$

Формулы (3.20) и (3.20′) можно объединить следующей:

$$H(z, \quad + i) = \frac{s}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{e^{-isk(z-\xi)}}{k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k} + \frac{1}{2} \cdot \frac{is}{1-\nu}, \qquad s = \operatorname{sgn}(x - \xi). \tag{3.21}$$

Положим

$$H_2(z, \xi + i) = -\frac{s}{2\pi}\int\limits_{\sigma} \frac{e^{-isk(z-\xi)}}{k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k}\, dk. \tag{3.22}$$

Очевидно $H_2(z, \xi + i) \to 0$, когда $|x - \xi| \to \infty$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3.1. *Если $f(x)$ — абсолютно интегрируемая функция, то*

$$\theta(x, y) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(x, y, \xi, 1) f(\xi)\, d\xi \tag{3.23}$$

есть гармоническая в полосе $0 < y < 1$ функция, непрерывная на границах полосы и удовлетворяющая граничным условиям (3.1), (3.2).

То, что $\theta(x, y)$ — гармоническая функция и что условие (3.2) удовлетворено, очевидно. Покажем, что $\theta(x, y)$ непрерывна на верхней границе. Из (3.13) имеем:

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi} \log \frac{(x-\xi)^2 + (1-y)^2}{(x-\xi)^2 + (1+y)^2} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-k} \frac{\operatorname{sh} k \cdot \operatorname{sh} ky}{k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k} \cos k(x - \xi)\, dk. \tag{3.24}$$

Выделим не абсолютно сходящуюся часть интеграла в (3.24). Так как

$$\frac{\operatorname{sh} k\,(\nu + k)\, e^{-k}}{k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k} = e^{-k} + \frac{\nu - (\nu + k)\, e^{-2k}}{k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k},$$

то, подставляя это тождество в формулу (3.24) и учитывая (3.9), получим:

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{(x-\xi)^2 + (1-y)^2}{(x-\xi)^2 + (1+y)^2} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} ky}{k} \cdot \frac{\nu - (\nu + k)\, e^{-2k}}{k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k} \cos k(x - \xi)\, dk. \tag{3.25}$$

Интеграл в формуле (3.25) сходится абсолютно и равномерно по x, y, ξ в области $0 \leqslant y \leqslant 1$, $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < \xi < +\infty$ и, следовательно, является непрерывной функцией x, y, ξ в этой области.

Из абсолютной интегрируемости $f(\xi)$ следует, что функция $\theta(x, y)$, определяемая формулой (3.23), будет непрерывной в полосе $0 \leqslant y \leqslant 1$, $-\infty < x < +\infty$.

Докажем, что условие (3.2) также имеет место, т. е. что

$$\lim_{y \to 1-0} \left[\frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} - \nu \theta(x, y)\right] = f(x). \tag{3.26}$$

Образуем функцию

$$U(x, y, \xi) = \frac{\partial G(x, y, \xi, 1)}{\partial y} - \nu G(x, y, \xi, 1).$$

Из (3.14) получим:

$$U(x, y, \xi) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{k \operatorname{ch} ky - \nu \operatorname{sh} ky}{k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k} \cdot \cos k(x-\xi)\, dk. \tag{3.27}$$

Легко вычислить, что

$$\frac{k \operatorname{ch} ky - \nu \operatorname{sh} ky}{k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k} = e^{-k(1-y)} + \frac{(k+\nu)\left[e^{-ky} - e^{-k(2-y)}\right]}{k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k}. \tag{3.28}$$

Подставляя (3.28) в (3.27), найдем:

$$U(x, y, \xi) = -\frac{1}{\pi}\frac{1-y}{(1-y)^2 + (x-\xi)^2} -$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{(k+\nu)\left[e^{-ky} - e^{-k(2-y)}\right]}{k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k} \cos k(x-\xi)\, dk. \tag{3.29}$$

Интеграл в формуле (3.29) сходится абсолютно и равномерно по x, y, ξ в замкнутой области и обращается в нуль при $y = 1$.

Из (3.23), воспользовавшись абсолютной интегрируемостью $f(\xi)$ и равенством (3.29), получим:

$$\lim_{y \to 1-0}\left[\frac{\partial\theta(x, y)}{\partial y} - \nu\,\theta(x, y)\right] = -\lim_{y \to 1-0}\int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, \xi) f(\xi)\, d\xi =$$
$$= \frac{1}{\pi}\lim_{y \to 1-0}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-y}{(1-y)^2 + (x-\xi)^2} f(\xi)\, d\xi +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\lim_{y \to 1}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\int_0^\infty \frac{(k+\nu)\left[e^{-ky} - e^{-k(2-y)}\right]}{k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k} \cos k(x-\xi)\, dk. \tag{3.30}$$

Так как двойной интеграл в правой части (3.30) сходится абсолютно и равномерно, то, переходя к пределу под знаком интеграла, найдем, что он равен нулю.

Легко показать, что

$$\frac{1}{\pi}\lim_{y \to 1-0}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-y}{(1-y)^2 + (x-\xi)^2} f(\xi)\, d\xi = f(x).$$

Мы доказали, таким образом, что граничное условие (3.26) выполняется. Это и завершает доказательство теоремы 3.1.

Пусть $\tau(z)$ — аналитическая функция, для которой $\theta(x, y)$ является действительной частью. Легко видеть что

$$\tau(z) = -\int_{-\infty}^{\infty} H(z, \xi + i) f(\xi)\, d\xi. \tag{3.31}$$

Асимптотические свойства $\tau(z)$ даются следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 3.2. *Если* $f(\xi)$ *нечетна, то* $\tau(z) \to 0$, *когда* $|x| \to \infty$.

Согласно лемме 1,

$$\tau(z) = -\int_{-\infty}^{+\infty} H_2(z, \xi + i) f(\xi)\, d\xi = -\frac{1}{2} i \frac{1}{1-\nu}\left[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\, d\xi - \int_{x}^{\infty} f(\xi)\, d\xi\right],$$

и если воспользоваться абсолютной интегрируемостью и нечетностью $f(\xi)$, то получим:

$$\tau(z) = -\int_{-\infty}^{+\infty} H_2(z, \xi + i) f(\xi)\, d\xi - \frac{i}{1-\nu}\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\, d\xi. \tag{3.32}$$

Так как $H_2 \to 0$, когда $x \to \infty$, то очевидно, что этим же свойством обладает и $\tau(z)$.

§ 4. Свèдение задачи к интегральным уравнениям

Результаты § 2 и 3 позволяют свести задачу к нелинейным интегральным уравнениям. Как было показано в конце § 2, для этого надо определить функцию $\tau(\zeta)$, аналитическую в полосе $0 < \eta < 1$, непрерывную на границах полосы и удовлетворяющую условиям:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \nu\theta = F(\theta, \lambda, \xi, \beta), \quad \eta = 1, \tag{4.1}$$

$$\theta(\xi, 0) = 0, \tag{4.2}$$

$$\lim_{\xi \to -\infty} \tau(\zeta) = 0, \tag{4.3}$$

где β есть функционал

$$\beta = \alpha + \operatorname{Im}\int_{i\beta}^{i-\infty} [e^{i\tau(t)} - 1]\, dt, \tag{4.4}$$

а

$$F(\theta, \lambda, \xi, \beta) = \nu \frac{e^{-3\lambda}\sin\theta - \theta}{\left[1 - \frac{\gamma}{2}\frac{\sin\beta\pi}{\operatorname{ch}\pi\xi + \cos\beta\pi}\right]^2} +$$
$$+ \nu\theta\left[\left(1 - \frac{\gamma}{2}\frac{\sin\beta\pi}{\operatorname{ch}\pi\xi + \cos\beta\pi}\right)^{-2} - 1\right] + \frac{\partial}{\partial\xi}\ln\left[1 - \frac{\gamma}{2}\frac{\sin\beta\pi}{\operatorname{ch}\pi\xi + \cos\beta\pi}\right]. \tag{4.5}$$

Обозначим через $H(y)$ оператор

$$H(y) f = \int_{-\infty}^{\infty} H(x + iy, \xi + i) f(\xi)\, d\xi, \tag{4.6}$$

где

$$H(x + iy, \xi + i) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin k(z - \xi)}{k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k}\, dk. \tag{4.7}$$

Согласно теореме (3.1),

$$\tau(\zeta) = -H(\eta) F(\theta, \lambda, \xi, \beta) \tag{4.8}$$

будет удовлетворять условиям (4.1) и (4.2), а в силу теоремы 3.2,— и условию (4.3). Полагая в (4.8) $\eta = 1$, получим нелинейное интегральное уравнение для предельных значений θ и λ:

$$\theta + i\lambda = -HF(\theta, \lambda, \xi, \beta). \tag{4.9}$$

Здесь введено обозначение:

$$H(1) = H. \tag{4.10}$$

Уравнение (4.9) нужно решить при дополнительном условии (4.4), в котором мы вместо $\tau(\zeta)$ подставим его выражение (4.8) через предельные значения:

$$\beta = \alpha + \operatorname{Im} \int\limits_{i\beta}^{i-\infty} [e^{-iH(\eta)F} - 1]\, d\zeta. \tag{4.11}$$

Мы покажем дальше, что при малых γ система уравнений (4.9), (4.11) разрешима и решение может быть получено методом итераций.

§ 5. Свойства корней уравнения $k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k = 0$

При $\nu < 1$ корни уравнения $k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k = 0$ чисто мнимые. Если $\lambda = -\operatorname{Im} k$ и k — корень уравнения $k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k$, то

$$D(\lambda) = \lambda \cos \lambda - \nu \sin \lambda = 0. \tag{5.1}$$

Свойства корней этого уравнения проще всего исследуются графически. Изобразим на рис. 3 прямую $y = \frac{\lambda}{\nu}$ и кривую $y = \operatorname{tg} \lambda$. Пересечение их дает корни уравнения (5.1). Очевидно

$$n\pi < \lambda_n < \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5.2}$$

Рис. 3

Ясно, что λ_n есть непрерывная функция ν. Особую роль в дальнейшем будет играть корень λ_0. Обозначим его через $\delta(\nu)$. Так как при $\nu < 1$ все корни уравнения (5.1) простые, то

$$D'(\delta) = (1 - \nu) \cos \delta - \delta \sin \delta \neq 0. \tag{5.3}$$

В силу (5.1),

$$\Delta(\nu) = \delta^2 - \nu(1 - \nu) \neq 0, \tag{5.4}$$

и, так как $\Delta(\nu)$ — непрерывная функция ν и $\Delta(0) > 0$,

$$\Delta(\nu) = \delta^2 - \nu(1 - \nu) > 0. \tag{5.5}$$

Покажем, что $\Delta(\nu)$ — убывающая функция от ν. В самом деле,

$$\Delta'(\nu) = 2\delta\delta' - 1 + 2\nu. \tag{5.6}$$

Дифференцируя (5.1) по ν, получим:

$$\delta' \cos \delta - \delta\delta' \sin \delta - \sin \delta - \nu\delta' \cos \delta = 0,$$

так что

$$\delta' = \frac{\sin\delta}{\cos\delta\,(1-\nu) - \delta\sin\delta} = -\frac{\delta}{\Delta(\nu)}. \tag{5.7}$$

Подставляя это выражение в (5.6), найдем:

$$\Delta'(\nu) = -\frac{2\delta^2}{\delta^2 - \nu(1-\nu)} - 1 + 2\nu = -3 + 2\nu - \frac{2\nu(1-\nu)}{\Delta} < 0, \tag{5.8}$$

откуда следует, что $\Delta(\nu)$ — убывающая функция.

§ 6. Свойства оператора *H*

Рассмотрим множество B_1^k нечетных непрерывных на прямой $-\infty < x < +\infty$ функций $\theta(x)$, для которых величина $e^{kx}|\theta(x)|$ ограничена, $k > 0$.

Введя норму

$$\|\theta\|_{B_1^k} = \sup_{-\infty<x<+\infty} e^{kx}|\theta(x)|, \tag{6.1}$$

мы превратим это множество в функциональное пространство Банаха.

Аналогично, обозначим через B_2^k пространство непрерывных четных функций, норма в котором определяется так же, как и в B_1^k:

$$\|\lambda\|_{B_2^k} = \sup e^{kx}|\lambda(x)|. \tag{6.2}$$

Определим пространство B^k, элементами которого являются тройки

$$\omega = \{\theta, \lambda, u\}, \tag{6.3}$$

где $\theta \in B_1^k$, $\lambda \in B_2^k$, u — действительное число и

$$\|\omega\|_{B^k} = \|\theta\|_{B_1^k} + \|\lambda\|_{B_2^k} + |u|.$$

ТЕОРЕМА 6.1. *Оператор* $\operatorname{Re} H$ *ставит в соответствие нечетной абсолютно интегрируемой функции нечетную, а оператор* $\operatorname{Im} H$ — *четную.*

По определению оператора H,

$$Hf = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x+i, \xi+i) f(\xi)\, d\xi, \tag{6.4}$$

где

$$H(x+i, \xi+i) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin k(x-\xi)\cdot \operatorname{ch} k + i \operatorname{sh} k \cdot \cos k(x-\xi)}{k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k}\, dk. \tag{6.5}$$

Обозначим функцию Hf через $\Phi(x)$. Тогда

$$\Phi(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(-x+i, \xi+i) f(\xi)\, d\xi. \tag{6.6}$$

Произведя замену $\xi = -t$ и учитывая нечетность $f(\xi)$, получим:

$$\Phi(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(-x+i, -\xi+i) f(\xi)\, d\xi = -\overline{\Phi}(x),$$

откуда следует, что действительная часть $\Phi(x)$ — нечетная, а мнимая — четная. Это и доказывает теорему.

Согласно лемме 3.1,

$$H(z, \zeta) = H_1(z, \zeta) + H_2(z, \zeta), \tag{6.7}$$

где $H_1(z, \zeta)$ и $H_2(z, \zeta)$ выражаются по формулам (3.17), (3,22). Положим в (6.7) $y = \eta = 1$. Мы получим:

$$H(x+i, \xi+i) = H_1(x+i, \xi+i) + H_2(x+i, \xi+i), \tag{6.8}$$

$$H_1(x+i, \xi+i) = \frac{1}{2}\cdot\frac{is}{1-\nu}, \quad s = \operatorname{sgn}(x-\xi), \tag{6.9}$$

$$H_2(x+i, \xi+i) = -\frac{s}{2\pi}\int\limits_{\sigma}\frac{e^{sk}\cdot e^{-isk(x-\xi)}}{k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k}\,dk. \tag{6.10}$$

Функциям $H_1(x+i, \xi+i)$ и $H_2(x+i, \xi+i)$ соответствуют операторы

$$iSf = \frac{i}{1-\nu}\int\limits_{\infty}^{x} f(t)\,dt, \tag{6.11}$$

$$\Omega f = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} s\left[\int\limits_{\sigma}\frac{e^{sk}\cdot e^{-isk(x-\xi)}}{k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k}\,dk\right] f(\xi)\,d\xi. \tag{6.12}$$

Очевидно,

$$H = \Omega + iS. \tag{6.13}$$

Введем операторы Ω_1 и Ω_2, положив

$$\Omega_1 = \operatorname{Re}\Omega, \quad \Omega_2 = \operatorname{Im}\Omega. \tag{6.14}$$

Из (6.13) имеем:

$$H = \Omega_1 + i(\Omega_2 + S). \tag{6.15}$$

Очевидно, по теореме 6.1, оператор Ω_1 ставит в соответствие нечетной абсолютно интегрируемой функции нечетную, а Ω_2 — четную.

ТЕОРЕМА 6.2. *Если $k > 0$, то оператор S действует из пространства B_1^k в пространство B_2^k.*

Согласно (6.11), для $x > 0$ имеем:

$$|Sf| < \frac{1}{1-\nu}\int\limits_{+\infty}^{x} \|f\|_{B_1^k} e^{-kx}\,dx = \frac{\|f\|_{B_1^k}}{k(1-\nu)}\,e^{-kx}, \tag{6.16}$$

так что $Sf \in B_2^k$ и

$$\|Sf\|_{B_2^k} < \frac{1}{k(1-\nu)}\|f\|_{B_1^k}. \tag{6.17}$$

ТЕОРЕМА 6.3. *Оператор Ω_1 действует из $B_1^{2\delta}$ в B_1^{δ}, а оператор Ω_2 — из $B_1^{2\delta}$ в B_2^{δ}.*

В силу нечетности $\operatorname{Re}\Omega f$ и четности $\operatorname{Im}\Omega f$ можно ограничиться рассмотрением интервала $0 \leqslant x < +\infty$. Из (6.12) получаем:

$$\Omega f = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\left\{-\int_{\sigma}\frac{e^{k}\cdot\exp[-ik(x-\xi)]}{k\operatorname{ch}k-\nu\operatorname{sh}k}\,dk\right\}d\xi +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{x}^{+\infty} f(\xi)\left\{\int_{\sigma}\frac{e^{-k}\cdot\exp[ik(x-\xi)]}{k\operatorname{ch}k-\nu\operatorname{sh}k}\,dk\right\}d\xi. \qquad (6.18)$$

Переставив в формуле (6.18) порядок интегрирования (такая перестановка законна, так как $f(\xi)$ — абсолютно интегрируемая функция, а $e^{k}(k\operatorname{ch}k - \nu\operatorname{sh}k)$ монотонно убывает) и используя нечетность $f(\xi)$, найдем:

$$\Omega f = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma}\frac{\operatorname{ch}(k-ikx)}{k\operatorname{ch}k-\nu\operatorname{sh}k}\int_{x}^{\infty}e^{-ik\xi}f(\xi)\,d\xi - \frac{i}{\pi}\int_{\sigma}\frac{e^{k}\cdot e^{-ikx}}{k\operatorname{ch}k-\nu\operatorname{sh}k}\cdot\int_{0}^{x}\sin\xi f(\xi)\,d\xi. \qquad (6.19)$$

Оценим интеграл

$$I_1 = -\frac{i}{\pi}\int_{\sigma}\frac{e^{k}\cdot e^{-ikx}}{k\operatorname{ch}k-\nu\operatorname{sh}k}\cdot\int_{0}^{x}\sin k\,\xi f(\xi)\,d\xi.$$

Здесь путь интегрирования σ лежит в нижней полуплоскости и проходит между точками $k=0$ и $k=-i\delta$.

Положим

$$B(x,k) = e^{-ikx}\int_{0}^{x}\sin k\,\xi f(\xi)\,d\xi. \qquad (6.20)$$

Пусть $k = \varkappa - i\lambda$; тогда

$$\left|\int_{0}^{x}\sin k\,\xi f(\xi)\,d\xi\right| \leqslant \int_{0}^{x}e^{\lambda\xi}|f(\xi)|\,d\xi \leqslant \|f\|_{B_1^{2\delta}}\int_{0}^{x}e^{\xi(\lambda-2\delta)}\,d\xi, \qquad (21)$$

или

$$\left|\int_{0}^{x}\sin k\,\xi f(\xi)\,d\xi\right| \leqslant \|f\|_{B_1^{2\delta}}\,\frac{\exp(\lambda-2\delta)-1}{\lambda-2\delta} \qquad (6.21)$$

и, следовательно,

$$|B(x,k)| \leqslant \|f\|_{B_1^{2\delta}}\cdot e^{-\lambda x}\,\frac{\exp(\lambda-2\delta)x-1}{\lambda-2\delta}. \qquad (6.22)$$

Мы имеем:

$$I_1 = -\frac{1}{\pi i}\int_{\sigma}\frac{e^{k}B(x,k)}{k\operatorname{ch}k-\nu\operatorname{sh}k}\,dk. \qquad (6.23)$$

Обозначим через σ_n контур, изображенный на рис 4. Интеграл по контуру σ можно заменить интегралом по контуру σ_n, если учесть вычеты в точках $\delta, k_1, k_2, \ldots$. Очевидно,

$$I_1 = -\frac{1}{\pi i}\int_{\sigma_n}\frac{e^{k}B(x,k)}{k\operatorname{ch}k-\nu\operatorname{sh}k}\,dk - 2\sum_{m=0}^{n-1}\frac{e^{k_m}\cdot B(x,k_m)}{k_m\operatorname{sh}k_m+(1-\nu)\operatorname{ch}k_m}, \qquad (6.24)$$

или (так как $k_m \operatorname{ch} k_m - \nu \operatorname{sh} k_m = 0$)

$$I_1 = -\frac{1}{\pi i}\int_{\sigma_n} \frac{e^k B(x, k)}{k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k}\, dk - 2\sum_{m=0}^{n-1} \frac{k_m + \nu}{k_m^2 + \nu(1-\nu)} B(x, k_m). \tag{6.25}$$

Если воспользоваться неравенством (6.22), то легко показать, что интеграл по σ_n стремится к нулю, когда n стремится к бесконечности. Пере-

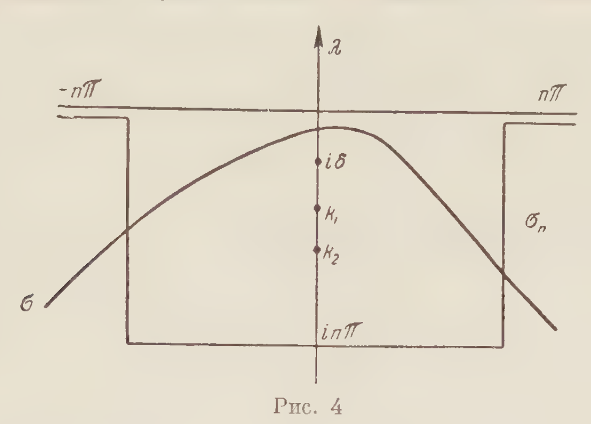


Рис. 4

ходя к пределу в формуле (6.25), получаем:

$$I_1 = -2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{k_m + \nu}{k_m^2 + \nu(1-\nu)} B(x, k_m) = -2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\nu - i\lambda_m}{\nu(1-\nu) - \lambda_m^2} B(x, -i\lambda_m). \tag{6.26}$$

Из (6.22) находим:

$$|B(x, -i\lambda_m)| \leqslant \|f\|_{B_1^{2\delta}} \frac{e^{-2\delta x}}{\lambda_m - 2\delta}, \tag{6.27}$$

$$|B(x, -i\delta)| \leqslant \|f\|_{B_1^{2\delta}} \frac{e^{-\delta x}}{\delta}. \tag{6.28}$$

Подставляя эти оценки в (6.26), получаем:

$$|I_1| < 2e^{-\delta x}\|f\|_{B_1^{2\delta}} \left\{\frac{\nu}{\delta}\cdot\frac{\nu+\delta}{\delta^2 - \nu(1-\nu)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\nu + \lambda_m}{[\lambda_m^2 - \nu(1-\nu)](\lambda_m - 2\delta)}\right. . \tag{6.29}$$

Заметим, что согласно (5.5) $\delta^2 - \nu(1-\nu) > 0$ при $\nu < 1$.

Аналогично оценивается и интеграл

$$I_2 = \int_{\sigma} \frac{\operatorname{ch}(k - ikx)}{k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k} \int_x^{\infty} e^{-ik\xi} f(\xi)\, d\xi. \tag{6.30}$$

Имеем:

$$|I_2| < \|f\|_{B_1^{2\delta}} e^{-\delta x}\left[\frac{\delta+\nu}{\delta^2 - \nu(1-\nu)}\cdot\frac{1}{3\delta} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m + \nu}{\lambda_m^2 - \nu(1-\nu)}\cdot\frac{1}{\lambda_m + 2\delta}\right]. \tag{6.31}$$

Подставляя оценки (6.29) и (6.31) в (6.19), получим:

$$|\Omega f| < \|f\|_{B_1^{2\delta}} e^{-\delta x} b(\nu), \qquad (6.32)$$

где

$$b(\nu) = \frac{7}{3\delta} \cdot \frac{\delta + \nu}{\delta^2 - \nu(1-\nu)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m + \nu}{\lambda_m - \nu(1-\nu)} \left[\frac{2}{\lambda_m - 2\delta} + \frac{1}{\lambda_m + 2\delta}\right]. \qquad (6.33)$$

Из формулы (6.32) непосредственно следует, что

$$\|\Omega_1 f\|_{B_1^{\delta}} < b(\nu) \|f\|_{B_1^{2\delta}}, \qquad (6.34)$$

$$\|\Omega_2 f\|_{B_2^{\delta}} < b(\nu) \|f\|_{B_1^{2\delta}}. \qquad (6.35)$$

Этим теорема 6.3 полностью доказана.

Можно показать, что ряд в формуле (6.33) не превосходит 3. Таким образом,

$$b(\nu) < \frac{7\pi}{3} \cdot \frac{1}{\delta^2 - \nu(1-\nu)} + 3. \qquad (6.36)$$

ТЕОРЕМА 6.4. *Если $f \in B_1^{2\delta}$, то $\tau(z) = H(y) f$ принимает на оси y чисто мнимые значения и существует такая константа $c(\nu)$, что*

$$|\tau(iy)| < c(\nu) \|f\|_{B_1^{2\delta}}. \qquad (6.37)$$

Из формул (4.6), (4.7), вследствие нечетности $f(\xi)$, получаем:

$$\tau(iy) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin k\xi \cdot \operatorname{ch} ky}{k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k} dk\right] d\xi. \qquad (6.38)$$

Отсюда видно, что $\tau(iy)$ принимает чисто мнимые значения.

Если $\xi > 0$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} ky \sin k\xi}{k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k} dk = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{ch} ky \frac{e^{ik\xi} - e^{-ik\xi}}{k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k} dk =$$

$$= \frac{1}{2i} \left[\frac{2\pi i}{1-\nu} - 2 \int_{\sigma} \frac{e^{-ik\xi}}{k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k} dk\right],$$

где σ — путь интегрирования, лежащий в нижней полуплоскости. Подставив это равенство в (6.38), получим:

$$\tau(iy) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(\xi) \left[\int_{\sigma} \frac{e^{-ik\xi} \operatorname{ch} ky}{k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k} dk\right] d\xi. \qquad (6.39)$$

Переставив в последней формуле порядок интегрирования (законность такой перестановки вытекает из рассуждений, аналогичных проведенным выше) и применяя теорию вычетов, найдем:

$$\tau(iy) = -2i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} k_m y}{k_m \operatorname{sh} k_m y + (1-\nu) \operatorname{ch} k_m y} \int_0^{\infty} e^{-ik_m\xi} f(\xi) d\xi. \qquad (6.40)$$

Но

$$\left|\int_0^\infty e^{-ik_m\xi} f(\xi)\,d\xi\right| < \|f\|_{B_1^{2\delta}} \cdot \frac{1}{\lambda_m + 2\delta} \tag{6.41}$$

и

$$\frac{1}{k_m \operatorname{sh} k_m + (1-\nu)\operatorname{ch} k_m} = \frac{\sqrt{\nu^2 + \lambda_m^2}}{\lambda_m^2 - \nu(1-\nu)}. \tag{6.42}$$

Подставляя оценки (6.41) и (6.42) в (6.40), получим:

$$|\tau(iy)| < c(\nu)\|f\|_{B_1^{2\delta}}, \tag{6.43}$$

где

$$c(\nu) = 2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\nu^2+\lambda_m^2}}{\lambda_m^2 - \nu(1-\nu)} \cdot \frac{1}{\lambda_m + 2\delta}. \tag{6.44}$$

Это доказывает теорему 6.4. Можно показать, что

$$c(\nu) < \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\delta^2 - \nu(1-\nu)} + 1. \tag{6.45}$$

§ 7. Теорема существования и единственности

Произведем в уравнениях (4.9) и (4.11) замену

$$\theta = \gamma\tilde\theta, \quad \lambda = \gamma\tilde\lambda, \quad \beta = \alpha + \gamma k. \tag{7.1}$$

Получаем:

$$\tilde\theta + i\tilde\lambda = -H \cdot \frac{1}{\gamma} F(\gamma\tilde\theta, \gamma\tilde\lambda, \alpha + \gamma k), \tag{7.2}$$

$$k = \frac{1}{\gamma}\operatorname{Im}\int_{i(\alpha+\gamma k)}^{i-\infty} [e^{-iH(\eta)\cdot F(\gamma\tilde\theta, \gamma\tilde\lambda, \xi, \alpha+\gamma k)} - 1]\,d\zeta. \tag{7.3}$$

Введем обозначение:

$$\tilde F(\tilde\theta, \tilde\lambda, \xi, k) = \frac{1}{\gamma} F(\gamma\tilde\theta, \gamma\tilde\lambda, \xi, \gamma k + \alpha). \tag{7.4}$$

Тогда из (4.5) имеем:

$$\tilde F(\tilde\theta, \tilde\lambda, \xi, k) = \nu \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{e^{-3\gamma\tilde\lambda}\sin\gamma\tilde\theta - \gamma\tilde\theta}{\left[1 - \frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\sin(\alpha+\gamma k)\pi}{\operatorname{ch}\pi\xi + \cos(\alpha+\gamma k)\pi}\right]^2} +$$

$$+ \nu\theta\left[\left(1 - \frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\sin(\alpha+\gamma k)\pi}{\operatorname{ch}\pi\xi + \cos(\alpha+\gamma k)\pi}\right)^{-2} - 1\right] +$$

$$+ \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin(\alpha+\gamma k)\pi\cdot\operatorname{sh}\pi\xi}{[\operatorname{ch}\pi\xi + \cos(\alpha+\gamma k)\pi]^2}\left[1 - \frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\sin(\alpha+\gamma k)\pi}{\operatorname{ch}\pi\xi + \cos(\alpha+\gamma k)\pi}\right]^{-1}. \tag{7.5}$$

Если, воспользовавшись равенством (6.15), мы отделим в (7.2) действительную и мнимую части, то получим:

$$\tilde\theta = -\Omega_1 \tilde F(\tilde\theta, \tilde\lambda, \xi, k), \tag{7.6}$$

$$\tilde\lambda = -(\Omega_2 + S)\tilde F(\tilde\theta, \tilde\lambda, \xi, k). \tag{7.7}$$

Заметим, что, в силу теоремы 6.4, $H(\eta)F(\widetilde{\theta}, \widetilde{\lambda}, \xi, k)$ принимает чисто мнимые значения, так что равенство (7.3) можно записать в виде:

$$k = -\frac{1}{\gamma}\int\limits_0^\infty e^{\gamma(\Omega_2+S)F(\widetilde{\theta},\widetilde{\lambda},\xi,k)}\cdot\sin\{\gamma\Omega_1 F(\widetilde{\theta}, \widetilde{\lambda}, \xi, k)\}\,d\xi +$$

$$+\frac{1}{\gamma}\int\limits_{\alpha+\gamma k}^1 [e^{-i\gamma H(i\eta)\widetilde{F}(\widetilde{\theta},\widetilde{\lambda},\xi,k)} - 1]\,d\eta. \tag{7.8}$$

Для простоты письма в дальнейшем знак $\sim$ сверху будем опускать.

Обозначим через F нелинейный оператор, ставящий в соответствие элементу $\omega \in B^\delta$ функцию $F(\theta, \lambda, \xi, k)$. Как легко видеть, $F\omega \in B_1^{2\delta}$.

Далее, обозначим через Φ функционал

$$\Phi f = -\frac{1}{\gamma}\int\limits_0^\infty e^{\gamma(\Omega_2+S)f}\cdot\sin\gamma\Omega_1 f\,d\xi + \frac{1}{\gamma}\int\limits_{\alpha+\gamma k}^1 [e^{-i\gamma H(i\eta)f} - 1]\,d\eta. \tag{7.9}$$

Тогда уравнения (7.6), (7.7), (7.9) принимают вид:

$$\theta = -\Omega_1 F\omega, \tag{7.10}$$

$$\lambda = -(\Omega_2 + S)F\omega, \tag{7.11}$$

$$k = \Phi F\omega. \tag{7.12}$$

Так как оператор F действует из B^δ в $B_1^{2\delta}$, а оператор Ω_1 — из $B_1^{2\delta}$ в B_1^δ, то оператор $\Omega_1 F$ действует из B^δ в B_1^δ. Аналогично показывается, что оператор $(\Omega_2 + S)F$ действует из B^δ в B_2^δ.

Обозначим через Ω тройку операторов:

$$\Omega = \{-\Omega_1 F, -(\Omega_2 + S)F, \Phi F\}; \tag{7.13}$$

тогда систему уравнений (7.10) — (7.12) можно записать при помощи одного операторного уравнения

$$\omega = \Omega\omega. \tag{7.14}$$

Очевидно, оператор Ω действует из B^δ в B^δ.

Положим в уравнениях (7.10) — (7.12) $\gamma = 0$. Получаем:

$$\theta_0 = -\Omega_1 F_0(\xi), \tag{7.15}$$

$$\lambda_0 = (\Omega_2 + S)F_0(\xi), \tag{7.16}$$

$$k_0 = -\int\limits_0^\infty \Omega_1 F_0(\xi)\,d\xi - \int\limits_\alpha^1 iH(i\eta)F_0(\xi)\,d\eta, \tag{7.17}$$

где

$$F_0(\xi) = (F\omega)_{\gamma=0} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin\alpha\pi\cdot\sin\pi\xi}{(\operatorname{ch}\pi\xi + \cos\alpha\pi)^2}.$$

ТЕОРЕМА 7.1. *Для любых $0 < \alpha < 1$, $0 < \nu < 1$ можно указать такое γ_0, что для всех $\gamma < \gamma_0$ оператор Ω будет отображать некоторую область пространства B^δ во внутреннюю часть этой области.*

Предварительно докажем ряд лемм.

ЛЕММА 7.1. *Имеют место неравенства:*

$$\begin{gathered}\|\Omega_1 F\omega\|_{B_1^\delta} < b\|F\omega\|_{B_1^{2\delta}},\\ \|(\Omega_2+S)F\omega\|_{B_2^\delta} < \left(b+\frac{1}{2\delta(1-\nu)}\right)\|F\omega\|_{B_1^{2\delta}}.\end{gathered} \tag{7.18}$$

Утверждение леммы следует из неравенств (6.17), (6.34), (6.35).

ЛЕММА 7.2. *Справедливо неравенство:*

$$\|\Phi F\omega\| < \frac{1}{2\gamma\delta} e^{\gamma\left[b+\frac{1}{2\delta(1-\nu)}\right]\|F\omega\|_{B_1^{2\delta}}}\cdot \operatorname{sh}\gamma b\|F\omega\|_{B_1^{2\delta}} + \\ + \frac{1}{\gamma}(1-\alpha-\gamma k)\left[e^{\gamma c\|F\omega\|_{B_1^{2\delta}}}-1\right]. \tag{7.19}$$

Для доказательства леммы 7.2 оценим интегралы, входящие в формулу (7.9). Для первого интеграла имеем:

$$\left|\frac{1}{\gamma}\int_0^\infty e^{\gamma(\Omega_2+S)F\omega}\cdot\sin\gamma\,\Omega_1 F\omega\,d\xi\right| < \\ < \frac{1}{\gamma}\int_0^\infty e^{-2\delta\xi}\cdot\sup\left[e^{2\delta\xi}e^{\gamma(\Omega_2+S)F\omega}\cdot\sin\gamma\,\Omega_1F\omega\right]d\xi < \\ < \frac{1}{2\gamma\delta}e^{\gamma\left[b+\frac{1}{2\delta(1-\nu)}\right]\|F\omega\|_{B_1^{2\delta}}}\cdot\operatorname{sh}\gamma b\|F\omega\|_{B_1^{2\delta}}. \tag{7.20}$$

Для второго интеграла, в силу (6.4), получаем:

$$\left|\frac{1}{\gamma}\int_{\alpha+\gamma k}^1 \left[e^{i\gamma H(i\eta)F\omega}-1\right]d\eta\right| < (1-\alpha-\gamma k)\max\frac{1}{\gamma}\left[e^{\gamma|H(i\eta)F\omega|}-1\right] < \\ < \frac{1}{\gamma}(1-\alpha-\gamma k)\left[e^{\gamma\max|H(i\eta)F\omega|}-1\right] < \\ < \frac{1}{\gamma}(1-\alpha-\gamma k)\left[e^{\gamma c\|F\omega\|_{B_1^{2\delta}}}-1\right]. \tag{7.21}$$

Складывая (7.20) и (7.21), получим оценку (7.19).

В формулы (7.18), (7.19) входит величина $\|F\omega\|_{B_1^{2\delta}}$. Оценим ее. В дальнейшем ради краткости будем писать $\|\theta\|$ вместо $\|\theta\|_{B_1^\delta}$ и $\|\lambda\|$ вместо $\|\lambda\|_{B_2^\delta}$.

Обозначим через $Q(k)$ и $P(k)$ следующие функции:

$$Q(k)=\begin{cases}\sin(\alpha+\gamma k)\pi, & 0<\alpha+\gamma k<\frac{1}{2},\\ \operatorname{tg}(\alpha+\gamma k)\frac{\pi}{2}, & \frac{1}{2}<\alpha+\gamma k<1,\end{cases} \tag{7.22}$$

$$P(k)=\begin{cases}\sin(\alpha+\gamma k)\pi, & 0<\alpha+\gamma k<\frac{1}{2},\\ \operatorname{tg}(\alpha+\gamma k)\frac{\pi}{2}\cdot\sec^2(\alpha+\gamma k)\frac{\pi}{2}, & \frac{1}{2}<\alpha+\gamma k<1.\end{cases} \tag{7.23}$$

Очевидно, $Q(k)$ и $P(k)$ — монотонно возрастающие непрерывные функции.

ЛЕММА 7.3. *Справедливо неравенство:*

$$\| F\omega \|_{B_1^{2\delta}} < \frac{\nu}{\gamma} \cdot \frac{e^{-3\gamma \| \lambda \|} \operatorname{sh} \gamma \| \theta \| - \gamma \| \theta \|}{\left[1 - \frac{\gamma}{2} \cdot Q(k)\right]^2} + \nu \left\{\left[1 - \frac{\gamma}{2} Q(k)\right]^2 - 1\right\} +$$
$$+ \frac{\pi}{2} P(k) \cdot \left[1 - \frac{\gamma}{2} Q(k)\right]^{-1}. \qquad (7.24)$$

Чтобы доказать неравенство (7.24), обратимся к выражению (7.5) для $F\omega$. Оно состоит из трех слагаемых. Оценим первое слагаемое. Заметим, что $e^{-3\gamma\lambda} \sin \gamma\theta - \gamma\theta$ есть аналитическая функция θ и λ, разложение которой начинается с члена $-3\gamma^2\lambda\theta$. Следовательно,

$$\| e^{-3\gamma\lambda} \sin \gamma\theta - \gamma\theta \|_{B_1^{2\delta}} = \sup e^{2\delta\xi} | e^{-3\gamma\lambda} \sin \gamma\theta - \gamma\theta | < e^{3\gamma \| \gamma \|} \operatorname{sh}\gamma \|\theta\| - \gamma \|\theta\|.$$

Если, кроме того, учесть, что

$$\sup \left[1 - \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\sin(\alpha + \gamma k)\pi}{\operatorname{ch} \pi\xi + \cos(\alpha + \gamma k)\pi}\right]^{-2} <$$
$$< \left[1 - \frac{\gamma}{2} \frac{\sin(\alpha + \gamma k)\pi}{1 + \cos(\alpha + \gamma k)\pi}\right]^{-2} < \left[1 - \frac{\gamma}{2} Q(k)\right]^{-2}. \qquad (7.25)$$

то получим:

$$\left\| \frac{\nu}{\gamma} \frac{e^{-3\gamma\lambda} \sin \gamma\theta - \gamma\theta}{\left[1 - \frac{\gamma}{2} \frac{\sin(\alpha + \gamma k)\pi}{\operatorname{ch} \pi\xi + \cos(\alpha + \gamma k)\pi}\right]^2} \right\| < \frac{\nu}{\gamma} \cdot \frac{e^{-3\gamma \| \lambda \|} \operatorname{sh} \gamma \| \theta \| - \gamma \| \theta \|}{\left[1 - \frac{\gamma}{2} Q(k)\right]^2}. \qquad (7.26)$$

Оценим второе слагаемое в (7.5). Обозначим

$$t = \frac{\sin(\alpha + \gamma k)\pi}{\operatorname{ch} \pi\xi + \cos(\alpha + \gamma)\pi};$$

тогда второе слагаемое в (7,5) можно записать в виде:

$$\nu\theta \left[\left(1 - \frac{\gamma}{2} t\right)^{-2} - 1\right] = N. \qquad (7.27)$$

Очевидно,

$$\| N \|_{B_1^{2\delta}} < \nu \| \theta \| \left[\left(1 - \frac{\gamma}{2} \| t \|\right)^{-2} - 1\right]. \qquad (7.28)$$

Оценим $\| t \|$:

$$\| t \|_{B_1^{\delta}} = \sup \frac{e^{\delta\xi}}{\operatorname{ch} \pi\xi} \cdot \frac{\sin(\alpha + \gamma k)\pi}{1 + \cos(\alpha + \gamma k)\pi \cdot \operatorname{ch}^{-1}\pi\xi}. \qquad (7.29)$$

Если учесть, что $\delta < \frac{\pi}{2}$ и что $\cos(\alpha + \gamma k)\pi > 0$ при $\alpha + \gamma k < \frac{1}{2}$ и $\cos(\alpha + \gamma k)\pi < 0$ при $\alpha + \gamma k > \frac{1}{2}$, то получим:

$$\| t \|_{B_1^{\delta}} < Q(k). \qquad (7.30)$$

Таким образом,

$$\| N \|_{B_1^{2\delta}} < \nu \| \theta \| \left\{\left[1 - \frac{\gamma}{2} Q(k)\right]^{-2} - 1\right\}. \qquad (7.31)$$

Аналогично оценивается и последнее слагаемое в (7.5):

$$\left\| \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin(\alpha+\gamma k)\pi \cdot \operatorname{sh}\pi\xi}{[\operatorname{ch}\pi\xi+\cos(\alpha+\gamma k)\pi]^2}\left[1-\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\sin(\alpha+\gamma k)\pi}{\operatorname{ch}\pi\xi+\cos(\alpha+\gamma k)\pi}\right]^{-1}\right\| <$$
$$< \frac{\pi}{2} P\left(1-\frac{\pi}{2}Q\right)^{-1}. \tag{7.32}$$

Складывая оценки (7.26), (7.31), (7.32), получим (7.25). Лемма 7.3 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 7.1.

Обозначим правую часть неравенства (7.24) через $E(\|\theta\|, \|\lambda\|, k)$:

$$\|F\omega\| < E(\|\theta\|, \|\lambda\|, k). \tag{7.33}$$

Возьмем в пространстве B^δ область M:

$$\|\theta\| < A, \quad \|\lambda\| < A, \quad k < K. \tag{7.34}$$

Для того чтобы оператор Ω отображал область M в себя, достаточно, вследствие (7.18), (7.19), (7.33), потребовать, чтобы выполнялись неравенства:

$$\begin{gathered}\left[b+\frac{1}{2\delta(1-\nu)}\right]E(A, A, K) - A = U(A, K) \leqslant 0,\\ \frac{1}{\gamma\delta}e^{\gamma A}\operatorname{sh}\gamma A + \frac{1}{\gamma}(1-\alpha+\gamma K)\left[e^{\gamma c E(A,A,K)}-1\right] - K = V(A, K) \leqslant 0.\end{gathered} \tag{7.35}$$

Отметим, что при $\gamma = 0$ неравенства (7.35) принимают вид:

$$\begin{gathered} A > \left(b+\frac{2}{\delta}\right)\cdot\frac{\pi}{2}P(0) = A_0,\\ K > A_0 + (1-\alpha)c\cdot\frac{\pi}{2}P(0) = K_0.\end{gathered} \tag{7.36}$$

Так как $U(A, K)$ и $V(A, K)$ — непрерывные функции от γ, то, каковы бы ни были $A > A_0$ и $K > K_0$, всегда можно взять γ_0 настолько малым, что при $\gamma < \gamma_0$ неравенства (7.35) будут выполняться. Этим теорема 7.1 доказана.

ТЕОРЕМА 7.2. *Если γ достаточно мало, то оператор Ω дает сжатое отображение в области M.*

Нам нужно показать, что при малых γ в области (7.34) имеет место неравенство

$$\|\Omega\omega - \Omega\omega'\| < l(\gamma)\|\omega-\omega'\|, \quad 0 < l(\gamma) < 1. \tag{7.37}$$

По определению оператора Ω,

$$\|\Omega\omega-\Omega\omega'\|_{B^\delta} = \|\Omega_1[F\omega-F\omega']\|_{B_1^\delta} +$$
$$+\|(\Omega_2+S)[F\omega-F\omega']\| + |\Phi F\omega - \Phi F\omega'|. \tag{7.38}$$

В силу неравенств (7.18),

$$\|\Omega_1(F\omega-F\omega')\|_{B_1^\delta} \leqslant b\|F\omega-F\omega'\|_{B_1^{2\delta}}, \tag{7.39}$$

$$\|(\Omega_2+S)(F\omega-F\omega')\|_{B_2^\delta} \leqslant \left(b+\frac{1}{2\delta(1-\nu)}\right)\|F\omega-F\omega'\|_{B_1^{2\delta}}. \tag{7.40}$$

Оценим $|\Phi f - \Phi f'|$ при $f \in B_1^{2\delta}$.

Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} (\Omega_2 + S) f = u(\xi), \quad & u \in B_2^{\delta}, \\ \Omega_1 f = v(\xi), \quad & v \in B_1^{\delta}, \\ -iH(i\eta) = p(\eta). & \end{aligned}\right\} \tag{7.41}$$

Тогда, вследствие (7.9), можно написать:

$$|\Phi f - \Phi f'| < \frac{1}{\gamma}\left|\int\limits_0^\infty [e^{\gamma u(\xi)} \cdot \operatorname{sh} \gamma v(\xi) - e^{\gamma u'(\xi)} \cdot \sin \gamma v'(\xi)]\, d\xi\right| +$$

$$+ \frac{1}{\gamma}\left|\int\limits_{\alpha+\gamma k}^{1} [e^{\gamma p(\eta)} - e^{\gamma p'(\eta)}]\, d\eta. \tag{7.42}$$

Пусть $\|f\|_{B_1^{2\delta}} < B$; тогда, в силу неравенств (7.41), (7.18) и (6.43), имеем:

$$|u| < bB, \quad |v| < \left(b + \frac{1}{2\delta(1-\nu)}\right) \cdot B, \quad |p| < cB.$$

Применяя к (7.42) формулу конечных приращений, получаем:

$$|\Phi f - \Phi f'| < \left|\int\limits_0^\infty \{e^{\gamma \widetilde{u}(\xi)} \cdot \sin \gamma \widetilde{v}(\xi)\, [u(\xi) - u'(\xi)] +\right.$$

$$\left. + e^{\gamma \widetilde{u}(\xi)} \cos \gamma \widetilde{v}(\xi)\, [v(\xi) - v'(\xi)]\, d\xi + \right| \int\limits_{\alpha+\gamma k} e^{\widetilde{p}(\eta)} [p(\eta) - p'(\eta)]\, d\eta \Bigg|, \tag{7.43}$$

где

$$|\widetilde{u}| < bB,. \quad |\widetilde{v}| < \left[b + \frac{1}{2\delta(1-\nu)}\right] B, \quad |\widetilde{p}| < cB. \tag{7.44}$$

Теперь из (7.43) легко следует такое неравенство:

$$|\Phi f - \Phi f'| < e^{\gamma bB} \cdot \frac{1}{\delta}\{\|u - u'\|_{B_2^{\delta}} + \|v - v'\|_{B_1^{\delta}} +$$

$$+ (1 - \alpha + \gamma K) \max |p - p'|\}. \tag{7.45}$$

Но из (7.41), вследствие (7.18) и (6.43), имеем:

$$\left.\begin{aligned} \|u - u'\|_{B_2^{\delta}} < \left[b + \frac{1}{2\delta(1-\nu)}\right] \|f - f'\|_{B_1^{2\delta}}, \\ \|v - v'\|_{B_2^{\delta}} < b\,\|f - f'\|_{B_1^{2\delta}}, \\ \max |p(\eta) - p'(\eta)| < c\,\|f - f'\|_{B_1^{2\delta}}. \end{aligned}\right\} \tag{7.46}$$

Подставляя неравенства (7.41) в (7.45), получим:

$$|\Phi f - \Phi f'| < \left[e^{\gamma bB} \cdot \frac{1}{\delta}\left\{2b + \frac{1}{2\delta(1-\nu)}\right\} + (1 - \alpha + \gamma K)c\right] \|f - f\|_{B_1^{2\delta}}. \tag{7.47}$$

Далее, подставляя в (7.47) вместо f $F\omega$ и учитывая (7.33), находим:

$$|\Phi F\omega - \Phi F\omega'| <$$

$$< \left[e^{\gamma b E(A,A,K)} \left\{ 2b + \frac{1}{2\delta(1-\nu)} \right\} + (1-\alpha+\gamma K)c \right] \| F\omega - F\omega' \|_{B_1^{2\delta}}. \quad (7.48)$$

Складывая неравенства (7.39), (7.40) и (7.48), получаем:

$$\| \Omega\omega - \Omega\omega' \| \leqslant G \| F\omega - F\omega' \|_{B_1^{2\delta}}, \quad (7.49)$$

где

$$G(\gamma,\nu) = \left(2b + \frac{1}{2\delta(1-\nu)}\right)\left(1 + \frac{1}{\delta} e^{\gamma b E(A,A,K)}\right) + (1-\alpha+\gamma K)c. \quad (7.50)$$

Нам нужно теперь оценить $\| F\omega - F\omega' \|$. Применяя снова формулу конечных приращений, находим;

$$F\omega - F\omega' = \frac{\partial F(\tilde\theta, \tilde\lambda, \tilde k)}{\partial \theta}(\theta-\theta') + \frac{\partial F(\tilde\theta, \tilde\lambda, \tilde k)}{\partial \lambda}(\lambda-\lambda') + \frac{\partial F(\tilde\theta, \tilde\lambda, \tilde k)}{\partial k}(k-k'), \quad (7.51)$$

где $|\tilde\theta| < A$, $|\tilde\lambda| < A$, $k < K$. Оценки, совершенно аналогичные тем, которые проводились при доказательстве леммы 7.3, показывают, что

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta-\theta') \right\|_{B_1^{2\delta}} < \| \theta-\theta' \|_{B_1^{\delta}} \cdot \Gamma_1(\gamma, A, K), \quad (7.52)$$

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda-\lambda') \right\|_{B_1^{2\delta}} < \| \lambda-\lambda' \|_{B_2^{\delta}} \cdot \Gamma_2(\gamma, A, K), \quad (7.53)$$

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial k}(k-k') \right\|_{B_1^{2\delta}} < | k-k' | \cdot \Gamma_3(\gamma, A, K), \quad (7.54)$$

где

$$\Gamma_1 = \nu \frac{e^{3\gamma A} \cdot \mathrm{ch}\,\gamma A - 1}{\left[1 - \frac{\gamma}{2} Q(K)\right]^2} + \nu \left\{ \left[1 - \frac{\gamma}{2} Q(K)\right]^{-2} - 1 \right\}, \quad (7.55)$$

$$\Gamma_2 = 3\nu \frac{e^{3\gamma A} \cdot \mathrm{sh}\,\gamma A}{\left[1 - \frac{\gamma}{2} Q(K)\right]^2}, \quad (7.56)$$

$$\Gamma_3 = \gamma\pi\nu \frac{e^{3\gamma A} \cdot \mathrm{sh}\,\gamma A}{\left[1 - \frac{\gamma}{2} Q(K)\right]^3} P(K) + \frac{\gamma\pi^2}{2} [P(K)Q(K) + R^3(K)] \cdot$$

$$\cdot \left[1 - \frac{\gamma}{2} Q(K)\right]^{-2} + \frac{\gamma^2\pi^2}{4} P(K) \left[1 - \frac{\gamma}{2} Q(K)\right]^{-2} R^2(K). \quad (7.57)$$

Здесь

$$R(K) = \begin{cases} 1, & \alpha + \gamma K < \frac{1}{2}, \\ [1 + \cos(\alpha+\gamma K)\pi]^{-1}, & \alpha+\gamma K > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Очевидно, $R(K)$ — непрерывная монотонная возрастающая функция. Легко видеть, что при $\gamma = 0$ Γ_1, Γ_2 и Γ_3 обращаются в нуль.

Складывая неравенства (7.24), (7.54) и подставляя в (7.49), получаем:

$$\| \Omega\omega - \Omega\omega' \| < G \{\Gamma_1 \| \theta - \theta' \| + \Gamma_2 \| \lambda - \lambda' \| + \Gamma_3 | k - k' |\}. \tag{7.58}$$

Очевидно, $G\Gamma_1$, $G\Gamma_2$, $G\Gamma_3$— непрерывные функции от γ, обращающиеся в нуль, когда $\gamma = 0$. Если γ достаточно мало, то существует такая константа $l < 1$, что

$$G\Gamma_1 < l, \quad G\Gamma_2 < l, \quad G\Gamma_3 < l \tag{7.59}$$

и, следовательно,

$$\| \Omega\omega - \Omega\omega' \| < l \| \omega - \omega' \|. \tag{7.60}$$

Таким образом, оператор Ω дает сжатое отображение. Итак, решение уравнения

$$\omega = \Omega\omega \tag{7.61}$$

существует, единственно и может быть получено методом итераций.

Легко показать, что решение уравнения (7.61) должно быть аналитическим по γ. В самом деле, начнем процесс итераций с аналитической функции γ. Тогда, как легко убедиться, каждая итерация будет аналитической функцией γ. Следовательно, и предельная функция будет аналитической.

Мы искали решение уравнения (7.61) в пространстве B^δ и показали, что оно должно быть аналитической функцией γ. Легко показать и обратное, т. е. что если решение — аналитическая функция γ, то оно обязательно принадлежит B^δ.

Сформулируем окончательный результат: решение задачи об обтекании вихря потоком жидкости, имеющим конечную толщину H и скорость c на бесконечности, существует и единственно, если скорость больше критической ($c^2 > gH$), а отношение циркуляции Γ к cH достаточно мало.

В заключение приношу благодарность Н. Н. Моисееву за ценные советы и указания.

Поступило
16. III.1957

ЛИТЕРАТУРА

1 Келдыш М. В., Замечания о некоторых движениях тяжелой жидкости, Технические заметки ЦАГИ, вып. 52 (1935), 5—9.

2 Келдыш М. В., Лаврентьев М. А., О движении крыла над поверхностью тяжелой жидкости, Труды конференции по теории волнового сопротивления, ЦАГИ, 1937.

3 Кочин Н. Е., О волновом сопротивлении погруженных в жидкость тел, Соч., т. III, Гостехиздат, 1948.

4 Лаврентьев М. А., До теорії довгих хвиль, Збірник Прадь інституту Математики Академії наук УССР, № 8(1946), 13—69.

5 Friedrichs K. and Hyers D., The existence of solitary wave, Communications on pure and appl. Mathem., v. 7, № 3 (1954), 517—550.

6 Хаскинд М. Д., О поступательном движении тел под свободной поверхностью жидкости конечной глубины, Прикладная математика и механика, 9, вып. 1 (1945), 67—78.

7 John F., On the motion of floating bodies. II: appendix, Communication on pure and appl. mathem., v. 3 (1950), 92—100.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 201—242

А. Ф. ЛЕОНТЬЕВ

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ ЛИНЕЙНЫХ АГРЕГАТОВ, ОБРАЗОВАННЫХ ИЗ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(*Представлено академиком* **М. А. Лаврентьевым**)

В работе изучаются последовательности линейных агрегатов, составленных из решений $y_k(z,\lambda_n)$ $(k=1,2,\ldots, s,\ n=1,2,\ldots)$ дифференциальных уравнений

$$Q_0(z)\,y^{(s)}+\ldots+Q_s(z)\,y=\lambda_n y,\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{n}{|\lambda_n|^{\frac{1}{s}}}<\infty,$$

где $Q_0(z),\ldots, Q_s(z)$ — некоторые аналитические функции. На эти последовательности переносится ряд известных свойств рядов Тейлора, рядов Дирихле и последовательностей полиномов Дирихле.

Введение

За последние десять лет в ряде работ [см. обзорные доклады ([1]) и ([2])] изучались последовательности полиномов Дирихле

$$P_n(z)=\sum_{j=1}^{p_n}(a_{nj}e^{\lambda_j z}+b_{nj}e^{-\lambda_j z}),\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{n}{|\lambda_n|}=\tilde{\sigma}<\infty,$$

сходящиеся в области, в которой система $\{e^{\pm\lambda_j z}\}$ не является полной. Было показано, что эти последовательности обладают многими свойствами рядов Тейлора и рядов Дирихле. Метод исследования основывался в существенных чертах на рассмотрении уравнения

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n y^{(n)}(z)=0,\tag{1}$$

в котором постоянные коэффициенты a_n таковы, что характеристическая функция

$$L(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

является целой функцией экспоненциального типа, обращающейся в нуль в точках $\pm\lambda_j\ (j=1,2,\ldots)$ [по поводу уравнения (1), кроме указанных выше докладов, см. также обзорную статью ([3])]. Функции $e^{\pm\lambda_j z}$, из которых составлены агрегаты $P_n(z)$, являются частными решениями уравнения (1); они, кроме того, удовлетворяют уравнениям

$$y''=\lambda_j^2 y.\tag{2}$$

В настоящей работе вместо последовательностей полиномов Дирихле, составленных из решений уравнений (2), рассматриваются более общие последовательности — последовательности линейных агрегатов, составленных из решений $y_k(z,\lambda_j)$ $(k=1,2,\ldots,s,\ j=1,2,\ldots)$ уравнений

$$Dy \equiv \sum_{k=0}^{s} Q_k(z)\, y^{(s-k)}(z) = \lambda_j y, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|^{\frac{1}{s}}} = \tau < \infty, \tag{3}$$

где $Q_0(z), \ldots, Q_s(z)$ — произвольные аналитические функции, а λ_j $(j = 1,2,\ldots)$ — вообще комплексные числа. По аналогии с предыдущим, метод исследования таких последовательностей основывается в существенных чертах на рассмотрении уравнения

$$M(y) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k y = 0, \tag{4}$$

где a_k — постоянные, $D^0 = 1$ и $D^k = D(D^{k-1})$. При подходящем подборе коэффициентов a_k функции $y_k(z,\lambda_j)$ при любых $k = 1,2,\ldots s$, $j = 1,2,\ldots$ удовлетворяют уравнению (4).

Отметим, что частными случаями уравнений (3) являются уравнения полиномов Якоби (в частности, полиномов Лежандра), полиномов Чебышева — Лагерра, полиномов Чебышева — Эрмита, уравнения цилиндрических функций. Поэтому наши результаты охватывают, в частности, последовательности агрегатов, составленных из полиномов Якоби, полиномов Чебышева — Лагерра, полиномов Чебышева — Эрмита и цилиндрических функций.

Уравнение формы (4) рассматривалось некоторыми авторами. Е. Хилл ([4]) воспользовался таким уравнением в случае

$$D \equiv z^2 - \frac{d^2}{dz^2}$$

для изучения лакунарных рядов по полиномам Чебышева — Эрмита. Он же в работе ([5]) для того же случая исследовал, какими должны быть коэффициенты a_k для того, чтобы оператор $M(y)$ можно было применить к любой функции $y(z)$ из того или иного класса аналитических функций. В. Климчак ([6]) рассмотрел уравнение (4) в общем случае с той же точки зрения, что и Е. Хилл в работе ([5]), именно, он изучил, в каких условиях, наложенных на a_k, оператор $M(y)$ будет применим к функциям из того или иного класса. Главный результат Климчака состоит в следующем: для того чтобы оператор $M(y)$ был применим (иными словами, чтобы ряд $\sum\limits_{0}^{\infty} a_k D^k y$ сходился) к любой аналитической функции в любой ее точке регулярности, необходимо и достаточно, чтобы характеристическая функция

$$L(z) = \sum_{0}^{\infty} a_k z^k$$

была в смысле роста самое большее целой функцией порядка $\frac{1}{s}$ минимального типа.

В работе ([7]) изучались последовательности линейных агрегатов, составленных из функций $f(\lambda_j z)$ $(j = 1, 2, \ldots)$, где

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{P(1)\,P(2)\ldots P(n)},$$

$P(x) = \alpha_s x^s + \ldots + \alpha_1 x$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — комплексные числа такие, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|^{\frac{1}{s}}} < \infty,$$

причем при исследовании было использовано уравнение (4) с

$$Dy \equiv \sum_{k=1}^{s} \frac{\Delta_k}{k!} z^{k-1} y^{(k)}(z), \tag{5}$$

где Δ_k находились из разложения

$$P(x) = \sum_{k=1}^{s} \frac{\Delta_k}{k!} x(x-1)\ldots(x-k+1).$$

При таком составе Dy функции $f(\lambda_j z)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ являются решениями уравнения (4). Отметим, что если $P(x) \equiv x$, то $f(z) = e^z$, $Dy \equiv y'$ и уравнение (4) переходит в уравнение (1). В указанной работе ([7]) уравнение (4) в частном случае (5) использовалось для изучения последовательностей соответствующих линейных агрегатов аналогично тому, как уравнение (1) использовалось для изучения последовательностей полиномов Дирихле, например, в работе ([8]). Таким же образом в настоящей работе уравнение (4) будет использовано в общем случае.

§ 1. Оценка $D^k y$

Нижеследующее предложение, установленное в работе ([6]), дает оценку для $D^k y$, которой в дальнейшем мы будем пользоваться.

ЛЕММА 1. *Пусть функция* $y(z)$ *и коэффициенты* $Q_j(z)$ *оператора*

$$Dy \equiv \sum_{j=0}^{s} Q_j(z)\, y^{(s-j)}(z)$$

регулярны в круге радиуса r *с центром в точке* z, *и пусть* $M(r, y)$ *и* $M(r, Q_j)$ — *максимумы модулей функций* $y(z)$ *и* $Q_j(z)$ *в этом круге. Тогда в точке* z *имеет место оценка*

$$|D^k y| < \left(\frac{k}{r}\right)^{sk} A_k^k M(r, y), \tag{1}$$

где

$$A_k = \sum_{j=0}^{s} (s-j)! \left(\frac{r}{k}\right)^j M(r, Q_j). \tag{2}$$

Чтобы доказать эту лемму, заметим, что для всех ξ из круга $|\xi - z| \leqslant \leqslant r - \frac{r}{k}$, по формуле Коши, мы имеем:

$$Dy(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t-\xi| = \frac{r}{k}} \left[\sum_{j=0}^{s} (s-j)!\,(t-\xi)^j Q_j(\xi)\right] \frac{y(t)}{(t-\xi)^{s+1}}\,dt,$$

откуда

$$|Dy(\xi)| \leqslant \left(\frac{k}{r}\right)^s A_k M(r,y) = B.$$

Таким образом, в круге $|\xi - z| \leqslant r - \frac{r}{k}$ функция $Dy(\xi)$ не превосходит величины B, а функции $Q_j(\xi)$ — прежних величин $M(r, Q_j)$. Имея это в виду и повторив предыдущую выкладку, получим, следовательно, что в круге $|\xi - z| \leqslant r - 2\frac{r}{k}$

$$|D^2 y(\xi) = D[Dy(\xi)]| \leqslant \left(\frac{k}{r}\right)^{2s} A_k^2 M(r,y).$$

Через k шагов мы придем к оценке (1).

Отметим, что в достаточно малой окрестности точки z при фиксированном r и больших k

$$A_k = s!\ M(r, Q_0) + \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k \to 0 \text{ при } k \to \infty. \tag{3}$$

Таким образом, из всех коэффициентов $Q_j(z)$ $(j = 0, 1, 2, \ldots s)$ на указанную оценку $D^k y$ влияет только коэффициент $Q_0(z)$ при старшей производной в выражении для Dy.

Укажем теперь оценки для $D^k y$ при больших $|z|$.

ЛЕММА 2. *Если $y(z)$ и $Q_j(z)$ $(j = 0, 1, \ldots, s)$ регулярны в угле*

$$\varphi_1 \leqslant \arg z \leqslant \varphi_2, \quad |z| \geqslant R, \tag{4}$$

и в этом угле

$$|Q_j(z)| < K |z|^{s-j} \quad (j = 0, 1, \ldots s), \tag{5}$$

где K — некоторая постоянная, то в меньшем угле $\varphi_1 + \varepsilon \leqslant \arg z \leqslant \varphi_2 - \varepsilon$ $\varepsilon > 0$, при больших $|z|$

$$|D^k y| < \beta^k k^{sk} M(r,y), \tag{6}$$

где β — постоянная и $r = |z| \sin \varepsilon$.

Для доказательства воспользуемся оценкой (1), которую нам удобнее сейчас представить в виде:

$$|D^k y| \leqslant k^{sk} \left[\sum_{j=0}^{s} (s-j)!\ \frac{M(r, Q_j)}{k^j r^{s-j}}\right]^k M(r, y). \tag{7}$$

Пусть z находится в меньшем из указанных в лемме углов. Для такого z расстояние до границы угла (4) не меньше $|z| \sin \varepsilon$. По этой причине в неравенстве (7) будем считать $r = |z| \sin \varepsilon$. Заметим, что если точка ξ лежит в круге $|\xi - z| \leqslant r$, то

$$|\xi| \leqslant (1 + \sin \varepsilon) |z|.$$

Имея это в виду, в силу условия (5), получим при больших $|z|$:

$$\frac{M(r, Q_j)}{r^{s-j}} < \alpha = \text{const},$$

откуда, учитывая (7), и следует неравенство (6).

ЛЕММА 3. *Пусть $y(z)$ и $Q_j(z)$ $(j = 0, 1, \ldots, s)$ регулярны в бесконечном канале, описываемом кругом постоянного радиуса R при движении его центра вдоль некоторой кривой Γ, уходящей в бесконечность, причем в этом канале функции $Q_j(z)$ $(j = 0, 1, \ldots, s)$ по модулю ограничены. Тогда в меньшем канале, описываемом кругом радиуса $\rho < R$ при движении его центра вдоль указанной кривой*

$$|D^k y| < \beta^k k^{sk} M(r, y),$$

где β и r — постоянные и $r = R - \rho$.

Эта лемма сразу вытекает из неравенства (1), если заметить, что величины A_k в меньшем канале ограничены.

§ 2. Оператор $M(y)$ и его свойства

Рассмотрим оператор

$$M(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k y = a_0 y + a_1 Dy + \cdots, \tag{1}$$

о котором говорилось во введении. Предположим, что функция

$$L(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

которую будем называть характеристической функцией, принадлежит классу $\left[\frac{1}{s}, \sigma\right]$, т. е. растет не быстрее целой функции порядка $\frac{1}{s}$ типа σ. Тогда ее коэффициенты должны удовлетворять неравенству

$$|a_k| < \left(\frac{\sigma e + \varepsilon}{ks}\right)^{ks}, \quad k > N(\varepsilon), \quad \varepsilon > 0.$$

На основании этого, приняв во внимание лемму 1 и соотношение (3) из § 1, получим:

$$|a_k D^k y| < (q + \varepsilon)^k M(r, y), \quad k > N_1(\varepsilon), \tag{2}$$

где

$$q = q(z) = \left(\frac{\sigma e}{rs}\right)^s s!\, M(r, Q_0).$$

Отсюда видно, что если $q < 1$, то ряд (1) сходится; следовательно, оператор $M(y)$ в точке z определен. При $\sigma = 0$ имеем $q = 0$. Значит, при $\sigma = 0$ оператор $M(y)$ определен в каждой точке z, в которой $y(z)$ и

$Q_j(z)$ $(j=0, 1, \ldots, s)$ регулярны. Если $\sigma > 0$, то, для того чтобы было $q(z) < 1$, надо, чтобы радиус r того круга с центром в точке z, в котором $y(z)$ и $Q_j(z)$ $(j=0, 1, \ldots, s)$ регулярны, был больше некоторой величины. При изменении z этот радиус вообще меняется. Так, если $Q_0(z)$ — многочлен, то при удалении z от начала величина $M(r, Q_0)$ — максимум модуля $Q_0(\zeta)$ в круге $|\zeta - z| \leqslant r$ — растет, а значит, по мере удаления от начала должен расти и радиус r. В том частном случае, когда, например, $Q_0(z) \equiv 1$, имеем:

$$q = s!\left(\frac{\sigma e}{rs}\right)^s,$$

так что для соблюдения условия $q < 1$ надо, чтобы было:

$$r > \frac{e\sigma}{s}(s!)^{\frac{1}{s}} = \mu.$$

Правая часть здесь не зависит от z и, следовательно, радиус r можно считать одним и тем же во всех точках z.

В дальнейшем оператор $M(y)$ мы будем рассматривать только в таких точках z, в которых $q(z) < 1$. Этот оператор мы иногда будем обозначать через $L(D)\,y$, имея в виду, что $L(z)$ — характеристическая функция.

Заметим, что в достаточно малой окрестности каждой точки, в которой $q(z) < 1$, согласно неравенству (2) имеем:

$$|M(y)| < KM(r, y), \tag{3}$$

где в указанной окрестности величина K — постоянная, не зависящая от функции $y(z)$.

Из оценки (3) и самого вида (1) оператора $M(y)$ вытекают следующие необходимые для дальнейшего свойства оператора $M(y)$ (при этом мы будем всегда подразумевать, что функции $y(z)$ и $Q_j(z)$ регулярны в кругах радиуса r с центрами в рассматриваемых точках z, причем в этих точках выполняется условие $q(z) < 1$):

1) $M(y_1 + y_2) = M(y_1) + M(y_2)$.

2) $M(cy) = cM(y)$.

3) Если в круге $|\zeta - z| \leqslant r$ равномерно $y_n(\zeta) \to y(\zeta)$ (причем r таково, что $q(z) < 1$), то в достаточно малой окрестности точки z равномерно $M(y_n) \to M(y)$.

4) Пусть $L_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — целые функции, удовлетворяющие условиям:

a) в любой ограниченной области последовательность $\{L_n(z)\}$ сходится,

b) при $|z| > r_0(\varepsilon)$, где $r_0(\varepsilon)$ не зависит от n,

$$|L_n(z)| < e^{(\sigma+\varepsilon)|z|^\rho}, \quad \rho = \frac{1}{s}.$$

Тогда в достаточно малой окрестности каждой точки z, в которой $q(z) < 1$, равномерно сходится последовательность $\{L_n(D)\,y\}$, причем если

$$\lim_{n\to\infty} L_n(z) = 1,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} L_n(D)\, y = y(z).$$

5) Если $R(z)$ — многочлен, то

$$\{R(D)\, L(D)\}\, y = R(D)\, \{L(D)\, y\};$$

иными словами, оператор, порожденный произведением функций, равен произведению операторов.

6) Если $y(z)$ есть решение уравнения

$$Dy \equiv \sum_{j=0}^{s} Q_j(z)\, y^{(s-j)}(z) = \lambda y,$$

где λ — параметр, то

$$L(D)\, y = L(\lambda)\, y(z).$$

§ 3. Решение уравнения $M(y) = 0$

В соответствии с предыдущим будем считать, что характеристическая функция $L(z)$ принадлежит классу $\left[\frac{1}{s}, \sigma_1\right]$. Кроме того, будем считать, что $s \geqslant 2$ (случай $s = 1$ требует особого рассмотрения). Таким образом, мы предполагаем, что $L(z)$ — целая функция порядка, меньшего единицы. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ отличные от начала нули $L(z)$ (каждый нуль выписываем столько раз, какова его кратность); они, как известно, удовлетворяют условию

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^{\frac{1}{s}}} \leqslant \left(\frac{\sigma_1 e}{s}\right) = \tau. \tag{1}$$

При $s \geqslant 2$ функция $L(z)$ представится в виде

$$L(z) = z^p \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right), \qquad p \geqslant 0. \tag{2}$$

Положим

$$L_{1,n}(z) = z^p \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{\lambda_j}\right), \quad L_{n+1,\infty}(z) = \prod_{j=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_j}\right).$$

Имеем [см., например, ([8]), стр. 25]:

$$|L_{n+1,\infty}(z)| \leqslant \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{|z|}{|\lambda_j|}\right) < \exp\left[(\sigma + \varepsilon)\, |z|^{\frac{1}{s}}\right], \quad |z| > r_0(\varepsilon), \tag{3}$$

где $\sigma = \dfrac{\pi\tau}{\sin\frac{\pi}{s}}$ и величина τ взята из соотношения (1).

Допустим, что функция $y(z)$ удовлетворяет уравнению

$$M(y) = 0. \tag{4}$$

Мы предположим, что имеется такая точка z_0 и такой круг $|z-z_0|\leqslant r$, что $y(z)$ и $Q_j(z)\,(j=0, 1, \ldots, s)$ в этом круге регулярны и величина

$$q=q(z_0)=s!\left(\frac{\sigma e}{rs}\right)^s M(r, Q_0)<1.$$

Связное множество точек z_0 указанного вида обозначим через D. Множество D — открытое. В случае $\sigma_1=0$ множество D совпадает с областью существования, если из нее выкинуть особые точки $Q_j(z)$ функции $y(z)$. В дальнейшем речь будет идти о форме решения $y(z)$ уравнения (4) в области D.

В области D, согласно свойству 5) оператора, имеем:

$$M(y)=M_{1,\,n}\{M_{n+1,\,\infty}(y)\}=0,$$

где

$$M_{1,\,n}=L_{1,\,n}(D), \quad M_{n+1,\,\infty}=L_{n+1,\,\infty}(D).$$

Отсюда заключаем, что функция $M_{n+1,\,\infty}(y)$ удовлетворяет уравнению

$$M_{1,\,n}(f)=0, \tag{5}$$

которое, следовательно, нам нужно решить. Допустим сперва, что в представлении (2) нули $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ все различные и $p\leqslant 1$. Обозначим через $y_k(z, \lambda)\,(k=1, 2, \ldots, s)$ линейно независимые решения уравнения

$$Dy\equiv\sum_{j=0}^{s} Q_j(z)\,y^{(s-j)}(z)=\lambda y.$$

Согласно свойству 6) оператора, имеем:

$$M_{1,\,n}[y_k(z, \lambda)]=L_{1,\,n}(\lambda)\,y_k(z, \lambda). \tag{6}$$

Отсюда видно, что $y_k(z, \lambda_0)\,(\lambda_0=0)$ при $p>0$ и $y_k(z, \lambda_j)\,(j=1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют уравнению (5). Всего, таким образом, мы имеем $(n+1)s$ (при $p=1$) и ns (при $p=0$) линейно независимых решений уравнения (5), которое является обыкновенным линейным дифференциальным уравнением порядка $(n+1)s$ (при $p=1$) и порядка ns (при $p=0$). Следовательно, указанные решения образуют фундаментальную систему. Значит, функция $M_{n+1,\,\infty}(y)$ как решение уравнения (5) имеет вид:

$$M_{n+1,\,\infty}(y)=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{s}\alpha_{nj}^{(k)}y_k(z, \lambda_j),$$

где $\alpha_{nj}^{(k)}$ — некоторые постоянные.

Воспользуемся свойством 4) оператора, приняв во внимание условие (3) и то, что

$$\lim_{n\to\infty} L_{n+1,\,\infty}(z)=1.$$

Согласно этому свойству (равномерно на любом ограниченном замкнутом множестве $F\subset D$),

$$\lim_{n\to\infty} M_{n+1,\,\infty}(y)=y(z)$$

и, таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 1. *В случае простых нулей характеристической функции* $L(z)$ *решение* $y(z)$ *уравнения* (4) *имеет в области* D *вид:*

$$y(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=1}^{s} \alpha_{nj}^{(k)} y_k(z, \lambda_j). \tag{7}$$

Рассмотрим теперь случай, когда некоторые из нулей $L(z)$ являются кратными. Пусть, например, λ_j — нуль $L(z)$ кратности μ. Возьмем тождество (6) при $n > j$. Дифференцируя его ν раз по λ, получим:

$$M_{1, n}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda^\nu} y_k(z, \lambda)\right] = \frac{\partial}{\partial\lambda^\nu}[L_{1, n}(\lambda)\, y_k(z, \lambda)].$$

Правая часть равна нулю при $\nu < \mu$ и $\lambda = \lambda_j$. Следовательно, уравнение (5) имеет μs решений

$$\frac{\partial}{\partial\lambda^\nu} y_k(z, \lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_j} \quad \left(k = 1, 2, \ldots, s, \quad \nu = 0, 1, \ldots, \mu - 1\right), \tag{8}$$

соответствующих корню λ_j функции $L(z)$ кратности μ. Такого рода решений будет столько, каков порядок уравнения (5). Решение $M_{n+1, \infty}(y)$ уравнения (5) выразится линейно через эти частные решения и, следовательно, применяя дальше рассуждения, аналогичные проведенным для предыдущего случая, мы в результате придем к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. *Решение уравнения* (4) *в области* D *представляется в форме предела последовательности линейных агрегатов, образованных из частных решений вида* (8).

§ 4. Основное свойство области D

Отметим одно очень важное свойство области D. Обозначим через E множество, состоящее из нулей коэффициента $Q_0(z)$ и особых точек $Q_j(z)$ ($j = 0, 1, \ldots, s$). Вне E частные решения (8) из предыдущего параграфа регулярны. Пусть C — замкнутый контур, целиком лежащий в D, и пусть внутри C нет точек из множества E. Согласно теоремам 1 и 2, на контуре C решение $y(z)$ представляется в форме предела равномерно сходящейся последовательности линейных агрегатов, образованных из частных решений, которые, в силу предположения, являются регулярными внутри C. Следовательно, решение $y(z)$ регулярно внутри C и внутренность C принадлежит области D. Таким образом, нами доказана

ТЕОРЕМА 3. *Если области* D *принадлежит замкнутый контур* C *и внутри* C *нет точек из множества* E, *то области* D *принадлежит и внутренность контура* C.

Следствие. *При* $\sigma_1 = 0$ *представление* (7) *из* § 3 (*или ему подобное в случае кратных нулей*) *имеет место во всей области существования решения* $y(z)$ *уравнения* (4), *исключая, быть может, точки множества* E. *Область существования, если в ней нет точек из множества* E (*это, в частности, будет, если* $Q_j(z)$ ($j = 0, 1, \ldots, s$) — *целые функции и* $Q_0(z)$ *не имеет нулей*), *является односвязной.*

Из теоремы 3 вытекает, что если $y(z)$ — решение уравнения (4) — имеет особую точку ξ, то на некотором конечном расстоянии $\rho(\xi)$ от этой точки (для этого расстояния можно указать верхнюю границу, не зависящую от $y(z)$, а зависящую только от $Q_j(z)$) и $L(z)$) должны быть либо другие особые точки $y(z)$ либо точки из множества E. Для разных ξ величина $\rho(\xi)$ вообще разная. Например, если $Q_0(z)$ — многочлен, не равный тождественно постоянной, то по мере удаления от начала расстояние $\rho(\xi)$ вообще увеличивается (этот факт в одном частном случае отмечен в работе ([7])). Если же $Q_0(z) = \text{const}$, то в этом случае $\rho(\xi)$ не превосходит некоторой постоянной величины γ, которая не зависит от $y(z)$, а целиком определяется оператором $M(y)$.

§ 5. Последовательности линейных агрегатов

Возьмем последовательность чисел $\{\lambda_n\}$ такую, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|^{\frac{1}{s}}} = \tau < \infty, \tag{1}$$

и при ее помощи построим характеристическую функцию

$$L(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Мы имеем (см. § 3):

$$|L(z)| \leqslant \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{|z|}{|\lambda_n|}\right) < \exp\left[(\sigma + \varepsilon)|z|^{\frac{1}{s}}\right], \quad |z| > r_0(\varepsilon), \tag{2}$$

где $\sigma = \dfrac{\pi\tau}{\sin\frac{\pi}{s}}$. Значит, $L(z)$ принадлежит классу $\left[\frac{1}{s}, \sigma\right]$.

Образуем последовательность линейных агрегатов

$$P_n(z) = \sum_{j=1}^{p_n}\sum_{k=1}^{s} a_{nj}^{(k)} y_k(z, \lambda_j) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

(функции $y_k(z, \lambda_j)$ были введены ранее).

Имеет место

ТЕОРЕМА 4. *Пусть последовательность* (3) *равномерно сходится в круге* $|z - z_0| \leqslant r$, *причем* r *таково, что в точке* z_0

$$q = q(z_0) = s!\left(\frac{\sigma e}{rs}\right)^s M(r, Q_0) < 1$$

(*предполагается, что в указанном круге* $y_k(z, \lambda_j)$ *регулярны*). *Тогда в достаточно малой окрестности точки* z_0 *предельная функция* $P(z) = \lim_{n\to\infty} P_n(z)$ *последовательности* (3) *удовлетворяет уравнению*

$$M(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k y = 0. \tag{4}$$

Мы имеем (в силу свойств 1), 2), 6) оператора):

$$M\left(\sum_{k=1}^{s} a_{nj}^{(k)} y_k(z, \lambda_j)\right) = L(\lambda_j) \sum_{k=1}^{s} a_{nj}^{(k)} y_k(z, \lambda_j) = 0,$$

откуда

$$M(P_n) = 0.$$

Воспользовавшись свойством 3) оператора, найдем, что в достаточно малой окрестности точки z_0

$$M(P) = \lim_{n\to\infty} M(P_n) = 0.$$

На основании теоремы 4 (которую можно рассматривать как обратную к теореме 1) можно утверждать, что к предельной функции $P(z)$ последовательности (3) применимы ранее доказанные теоремы 1, 2 и 3.

Установим некоторые свойства последовательности (3).

ТЕОРЕМА 5. *В условиях теоремы 4 существуют пределы*

$$\lim_{n\to\infty} a_{nj}^{(k)} = a_j^{(k)} \quad (k = 1, 2, \ldots, s, \quad j = 1, 2, \ldots).$$

Чтобы доказать эту теорему, положим

$$L_m(z) = \prod_{j \neq m} \left(1 - \frac{z}{\lambda_j}\right) \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

и

$$M_m(y) = L_m(D)\, y.$$

Функция $L_m(z)$, в силу (2), принадлежит классу $\left[\frac{1}{s}, \sigma\right]$. Имеем:

$$M_m(P) = \lim_{n\to\infty} M_m(P_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{p_n} \left[\sum_{k=1}^{s} a_{nj}^{(k)} y_k(z, \lambda_j)\right] L_m(\lambda_j) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{s} a_{nm}^{(k)} y_k(z, \lambda_m)\right] L_m(\lambda_m), \tag{5}$$

ибо $L_m(\lambda_j) = 0$ при $j \neq m$, причем из существования левой части вытекает существование правой. Отсюда, так как $L_m(\lambda_m) \neq 0$ и функции $y_k(z, \lambda_m)$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$ линейно независимы, и вытекает существование пределов

$$\lim_{n\to\infty} a_{nm}^{(k)} = a_m^{(k)}.$$

ТЕОРЕМА 6. *Последовательность* (3) *и последовательность*

$$\widetilde{P}_n(z) = \sum_{j=1}^{\widetilde{p}_n} \sum_{k=1}^{s} \widetilde{a}_{nj}^{(k)} y_k(z, \lambda_j) \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{6}$$

удовлетворяющие обе условиям теоремы 4, сходятся к одной и той же функции тогда и только тогда, когда пределы соответствующих коэффициентов равны между собой:

$$a_j^{(k)} = \widetilde{a}_j^{(k)} \quad (k = 1, 2, \ldots, s, \quad j = 1, 2, \ldots).$$

В самом деле, пусть последовательности (3) и (6) сходятся к одной функции $P(z)$. Учитывая (5), имеем:

$$M_m(P) = \lim_{n\to\infty} M_m(P_n) = \left[\sum_{k=1}^{s} a_m^{(k)}\, y_k(z,\ \lambda_m)\right] L_m(\lambda_m)$$

и одновременно:

$$M_m(P) = \lim_{n\to\infty} M_m(\widetilde{P}_n) = \left[\sum_{k=1}^{s} \widetilde{a}_m^{(k)}\, y_k(z,\ \lambda_m)\right] L_m(\lambda_m).$$

Правые части равны, ибо равны левые. Но равенство правых частей, поскольку $y_k(z,\ \lambda_m)$ $(k = 1, 2, \ldots,\ s)$ — линейно независимые функции, возможно только при условии

$$a_m^{(k)} = \widetilde{a}_m^{(k)}.$$

Пусть теперь дано, что

$$a_m^{(k)} = \widetilde{a}_m^{(k)}.$$

Нам надо показать, что $P(z) = \widetilde{P}(z)$, где через $\widetilde{P}(z)$ обозначена предельная функция последовательности (6). Полагая

$$M_{m+1,\infty}(y) = L_{m+1,\infty}(D)\, y,$$

где

$$L_{m+1,\infty}(z) = \prod_{j=m+1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\lambda_j}\right),$$

получаем:

$$M_{m+1,\infty}(P) = \lim_{n\to\infty} M_{m+1,\infty}(P_n) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{s} a_j^{(k)} y_k(z,\ \lambda_j)\right] L_{m+1,\infty}(\lambda_j) \qquad (7)$$

и, аналогично,

$$M_{m+1,\infty}(\widetilde{P}) = \sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{s} \widetilde{a}_j^{(k)} y_k(z,\ \lambda_j)\right] L_{m+1,\infty}(\lambda_j).$$

По предположению,

$$a_j^{(k)} = \widetilde{a}_j^{(k)}$$

и, значит,

$$M_{m+1,\infty}(P) = M_{m+1,\infty}(\widetilde{P}).$$

Пусть теперь $m \to \infty$; в пределе, в силу свойства 4) оператора, получим:

$$P(z) = \widetilde{P}(z),$$

что и требовалось доказать.

Как и в § 3, обозначим применительно к функции $P(z)$ через D связное множество точек z_0 таких, что $P(z)$ регулярна в круге $|z - z_0| \leqslant r$ с $q(z_0) < 1$. Имея в виду представление (7) и тот факт, что $M_{m+1,\infty}(P) \to$ $\to P(z)$ при $m \to \infty$ равномерно внутри D, можно утверждать, что попутно с доказательством теоремы 6 мы доказали еще следующую теорему.

ТЕОРЕМА 7. *В условиях теоремы 4 функцию $P(z)$ в области D можно представить в виде*

$$P(z) = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{k=1}^{s} a_j^{(k)} y_k(z, \lambda_j) \right] L_{m+1,\infty}(\lambda_j). \tag{8}$$

Замечание. Поскольку

$$a_j^{(k)} = \lim_{n\to\infty} a_{nj}^{(k)},$$

то в представлении (8) фигурируют только те частные решения $y_k(z, \lambda_j)$, которые участвуют в образовании агрегатов (3). Имея это в виду, можно несколько усилить теорему 3. Именно, основываясь на представлении (8), можно утверждать, что если частные решения $y_k(z, \lambda_j)$, участвующие в образовании агрегатов (3) (эти решения в отдельных случаях составят только часть всех частных решений), регулярны внутри контура C (замкнутый контур C принадлежит области D и в нем могут быть точки из множества E), то внутренность контура C принадлежит области D. В частности, если указанные частные решения — целые функции, то D — односвязная область.

§ 6. О сходимости подпоследовательности частных сумм

Из теоремы 6 следует, что функции $P(z)$ мы можем отнести единственным образом ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{s} a_j^{(k)} y_k(z, \lambda_j) \right) \tag{1}$$

и этот ряд, если он равномерно сходится в круге $|z - z_0| \leqslant r$ с $q(z_0) < 1$ сходится именно к $P(z)$. Однако, как показывают примеры, ряд (1) может расходиться и даже всюду. Мы покажем, что в тех случаях, когда ряд расходится, у него при известных условиях будет иметься сходящаяся к $P(z)$ некоторая подпоследовательность частных сумм.

При рассмотрении этого вопроса будем пользоваться следующим результатом работы Трошина [9]:

Пусть $\{\lambda_n\}$ — последовательность точек плоскости такая, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|^{\rho}} = \tau < \infty$$

$\left(\text{в нашем случае } \rho = \frac{1}{s}\right)$. Существует разбиение $\{\lambda_n\}$ на группы

$$T_1 = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_{m_1}\}, \ \ldots, \ T_k = \{\lambda_{m_{k-1}+1}, \ldots, \lambda_{m_k}\}, \ \ldots,$$

обладающее следующим свойством: какова бы ни была последовательность чисел $\{b_k\}$, $|b_k| \leqslant 1$, имеется целая функция $\omega(z)$, удовлетворяющая условиям:

1) $\omega(\lambda) = b_k$, $\lambda \in T_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$,

2) при любом $\varepsilon > 0$

$$|\omega(z)| < e^{(H+\varepsilon)|z|^{\rho}}, \qquad |z| > r_0(\varepsilon), \tag{2}$$

где H — некоторая постоянная, одна и та же для всех $\{b_k\}$, $|b_k| \leqslant 1$, причем $H = 0$ при $\tau = 0$ и $r_0(\varepsilon)$ зависит от ε, но не зависит от $\{b_k\}$.

Этот результат аналогичен результату работы Трошина ([10]).

Предположим, что последовательность $\{P_n(z)\}$ (последовательность (3) из предыдущего параграфа) равномерно сходится в круге $|z - z_0| \leqslant r_1$, причем r_1 таково, что в точке z_0

$$q_1 = q_1(z_0) = s!\left(\frac{He}{r_1 s}\right)^s M(r_1, Q_0) < 1$$

(здесь число H взято из условия (2)). Область, которая содержит точку z_0 и всякую такую точку a, что $P(z)$ регулярна в круге $|z - a| \leqslant r_1$ с $q_1(a) < 1$, обозначим через D_1. При $\tau = 0$ область D_1 совпадает с областью существования функции $P(z)$, если из последней исключить особые точки $Q_j(z)$.

ТЕОРЕМА 8. *В области D_1 сходится подпоследовательность частных сумм ряда* (1) *порядков m_p $(p = 1, 2, \ldots)$, причем на любом ограниченном замкнутом множестве $F \subset D_1$ она сходится равномерно.*

Чтобы доказать эту теорему, рассмотрим всевозможные последовательности $\{b_k\}$, $|b_k| \leqslant 1$; каждой такой последовательности, как и раньше, приведем в соответствие целую функцию $\omega(z)$ (таких функций будет целое семейство). Полагая

$$\omega(z) = \sum_0^\infty c_m z^m,$$

на основании (2) можно утверждать, что

$$|c_m| < A(\varepsilon)\left(\frac{He + \varepsilon}{ms}\right)^{ms}, \quad \varepsilon > 0 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

где $A(\varepsilon)$ — одно и то же для всего семейства функций $\omega(z)$.

Введем операторы

$$N(P) = \sum_0^\infty c_m D^m P(z)$$

(их целое семейство). В силу (3) и леммы 1 (вместе с оценкой (3) из § 1), они определены всюду в области D_1, причем в достаточно малой окрестности точки $a \in D_1$ (точка a выбрана произвольно в D_1)

$$|N(P)| = \left|\sum_0^\infty c_m D^m P\right| < K, \tag{4}$$

где K — одно и то же для всех операторов.

В достаточно малой окрестности точки z_0 имеем:

$$N(P) = \lim_{n\to\infty} N(P_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{p_n}\left[\sum_{k=1}^{s} a_{nj}^{(k)} y_k(z, \lambda_j)\right]\omega(\lambda_j).$$

Напомним, что $\omega(\lambda) = b_\mu$, если $\lambda \in T_\mu$. До сих пор числа b_μ были подчинены единственному ограничению: $|b_\mu| \leqslant 1$. Сейчас предположим,

что все они равны нулю при $\mu > p$, где p — некоторое фиксированное целое число. Тогда предыдущее равенство примет вид:

$$N(P) = \sum_{j=1}^{m_p} \left[\sum_{k=1}^{s} a_j^{(k)} y_k(z, \lambda_j) \right] \omega(\lambda_j) = b_1 \sum_{j=1}^{m_1} \left(\sum_{k=1}^{s} a_j^{(k)} y_k(z, \lambda_j) \right) +$$

$$+ b_2 \sum_{j=m_1+1}^{m_2} \left(\sum_{k=1}^{s} a_j^{(k)} y_k(z, \lambda_j) \right) + \cdots + b_p \sum_{j=m_{p-1}+1}^{m_p} \left(\sum_{k=1}^{s} a_j^{(k)} y_k(z, \lambda_j) \right). \quad (5)$$

Это равенство, установленное пока в достаточно малой окрестности точки z_0, имеет место во всей области D_1, ибо левая его часть является в D_1 аналитической функцией, а правая — конечной линейной комбинацией частных решений $y_k(z, \lambda_j)$; в частности, оно имеет место в достаточно малой окрестности точки a. Если обозначить через $S_n(z)$ частную сумму порядка n ряда (1),

$$S_n(z) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{s} a_j^{(k)} y_k(z, \lambda_j) \right),$$

то равенство (5) можно представить в виде:

$$N(P) = b_1 S_{m_1}(z) + b_2 [S_{m_2}(z) - S_{m_1}(z)] + \cdots + b_p [S_{m_p}(z) - S_{m_{p-1}}(z)].$$

На основании неравенства (4), в достаточно малой окрестности $|z - a| < \varepsilon$ точки a

$$| b_1 S_{m_1}(z) + b_2 [S_{m_2}(z) - S_{m_1}(z)] + \cdots + b_p [S_{m_p}(z) - S_{m_{p-1}}(z)] | < K.$$

Выберем числа b_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, p$) (они у нас подчинены только условию $|b_\mu| \leqslant 1$) так, чтобы их модули были равны единице и чтобы в фиксированной точке z из окрестности $|z - a| < \varepsilon$ выражения

$$b_1 S_{m_1}(z), \quad b_\mu [S_{m_\mu}(z) - S_{m_{\mu-1}}(z)] \quad (\mu = 2, \ldots, p)$$

были действительны и неотрицательны. При таком выборе будем иметь:

$$| S_{m_1}(z) | + | S_{m_2}(z) - S_{m_1}(z) | + \cdots + | S_{m_p}(z) - S_{m_{p-1}}(z) | < K.$$

Здесь z — произвольная точка из окрестности $|z - a| < \varepsilon$ и p — любое целое положительное число. Отсюда выводим, что в окрестности $|z - a| < \varepsilon$ равномерно сходится ряд:

$$S_{m_1}(z) + [S_{m_2}(z) - S_{m_1}(z)] + \cdots + [S_{m_p}(z) - S_{m_{p-1}}(z)] + \cdots$$

или, что то же самое, последовательность $\{S_{m_p}(z)\}$. Так как точка a была произвольной из D_1, то, значит, $\{S_{m_p}(z)\}$ сходится во всей области D_1, причем на любом замкнутом ограниченном множестве $F \subset D_1$ сходится равномерно. Теорема доказана.

К чему сходится последовательность $\{S_{m_p}(z)\}$? Если предположить, что в D_1 (см. определение D_1) точка z_0 содержится вместе со своей

окрестностью $|z-z_0| \leqslant r$, причем такой, что $q(z_0) < 1$, то мы будем иметь, что в $|z-z_0| \leqslant r$ одновременно сходятся последовательности $\{P_n(z)\}$ и $\{S_{m_p}(z)\}$. Поскольку у этих последовательностей пределы соответствующих коэффициентов равны (у второй последовательности они не зависят от p), то, по теореме 6,

$$\lim_{p\to\infty} S_{m_p}(z) = \lim_{n\to\infty} P_n(z) = P(z).$$

Следствие. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{|\lambda_n|^{\frac{1}{s}}} = \tau = 0$, *то подпоследовательность* $\{S_{m_p}(z)\}$ *частных сумм ряда* (1) *сходится к* $P(z)$ *во всей области существования* $P(z)$, *исключая, быть может, особые точки* $Q_j(z)$, *а если* $Q_j(z)$ — *целые функции, то во всей области существования.*

§ 7. О сходимости ряда

В этом параграфе мы укажем, при каких дополнительных условиях сходится сам ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{s} a_j^{(k)} y_k(z, \lambda_j) \right). \tag{1}$$

Предположим, что величина

$$\delta = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{|\lambda_n|^{\frac{1}{s}}} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_n)} \right|, \qquad L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right),$$

является конечной. При этом предположении можно утверждать [см. ([8]), стр. 43], что в формулировке теоремы интерполяционного характера, приведенной в начале предыдущего параграфа, группы точек T_p можно считать состоящими каждая только из одной точки, а число H — равным $\sigma + \overset{+}{\delta}$, где $\sigma = \dfrac{\pi\tau}{\sin\frac{\pi}{s}}$, а $\overset{+}{\delta} = \delta$, если $\delta \geqslant 0$, и $\overset{+}{\delta} = 0$, если $\delta < 0$. Но если каждая группа T_p состоит только из одной точки, то тогда $m_p = p$, последовательность $\{S_{m_p}(z)\}$ совпадает с последовательностью всех частных сумм ряда (1) и, следовательно, теорему 8 можно формулировать как теорему о сходимости ряда (1). Таким образом, мы получаем следующее предложение:

ТЕОРЕМА 9. *Пусть* $\delta < \infty$ *и в определении области* D_1 *величина* $H = \sigma + \overset{+}{\delta}$. *Тогда в области* D_1 *сходится ряд* (1).

Следствие. *Если* $\tau = 0$ *и* $\overset{+}{\delta} = 0$, *то ряд сходится к* $P(z)$ *во всей области существования* $P(z)$, *исключая, быть может, особые точки* $Q_j(z)$, *а если* $Q_j(z)$ — *целые функции, то во всей области существования.*

Отметим, что условие $\overset{+}{\delta} = 0$ будет выполняться, в частности, если на последовательность $\{\lambda_n\}$ наложить ограничение [см. ([8]), стр. 49]:

$$|\lambda_{n+1}|^{\frac{1}{s}} - |\lambda_n|^{\frac{1}{s}} \geqslant h > 0. \tag{2}$$

§ 8. Об одной теореме интерполяционного характера

Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 10. *В условиях теоремы 4 для любого* ξ *из достаточно малой окрестности точки* z_0 *существует последовательность целых функций* $\{\omega_n(z) = \omega_n(z, \xi)\}$ *со свойствами:*

1) $|\omega_n(z)| < \exp[(\sigma+\varepsilon)|z|^{\frac{1}{s}}]$, $|z| > r_0(\varepsilon)$, *причем* $r_0(\varepsilon)$ *не зависит от* n;

2) *в любой ограниченной области последовательность* $\{\omega_n(z)\}$ *равномерно сходится;*

3) $$\omega_n(\lambda_\mu) = \left[\sum_{k=1}^{s} a_{n\mu}^{(k)} y_k(\xi, \lambda_\mu)\right] L'_{1,\infty}(\lambda_\mu) \text{ *при* } \mu \leqslant p_n,$$

$$\omega_n(\lambda_\mu) = 0 \text{ *при* } \mu > p_n.$$

Функции $\omega_n(z)$ будем искать в виде

$$\omega_n(z) = \omega_n[P_n(\xi), z] = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{M_{1,\, m-1}[P_n(\xi)]\, L_{m+1,\,\infty}(z)}{\lambda_m}, \tag{1}$$

где надо считать $M_{1,0}[P_n(\xi)] = P_n(\xi)$.

По условию, последовательность $\{P_n(z)\}$ равномерно сходится в круге $|z - z_0| \leqslant r$ с $q|z_0| < 1$. Немного уменьшив r (так, чтобы условие $q(z_0) < 1$ по-прежнему выполнялось), можно считать, что $\{P_n(z)\}$ равномерно сходится в круге $|z - z_0| \leqslant R\,(r < R)$, и для каждого ξ из некоторой окрестности $|\xi - z_0| \leqslant \delta_0$ точки z_0 имеем: $q(\xi) < 1$ и круг $|z - \xi| \leqslant r$ содержится в круге $|z - z_0| \leqslant R$. Имея это в виду, оценим $M_{1,\, m-1}[P_n(\xi)]$.

Так как функции $L_{1,\, m-1}(z)$ $(L_{1,0}(z) \equiv 1)$ по модулю меньше

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{|z|}{|\lambda_n|}\right) < \exp[(\sigma+\varepsilon_1)|z|^{\frac{1}{s}}], \quad |z| > r_1(\varepsilon_1) \tag{2}$$

в силу чего тейлоровские коэффициенты указанных функций будут иметь равномерную, не зависящую от m оценку сверху), то [см. неравенство (3) из § 2]

$$|M_{1,m-1}[y(\xi)]| < K \max_{|z-\xi|=r} |y(z)|, \quad |\xi - z_0| \leqslant \delta_0, \tag{3}$$

где K не зависит ни от ξ, ни от m. Отсюда, учитывая, что в силу равномерной сходимости $\{P_n(z)\}$ в круге $|z - z_0| \leqslant R$

$$\max_{|z-\xi|=r} P_n(z)| \leqslant \max_{|z-z_0|=R} |P_n(z)| \leqslant M,$$

где M не зависит от n, получим:

$$|M_{1,m-1}[P_n(\xi)]| < KM, \quad |\xi - z_0| \leqslant \delta_0. \tag{4}$$

Из последнего соотношения и из того факта, что функции $L_{m+1,\infty}(z)$ по модулю меньше выражения (2), заключаем, во-первых, что ряд (1) сходится, а во-вторых, что

$$|\omega_n(z)| < \exp\left[(\sigma+\varepsilon)|z|^{\frac{1}{s}}\right], \quad |z| > r_0(\varepsilon),$$

где $r_0(\varepsilon)$ не зависит от n и ξ (ряд $\sum|\lambda_m|^{-1}$ сходится, ибо $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{n}{|\lambda_n|^{\frac{1}{s}}} < \infty$ при $s \geqslant 2$). Таким образом, условие 1) теоремы выполняется. Воспользовавшись неравенством

$$|M_{1,m-1}[P_p(\xi) - P_q(\xi)]| < K \max_{|z-\xi|=r} |P_p(z) - P_q(z)| \leqslant$$
$$|\xi - z_0| \leqslant \delta_0$$
$$\leqslant K \max_{|z-z_0|=R} |P_p(z) - P_q(z)| \qquad (5)$$

[оно следует из (3)] и заметив, что правая его часть (она не зависит от m) стремится к нулю при $p, q \to \infty$, мы убедимся в справедливости условия 2) теоремы.

Остается доказать условие 3). Для этого воспользуемся тождеством [см. ([8]), стр. 61]:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{L_{1,m-1}(\lambda_j) L_{m+1,\infty}(z)}{\lambda_m} = \frac{L_{1,\infty}(z)}{\lambda_j - z}. \qquad (6)$$

Положим

$$P_n(z) = \sum_{j=1}^{p_n} R_j(z), \quad R_j(z) = \sum_{k=1}^{s} a_{nj}^{(k)} y_k(z, \lambda_j). \qquad (7)$$

Так как

$$M_{1,m-1}[R_j(\xi)] = R_j(\xi) L_{1,m-1}(\lambda_j),$$

то, в силу представления (1),

$$\omega_n[R_j(\xi), \lambda_\mu] = -R_j(\xi) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{L_{1,m-1}(\lambda_j) L_{m+1,\infty}(\lambda_\mu)}{\lambda_m}.$$

На основании тождества (6), правая часть последнего соотношения равна нулю при $j \neq \mu$ и равна $R_j(\xi) L'_{1,\infty}(\lambda_\mu)$ при $j = \mu$. В силу этого, принимая во внимание (7), мы и получим, что

$$\omega_n[P_n(\xi), \lambda_\mu] = R_\mu(\xi) L'_{1,\infty}(\lambda_\mu)$$

при $\mu \leqslant p_n$ и

$$\omega_n[P_n(\xi), \lambda_\mu] = 0$$

при $\mu > p_n$. Этим теорема доказана полностью.

Замечание. В дальнейшем, кроме функций $\omega_n[P_n(\xi), z]$, нам понадобятся производные этих функций порядка $\nu = 1, 2, \ldots, s-1$ по параметру ξ. Мы имеем:

$$\frac{\partial^\nu}{\partial\xi^\nu} \omega_n[P_n(\xi), z] = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{d^\nu}{d\xi^\nu} M_{1,m-1}[P_n(\xi)] \frac{L_{m+1,\infty}(z)}{\lambda_m}.$$

Будем предполагать, что ξ лежит в круге $|\xi - z_0| \leqslant \frac{\delta_0}{2}$ (число δ_0 указано выше). На основании неравенства Коши

$$|f^{(\nu)}(\xi)| \leqslant \frac{\nu! \delta_0}{\left(\frac{\delta_0}{2}\right)^{\nu+1}} \max_{|\eta - z_0| = \delta_0} |f(\eta)|, \quad |\xi - z_0| \leqslant \frac{\delta_0}{2},$$

принимая во внимание оценку (4), получим:

$$\left| \frac{d^\nu}{d\xi^\nu} M_{1, m-1}[P_n(\xi)] \right| < \frac{\nu! \delta_0}{\left(\frac{\delta_0}{2}\right)^{\nu+1}} KM,$$

в силу чего

$$\left| \frac{\partial^\nu}{\partial \xi^\nu} \omega_n [P_n(\xi), z] \right| < \exp[(\sigma + \varepsilon) |z|^{\frac{1}{s}}], \quad |z| > \rho_0(\varepsilon),$$

где $\rho_0(\varepsilon)$ не зависит ни от n, ни от ξ. На основании того же неравенства Коши, принимая во внимание оценку (5), согласно которой в круге $|\xi - z_0| \leqslant \frac{\delta_0}{2}$

$$\left| \frac{d^\nu}{d\xi^\nu} M_{1, m-1}[P_p(\xi) - P_q(\xi)] \right| < \frac{\nu! \delta_0}{\left(\frac{\delta_0}{2}\right)^{\nu+1}} \max_{|\eta - z_0| = \delta_0} |M_{1, m-1}[P_p(\eta) -$$

$$- P_q(\eta)]| < \frac{\nu! \delta_0}{\left(\frac{\delta_0}{2}\right)^{\nu+1}} K \max_{|z - z_0| = R} |P_p(z) - P_q(z)|,$$

заключаем, как и ранее, что последовательность $\left\{ \frac{d^\nu}{\partial \xi^\nu} \omega_n [P_n(\xi), z] \right\}$ (ν фиксировано) равномерно сходится в любой ограниченной области изменения переменного z. Заметим, наконец, имея в виду свойство 3) теоремы 10, что

$$\frac{\partial^\nu}{\partial \xi^\nu} \omega_n [P_n(\xi), \lambda_\mu] = \left[\sum_{k=1}^{s} a_{n\mu}^{(k)} \frac{\partial^\nu}{\partial \xi^\nu} y_k(\xi, \lambda_\mu) \right] L'_{1,\infty}(\lambda_\mu)$$

при $\mu \leqslant p_n$ и

$$\frac{\partial^\nu}{\partial \xi^\nu} \omega_n [P_n(\xi), \lambda_\mu] = 0$$

при $\mu > p_n$.

Таким образом, производные порядка ν по параметру ξ от функций $\omega_n [P_n(\xi), z]$ обладают свойствами, аналогичными свойствам 1), 2) и 3) присущим самим этим функциям.

Рассмотрим теперь отдельно случай, когда $\delta < \infty$ (величина δ введена в предыдущем параграфе). В этом случае [см. ([8]), стр. 36] существует целая функция $\omega(z)$ из класса $\left[\frac{1}{s}, \sigma + 2\overset{+}{\delta}\right]$, которая удовлетворяет условию:

$$\omega(\lambda_\mu) = \frac{1}{L'_{1,\infty}(\lambda_\mu)} \quad (\mu = 1, 2, \ldots).$$

Если функции $\omega_n(z)$ $(n=1, 2, \ldots)$ из предыдущей теоремы мы умножим на эту функцию $\omega(z)$, то получим новые функции $\widetilde{\omega}_n(z)$, относительно которых можно сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 11. *В условиях теоремы 4, если $\delta < \infty$, для любого ξ из достаточно малой окрестности точки z_0 существует последовательность целых функций $\{\widetilde{\omega}_n(z)\}$ со свойствами:*

1) $|\widetilde{\omega}_n(z)| < \exp[(2\sigma + 2\overline{\delta} + \varepsilon)|z|^{\frac{1}{s}}], \quad |z| > r_0(\varepsilon),$

причем $r_0(\varepsilon)$ не зависит от n;

2) *в любой ограниченной области последовательность $\{\widetilde{\omega}_n(z)\}$ равномерно сходится;*

3) $\widetilde{\omega}_n(\lambda_\mu) = \sum_{k=1}^{s} a_{n\mu}^{(k)} y_k(\xi, \lambda_\mu)$ *при* $\mu \leqslant p_n$,

$\widetilde{\omega}_n(\lambda_\mu) = 0$ *при* $\mu > p_n$.

Замечание. Относительно функций $\widetilde{\omega}_n(z) = \widetilde{\omega}_n(z, \xi)$ можно сделать замечание, аналогичное тому, которое было сделано выше. Именно, можно утверждать, что производные фиксированного порядка ν по параметру ξ от функций $\widetilde{\omega}_n(z, \xi)$ обладают свойствами 1) и 2), указанными в теореме 11, и свойством, аналогичным свойству 3):

$$\frac{\partial^\nu}{\partial \xi^\nu} \widetilde{\omega}_n(\lambda_\mu, \xi) = \sum_{k=1}^{s} a_{n\mu}^{(k)} \frac{\partial^\nu}{\partial \xi^\nu} y_k(\xi, \lambda_\mu)$$

при $\mu \leqslant p_n$ и

$$\frac{\partial^\nu}{\partial \xi^\nu} \widetilde{\omega}_n(\lambda_\mu, \xi) = 0$$

при $\mu > p_n$.

§ 9. О сходимости исходной последовательности линейных агрегатов

Изучение последовательностей полиномов Дирихле показало [см. ([8]), глава III], что если последовательность полиномов Дирихле сходится в некоторой области, то она при известных условиях будет обязательно сходиться и в большей области. Естественно возникает вопрос, не будет ли указанное свойство в какой-то степени присуще и более общим последовательностям, а именно, изучаемым в этой работе последовательностям $\{P_n(z)\}$.

Этот вопрос мы пока рассмотрим применительно к последовательностям частного вида

$$f_n(z) = \sum_{j=1}^{p_n} a_{nj} y(z, \lambda_j) \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

где через $y(z, \lambda_j)$ обозначено одно из s решений $y_k(z, \lambda_j)$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$.

Положим

$$F(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y(z, \lambda_j)}{y(z_0, \lambda_j)}. \tag{2}$$

Будем предполагать, что ряд (2) сходится в некоторой области. Область, внутри которой он сходится равномерно, обозначим через G и с ее помощью построим новую область D_2 следующим образом. Будем считать, что точка a принадлежит D_2, если имеется круг $|z-a| \leqslant r_2$, принадлежащий области G, такого радиуса r_2, что выполняется условие:

$$q_2 = q_2(a) = \left[\frac{(2\sigma + 2\overset{+}{\delta})\, e}{r_2 s}\right]^s s!\, M(r_2, Q_0) < 1 \qquad (3)$$

(напомним, что $M(r_2, Q_0)$ обозначает здесь максимум модуля $Q_0(z)$ в круге $|z-a| \leqslant r_2$). При $\sigma = 0$, $\overset{+}{\delta} = 0$ области G и D_2 (с точностью до особых точек функций $Q_j(z)$) совпадают.

ТЕОРЕМА 12. *Если последовательность* (1) *равномерно сходится в круге* $|z-z_0| \leqslant r$ *с* $q(z_0) < 1$, *то она равномерно сходится и внутри области* D_2.

Для доказательства воспользуемся теоремой 11. Именно, при помощи фигурирующих в этой теореме целых функций $\widetilde{\omega}_n(z)$ образуем операторы

$$\widetilde{M}_n(y) = \widetilde{\omega}_n(D)\, y \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

На основании свойства 1) функций $\widetilde{\omega}_n(z)$ (см. теорему 11) заключаем, что этими операторами можно действовать на функцию 2) в любой точке области D_2, причем

$$\widetilde{M}_n(F) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y(z, \lambda_j)}{y(z_0, \lambda_j)}\, \widetilde{\omega}_n(\lambda_j).$$

В силу свойства 3) функций $\widetilde{\omega}_n(z)$, отсюда получаем:

$$\widetilde{M}_n(F) = \sum_{j=1}^{p_n} a_{nj}\, y(z, \lambda_j) = f_n(z),$$

ибо применительно к последовательности (1)

$$\widetilde{\omega}_n(\lambda_j) = a_{nj}\, y(z_0, \lambda_j)$$

при $j \leqslant p_n$ и $\widetilde{\omega}_n(\lambda_j) = 0$ при $j > p_n$. Учитывая свойства 1) и 2) функций $\widetilde{\omega}_n(z)$ и свойство 4) операторов, выводим, наконец, что последовательность

$$\{\widetilde{M}_n(F) = f_n(z)\}$$

равномерно сходится внутри D, что и требовалось доказать.

Следствие. *Пусть* $\tau = 0$ *и* $\overset{+}{\delta} = 0$ *и пусть последовательность* (1) *равномерно сходится в некоторой окрестности точки* z_0. *Если ряд* (2) *равномерно сходится внутри области* G, *то внутри этой области (исключая, быть может, особые точки* $Q_j(z)$) *равномерно сходится и первоначальная последовательность* (1).

Укажем теперь, как можно рассматриваемый вопрос о сходимости исходной последовательности линейных агрегатов в возможно большей

области решить применительно к последовательности

$$P_n(z) = \sum_{j=1}^{p_n} \sum_{k=1}^{s} a_{nj}^{(k)} y_k(z, \lambda_j) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Для этого снова воспользуемся теоремой 11 и замечанием к ней. Пусть $\widetilde{\omega}_n(z, \xi)$ — функции, фигурирующие в теореме 11. Положим

$$\alpha_n(z) = \widetilde{\omega}_n(z, \xi), \quad \beta_n(z) = \frac{\partial}{\partial \xi} \omega_n(z, \xi), \ldots, \quad \gamma_n(z) = \frac{\partial^{s-1}}{\partial \xi^{s-1}} \omega_n(z, \xi).$$

При $\mu \leqslant p_n$ имеем:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_n(\lambda_\mu) &= \sum_{k=1}^{s} a_{n\mu}^{(k)} y_k(\xi, \lambda_\mu), \\ \beta_n(\lambda_\mu) &= \sum_{k=1}^{s} a_{n\mu}^{(k)} \frac{d}{d\xi} y_k(\xi, \lambda_\mu), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \gamma_n(\lambda_\mu) &= \sum_{k=1}^{s} a_{n\mu}^{(k)} \frac{d^{s-1}}{d\xi^{s-1}} y_k(\xi, \lambda_\mu). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Решим систему (5) относительно величин $a_{n\mu}^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$. Определитель системы Δ, будучи определителем Вронского для уравнения

$$Dy \equiv \sum_{j=0}^{s} Q_j(z) y^{(s-j)}(z) = \lambda_\mu y,$$

не равен нулю. Следовательно (при фиксированном ξ), мы получим:

$$a_{n\mu}^{(k)} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} y_1(\xi, \lambda_\mu) & \ldots & \alpha_n(\lambda_\mu) & \ldots & y_s(\xi, \lambda_\mu) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(s-1)}(\xi, \lambda_\mu) & \ldots & \gamma_n(\lambda_\mu) & \ldots & y_s^{(s-1)}(\xi, \lambda_\mu) \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_n(\lambda_\mu) A_\mu^{(k)} + \beta_n(\lambda_\mu) B_\mu^{(k)} + \ldots + \gamma_n(\lambda_\mu) C_\mu^{(k)}, \tag{6}$$

где величины $A_\mu^{(k)}, B_\mu^{(k)}, \ldots, C_\mu^{(k)}$ не зависят от n.

Образуем ряды

$$F_1^{(k)}(z) = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^{(k)} y_k(z, \lambda_\mu),$$

$$F_2^{(k)}(z) = \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu^{(k)} y_k(z, \lambda_\mu), \ldots, F_s^{(k)}(z) = \sum_{\mu=1}^{\infty} C_\mu^{(k)} y_k(z, \lambda_\mu). \tag{7}$$

Область, в которой эти ряды одновременно равномерно сходятся, обозначим через G_k. При помощи области G_k определим область D_k точно так же, как выше при помощи области G была определена область D_2. Именно, будем считать, что точка a принадлежит D_k, если имеется круг $|z - a| \leqslant r_2$, принадлежащий области G_k, такого радиуса r_2, что выполняется условие (3).

ТЕОРЕМА 13. *Если последовательность* (4) *равномерно сходится в круге* $|z-z_0|\leqslant r$ *с* $q(z_0)<1$, *то последовательность*

$$P_{n,k}(z)=\sum_{j=1}^{p_n} a_{nj}^{(k)} y_k(z,\lambda_j) \quad (n=1,2,\ldots) \tag{8}$$

(*при фиксированном* $k=1,2,\ldots,s$) *равномерно сходится внутри области* D_k.

Для доказательства заметим, аналогично предыдущему случаю, что в области D_k

$$\alpha_n(D)F_1^{(k)}=\sum_{\mu=1}^{\infty}\alpha_n(\lambda_\mu)A_\mu^{(k)}y_k(z,\lambda_\mu)=\sum_{\mu=1}^{p_n}\alpha_n(\lambda_\mu)A_\mu^{(k)}y_k(z,\lambda_\mu),$$

. . . .

$$\gamma_n(D)F_s^{(k)}=\sum_{\mu=1}^{p_n}\gamma_n(\lambda_\mu)C_\mu^{(k)}y_k(z,\lambda_\mu),$$

в силу чего, принимая во внимание (6), получаем:

$$\alpha_n(D)F_1^{(k)}+\ldots+\gamma_n(D)F_s^{(k)}=\sum_{\mu=1}^{p_n}a_{n\mu}^{(k)}y_k(z,\lambda_\mu)=P_{n,k}(z).$$

Внутри области D_k последовательности

$$\{\alpha_n(D)F_1^{(k)}\},\ \ldots,\ \{\gamma_n(D)F_s^{(k)}\}$$

сходятся равномерно; следовательно, внутри D_k равномерно сходится и последовательность (8).

Теорема 13 показывает, что в тех случаях, когда области D_k ($k=1,2,\ldots,s$) непустые, исходную последовательность (4) можно расщепить на s сходящихся последовательностей — на последовательности (8). Если области D_k имеют общую часть D, то в этой общей части будет сходиться сама последовательность (4). Область D может оказаться большей областью, чем тот первоначальный круг $|z-z_0|\leqslant r$, в котором, по условию, сходится последовательность (4). Таким образом, в этом случае мы будем иметь дело с расширением области сходимости исходной последовательности.

§ 10. Обобщение теоремы Лиувилля

В этом параграфе мы укажем случаи, когда из ограниченности предельной функции $f(z)$ последовательности

$$f_n(z)=\sum_{j=1}^{p_n}a_{nj}y(z,\lambda_j) \quad (n=1,2,\ldots) \tag{1}$$

в определенной бесконечной области будет вытекать, что $f(z)=\text{const}$.

Рассмотрим сперва случай, когда в выражении

$$Dy \equiv \sum_{j=0}^{s} Q_j(z)\, y^{(s-j)}(z)$$

коэффициенты $Q_j(z)$ являются аналитическими в угле

$$\varphi_1 \leqslant \arg z \leqslant \varphi_2, \quad |z| > R, \tag{2}$$

и в этом угле при больших $|z|$ удовлетворяют условию

$$|Q_j(z)| < K|z|^{s-j} \quad (j = 0, 1, \ldots, s).$$

Согласно лемме 2, в меньшем угле $\varphi_1 + \varepsilon < \arg z < \varphi_2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, при больших $|z|$

$$|D^k y| < \beta^k k^{sk} M(r, y), \tag{3}$$

где β — постоянная, $M(r, y)$ — максимум модуля функции $y(\xi)$ в круге $|\xi - z| \leqslant r$ и $r = |z| \sin \varepsilon$. Отметим, что величина β зависит как от коэффициентов $Q_j(z)$, так и от раствора угла (2).

ТЕОРЕМА 14. *Пусть последовательность* (1) *равномерно сходится в круге* $|z - z_0| \leqslant r$ *с* $q(z_0) < 1$ *и предельная функция* $f(z)$ *регулярна в угле* (2) (*точку* z_0 *предполагаем лежащей в угле* (2)). *Если* $f(z)$ *ограничена в угле* (2), *каждая из функций* $y(z, \lambda_j)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ *не ограничена при* $z \to \infty$ *в меньшем угле и выполняется условие*

$$\beta\left(\frac{\sigma e}{s}\right)^s < 1, \quad \sigma = \frac{\pi\tau}{\sin\frac{\pi}{s}}, \quad \tau = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|^{\frac{1}{s}}}, \tag{4}$$

то $f(z) \equiv 0$.

Для доказательства положим

$$M_m(y) = L_m(D)\, y, \quad L_m(z) = \prod_{j \neq m}\left(1 - \frac{z}{\lambda_j}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{(m)} z^k.$$

Так как $L_m(z) \in \left[\frac{1}{s}, \sigma\right]$ (см. § 5), то

$$|\alpha_k^{(m)}| < \left(\frac{\sigma e + \varepsilon}{ks}\right)^{ks}, \quad k > N(\varepsilon), \quad \varepsilon > 0.$$

На основании этой оценки, неравенства (3) и условия (4) получаем:

$$|M_m(f)| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{(m)} D^k(f)\right| < AM(r, f),$$

где $A = \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k^{(m)}|\, \beta^k$ — постоянная (ряд, в силу (4), сходится). Если в угле (2) $|f(z)| \leqslant N$, то, следовательно, в меньшем угле (обозначим его через G_1)

$$|M_m(f)| < AN. \tag{5}$$

С другой стороны, в достаточно малой окрестности точки z_0

$$M_m(f) = \lim_{n\to\infty} M_m(f_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{p_n} a_{nj} y(z, \lambda_j) L_m(\lambda_j) =$$

$$= a_m L_m(\lambda_m) y(z, \lambda_m), \quad a_m = \lim_{n\to\infty} a_{nm},$$

ибо $L_m(\lambda_j) = 0$ при $j \neq m$. Отсюда, имея в виду (5), получим:

$$|a_m| < \frac{AN}{|L_m(\lambda_m) y(z, \lambda_m)|}.$$

Поскольку последнее неравенство имеет место всюду при больших $|z|$ в угле G_1 и, согласно условию, функция $y(z, \lambda_m)$ не ограничена в G_1 при $z\to\infty$, то, значит, $a_m = 0$ $(m = 1, 2, \ldots)$, а вместе с этим и $f(z) \equiv 0$.

Отметим, что условие (4) всегда будет выполняться, если $\tau = 0$.

Рассмотрим теперь второй случай, когда коэффициенты $Q_j(z)$ в выражении для Dy являются аналитическими и ограниченными в некотором бесконечном канале B, описываемом кругом постоянного радиуса R при движении его центра вдоль некоторой кривой Γ, уходящей в бесконечность. На основании леммы 3, в меньшем канале B_1, описываемом кругом радиуса $\rho < R$ при движении центра вдоль той же кривой Γ, имеем:

$$|D^k y| < \beta^k k^{sk} M(r, y),$$

где β — постоянная (другая, чем в предыдущем случае) и $r = R - \rho$. Используя этот факт, аналогично предыдущему можно убедиться в справедливости следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 15. *Пусть последовательность* (1) *равномерно сходится в круге* $|z - z_0| \leqslant r$ *с* $q(z_0) < 1$ *и предельная функция* $f(z)$ *регулярна в канале* B. *Если* $f(z)$ *ограничена в канале* B, *каждая из функций* $y(z, \lambda_j)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ *не ограничена при* $z\to\infty$ *в канале* B_1 *и выполняется условие*

$$\beta\left(\frac{\sigma e}{s}\right)^s < 1,$$

то $f(z) = 0$.

У Мандельбройта в книге ([11]) (стр. 247) приводится теорема: пусть $\{\lambda_n\}$ — возрастающая положительная последовательность, верхняя плотность которой конечна, и пусть $\bar{D}$ — ее усредненная верхняя плотность. Допустим, что ряд Дирихле $\sum d_n e^{-\lambda_n s}$ имеет абсциссу сходимости σ_c $(\sigma_c < \infty)$ и

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s} \quad (\sigma = \operatorname{Re}(s) > \sigma_c).$$

Предположим, что функция $F(s)$ может быть аналитически продолжена вдоль криволинейной полосы B шириной $2\pi R$, продолжающейся до $-\infty$, причем $R > \bar{D}$. Если эта функция ограничена в B, то она тождественно равна нулю.

Если учесть, что функции $e^{-\lambda_n s}$ можно рассматривать как частные решения уравнения

$$Dy \equiv y'' = \lambda_n^2 y,$$

то станет ясным, что теорема 15 является по своему характеру широким обобщением теоремы Мандельбройта.

§ 11. Применение к последовательностям линейных агрегатов, составленных из полиномов Якоби

Начиная с этого параграфа, мы будем рассматривать некоторые частные случаи уравнения

$$Dy \equiv \sum_{j=0}^{s} Q_j(z)\, y^{(s-j)}(z) = \lambda_m y$$

и к последовательностям линейных агрегатов, составленных из решений такого уравнения, будем применять ранее доказанные положения. Ради простоты формулировок будем предполагать $\tau = 0$.

Уравнение

$$Dy \equiv y'' = \mu_m^2\, y$$

(здесь $s = 2$, $\lambda_m = \mu_m^2$) доставляет первый простейший случай. Его решениями будут функции $e^{\pm\mu_m z}$, а соответствующими последовательностями — последовательности полиномов Дирихле

$$P_m(z) = \sum_{j=1}^{p_m} (a_{mj}\, e^{-\mu_j z} + b_{mj}\, e^{\mu_j z}) \quad (m = 1,\ 2, \ldots).$$

Однако, принимая во внимание, что такие последовательности уже хорошо изучены [см. ([8])], мы не будем на этом случае останавливаться.

Случай

$$Dy \equiv z^2 y'' + z y' = \mu_m^2 y$$

(здесь решениями будут функции $z^{\pm\mu_m}$) заменой z на e^z сводится к предыдущему случаю.

К последовательности полиномов Дирихле легко сводится также последовательность агрегатов, составленных из полиномов Чебышева $T_n(z)$ $(n = 1,\ 2, \ldots)$, удовлетворяющих, как известно, уравнению

$$Dy \equiv (1 - z^2)\, y'' - 2zy' = n^2 y.$$

В самом деле, если учесть, что

$$T_n(z) = \frac{1}{2^n}(e^{nt} + e^{-nt}), \quad t = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

то станет ясным, что, положив в последовательности полиномов Дирихле

$$\mu_j = n_j, \quad a_{mj} = b_{mj} = 2^{-n_j} c_{mj}$$

и заменив z на $\ln(z+\sqrt{z^2-1})$, мы получим последовательность агрегатов

$$\sum_{j=1}^{p_m} c_{mj} T_{n_j}(z),$$

составленных из полиномов Чебышева. Таким образом, свойства этой последовательности могут быть получены без всякого труда из свойств последовательности полиномов Дирихле.

Новый и, насколько нам известно, еще не исследованный случай мы получим, если будем отправляться от уравнения

$$Dy \equiv (1-z^2)\,y'' + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)\,z]\,y' = -n_m(n_m+\alpha+\beta+1)\,y, \quad (1)$$

где α и β — действительные числа, n_m — целые положительные числа. Одним из двух его частных решений является полином Якоби $P_{n_m}^{(\alpha,\beta)}(z)$ степени n_m.

Отметим следующее асимптотическое представление полиномов Якоби [см. ([12]), стр. 190]: вне отрезка $[-1, +1]$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z) \cong (z-1)^{-\frac{\alpha}{2}}(z+1)^{-\frac{\beta}{2}}\left\{(z+1)^{\frac{1}{2}}+(z-1)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\alpha+\beta}(2\pi n)^{-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times (z^2-1)^{-\frac{1}{4}}\left\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\right\}^{n+\frac{1}{2}}.$$

Участвующие здесь степени выбраны так, что они имеют положительные значения при действительных $z>1$. Представление является равномерным в том смысле, что отношение левой части к правой вне любой замкнутой кривой Γ, охватывающей отрезок $[-1, +1]$, равномерно при $n\to\infty$ стремится к единице.

Очевидно, что

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = C_n^n(z)\left\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\right\}^n, \quad (2)$$

где $C_n(z)$ вне указанной кривой Γ при $n\to\infty$ равномерно стремится к единице.

Из представления (2) следует, что если мы имеем ряд по полиномам Якоби

$$\sum_{n-1}^{\infty} a_n P_n^{(\alpha,\beta)}(z),$$

то он сходится внутри некоторого эллипса с фокусами в точках $z=\pm 1$. Далее, из представления (2) следует, что если точка z_0 не лежит на отрезке $[-1, +1]$, то ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_{n_m}^{(\alpha,\beta)}(z)}{P_{n_m}^{(\alpha,\beta)}(z_0)}, \quad (3)$$

где $n_1, n_2, \ldots$ — любая возрастающая последовательность положительных чисел, сходится равномерно внутри эллипса с фокусами $z=\pm 1$, проходящего через точку z_0.

Чтобы результаты предыдущих параграфов применить к последовательностям агрегатов, составленных из полиномов Якоби, положим в предыдущих исследованиях

$$y(z, \lambda_m) = P_{n_m}^{(\alpha, \beta)}(z).$$

В соответствии с этим

$$\lambda_m = -n_m(n_m + \alpha + \beta + 1).$$

Нетрудно видеть, что для таких λ_m

$$|\lambda_{m+1}|^{\frac{1}{s}} - |\lambda_m|^{\frac{1}{s}} = |\lambda_{m+1}|^{\frac{1}{2}} - |\lambda_m|^{\frac{1}{2}} \geqslant h > 0$$

(при больших m указанная разность больше любого числа, меньшего единицы). Следовательно, в рассматриваемом случае величина $\delta = 0$.

Имея в виду все эти факты, мы из общих теорем применительно к полиномам Якоби получим следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 16. *Пусть последовательность агрегатов*

$$f_k(z) = \sum_{m=1}^{p_k} a_{km} P_{n_m}^{(\alpha, \beta)}(z) \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

равномерно сходится в некоторой области K и пусть выполняется условие

$$\lim_{m \to \infty} \frac{m}{n_m} = \tau = 0.$$

Тогда:

1) *последовательность* (4) *равномерно сходится внутри некоторого эллипса с фокусами в точках $z = \pm 1$, содержащего внутри себя область K;*

2) *существуют пределы* $\lim_{k \to \infty} a_{km} = a_m \quad (m = 1, 2, \ldots)$;

3) *ряд*

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m P_{n_m}^{(\alpha, \beta)}(z)$$

сходится к предельной функции $f(z)$ последовательности (4) *во всей области существования $f(z)$; следовательно, эта область есть внутренность некоторого эллипса с фокусами $z = \pm 1$ (сам эллипс является для $f(z)$ купюрой).*

Сделаем пояснение к первому утверждению теоремы. По условию, последовательность (4) равномерно сходится внутри области K. Возьмем в этой области точку z_0, не лежащую на отрезке $[-1, +1]$. Образуем ряд (3); он сходится внутри эллипса C с фокусами в $z = \pm 1$, проходящего через точку z_0. Внутри C, по теореме 12, сходится и последовательность (4). Поскольку для каждой точки $\xi \in K$ всегда можно указать такую точку $z_0 \notin [-1, +1]$, чтобы ξ лежала внутри указанного эллипса C, получаем, что последовательность (4) сходится внутри некоторого эллипса с фокусами в $z = \pm 1$, содержащего область K.

Другие утверждения теоремы не нуждаются в пояснении.

ТЕОРЕМА 17. *Пусть в условиях предыдущей теоремы предельная функция* $f(z)$ *последовательности* (4) *является аналитической внутри некоторого угла с вершиной в начале (тогда, в силу предыдущей теоремы,* $f(z)$ *будет целой). Если внутри указанного угла функция* $f(z)$ *ограничена, то* $f(z) \equiv 0$.

В заключение отметим, что при $\alpha = \beta = 0$ полиномы Якоби становятся полиномами Лежандра $P_n(z)$.

§ 12. О последовательностях линейных агрегатов, составленных из решений первого и второго рода уравнения полиномов Якоби

Уравнение (1) предыдущего параграфа имеет второе решение, линейно независимое от $P_{n_m}^{(\alpha, \beta)}(z)$. Его обозначают через $Q_{n_m}^{(\alpha, \beta)}(z)$. Если $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $\alpha + \beta + 1 \neq 0$ и $n > 0$, то имеет место следующее асимптотическое представление [см. ([12]), стр. 219]: вне отрезка $[-1, +1]$

$$Q_n^{(\alpha, \beta)}(z) \cong (z-1)^{-\alpha}(z+1)^{-\beta} n^{-\frac{1}{2}} \Phi(z) \{z - \sqrt{z^2-1}\}^{n+1},$$

где $|z - \sqrt{z^2-1}| < 1$, функция $\Phi(z)$ не зависит от n и вне $[-1, +1]$ регулярна и отлична от нуля. Представление является равномерным в том же смысле, в каком было равномерным представление для $P_n^{(\alpha, \beta)}(z)$. Мы имеем:

$$Q_n^{(\alpha, \beta)}(z) = D_n^n(z) \{z - \sqrt{z^2-1}\}^n, \tag{1}$$

где функция $D_n(z)$ вне замкнутой кривой Γ, охватывающей отрезок $[-1, +1]$, равномерно стремится к единице при $n \to \infty$.

Из представления (1) следует, что ряд по функциям $Q_n^{(\alpha, \beta)}(z)$ сходится вне эллипса с фокусами в точках $z = \pm 1$; в частности, ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{Q_{n_m}^{(\alpha, \beta)}(z)}{Q_{n_m}^{(\alpha, \beta)}(z_0)},$$

где $z_0 \notin [-1, +1]$, сходится равномерно вне эллипса с фокусами в $z = \pm 1$, проходящего через точку z_0. Отсюда следует

ТЕОРЕМА 18. *Пусть последовательность агрегатов*

$$\varphi_k(z) = \sum_{m=1}^{p_k} b_{km} Q_{n_m}^{(\alpha, \beta)}(z) \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

равномерно сходится в некоторой области, и пусть выполняется условие

$$\lim_{m \to \infty} \frac{m}{n_m} = \tau = 0.$$

Тогда:

1) *последовательность* (2) *равномерно сходится вне некоторого эллипса с фокусами* $z = \pm 1$;

2) *существуют пределы*

$$\lim_{k\to\infty} b_{km} = b_m \quad (m=1,\ 2,\ \ldots);$$

3) *ряд*

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m Q_{n_m}^{(\alpha,\beta)}(z)$$

сходится к предельной функции $\varphi(z)$ *во всей области существования* $\varphi(z)$; *следовательно, эта область есть внешность некоторого эллипса с фокусами в* $z=\pm 1$.

Рассмотрим теперь последовательность линейных агрегатов, составленных как из полиномов Якоби, так и из функций $Q_{n_m}^{(\alpha,\beta)}(z)$:

$$\Phi_k(z) = \sum_{m=1}^{p_k} [a_{km} P_{n_m}^{(\alpha,\beta)}(z) + b_{km} Q_{n_m}^{(\alpha,\beta)}(z)] \quad (k=1,\ 2,\ \ldots). \tag{3}$$

Мы предположим, что она равномерно сходится в некоторой области K, причем K не содержит точек отрезка $[-1,\ +1]$ (точки $z=\pm 1$ являются особыми для $Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)$). Пусть, кроме того,

$$\tau = \lim_{m\to\infty} \frac{m}{n_m} = 0.$$

В соответствии с методикой § 9 для исследования вопроса о сходимости последовательности (3) в большей области надо рассмотреть систему

$$\begin{aligned} \alpha_k(\lambda_m) &= a_{km} P_{n_m}^{(\alpha,\beta)}(z_0) + b_{km} Q_{n_m}^{(\alpha,\beta)}(z_0), \\ \beta_k(\lambda_m) &= \alpha_{km} \frac{d}{dz} P_{n_m}^{(\alpha,\beta)}(z_0) + b_{km} \frac{d}{dz} Q_{n_m}^{(\alpha,\beta)}(z_0), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\lambda_m = -n_m(n_m+\alpha+\beta+1)$. Решая ее относительно a_{km} и b_{km}, получим:

$$a_{km} = \alpha_k(\lambda_m) A_m^{(1)} + \beta_k(\lambda_m) B_m^{(1)},$$

$$b_{km} = \alpha_k(\lambda_m) A_m^{(2)} + \beta_k(\lambda_m) B_m^{(2)},$$

где

$$A_m^{(1)} = \frac{1}{\Delta} \frac{d}{dz} Q_{n_m}^{(\alpha,\beta)}(z_0), \qquad B_m^{(1)} = -\frac{1}{\Delta} Q_{n_m}^{(\alpha,\beta)}(z_0),$$

$$A_m^{(2)} = -\frac{1}{\Delta} \frac{d}{dz} P_{n_m}^{(\alpha,\beta)}(z_0), \qquad B_m^{(2)} = \frac{1}{\Delta} P_{n_m}^{(\alpha,\beta)}(z_0)$$

и Δ — определитель системы (4).

Воспользуемся асимптотическими представлениями (2) из § 11 и равенством (1) из § 12 для полиномов Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ и функций $Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)$. При этом заметим, что так как участвующие в этих представлениях функции $C_n(z)$ и $D_n(z)$ стремятся при $n\to\infty$ равномерно в указанном ранее смысле к единице, то их производные $C_n'(z)$ и $D_n'(z)$ в точке z_0 стремятся к нулю при $n\to\infty$.

Имеем:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(z_0) = C_n^n(z_0)(z_0 + \sqrt{z_0^2 - 1})^n = [1 + o(1)]^n (z_0 + \sqrt{z_0^2 - 1})^n,$$

$$\frac{d}{dz} P_n^{(\alpha, \beta)}(z_0) = n C_n^{n-1}(z_0)(z_0 + \sqrt{z_0^2 - 1})^n \left[C_n'(z_0) + \frac{C_n(z_0)}{\sqrt{z_0^2 - 1}} \right] =$$

$$= [1 + o(1)]^n (z_0 + \sqrt{z_0^2 - 1})^n,$$

$$Q_n^{(\alpha, \beta)}(z_0) = D_n^n(z_0)(z_0 - \sqrt{z_0^2 - 1})^n = [1 + o(1)] \ (z_0 - \sqrt{z_0^2 - 1})^n,$$

$$\frac{d}{dz} Q_n^{(\alpha, \beta)}(z_0) = n D_n^{n-1}(z_0)(z_0 - \sqrt{z_0^2 - 1})^n \left[D_n'(z_0) - \frac{D_n(z_0)}{\sqrt{z_0^2 - 1}} \right] =$$

$$= [1 + o(1)]^n (z_0 - \sqrt{z_0^2 - 1})^n.$$

Отсюда (вместо n_m пишем пока n) выводим:

$$\Delta = - n C_n^{n-1}(z_0) D_n^{n-1}(z_0) \left\{ C_n(z_0) \left[\frac{D_n(z_0)}{\sqrt{z_0^2 - 1}} - D_n'(z_0) \right] + \right.$$

$$\left. + D_n(z_0) \left[\frac{C_n(z_0)}{\sqrt{z_0^2 - 1}} + C_n'(z_0) \right] \right\}.$$

Так как фигурная скобка при $n \to \infty$ стремится к $\dfrac{2}{\sqrt{z_0^2 - 1}} \neq 0$, то

$$\frac{1}{\Delta} = [1 + o(1)]^{n_m}.$$

На основании всего этого получаем:

$$A_m^{(1)} = [1 + o(1)]^{n_m} q^{n_m}, \quad q = z_0 - \sqrt{z_0^2 - 1}, \quad |q| < 1,$$

$$B_m^{(1)} = [1 + o(1)]^{n_m} q^{n_m} \tag{5}$$

и, аналогично,

$$A_m^{(2)} = [1 + o(1)]^{n_m} q^{-n_m}, \quad B_m^{(2)} = [1 + o(1)]^{n_m} q^{-n_m}. \tag{6}$$

Образуем ряды:

$$F_1^{(1)}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(1)} P_{n_m}^{(\alpha, \beta)}(z), \quad F_2^{(1)}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m^{(1)} P_{n_m}^{(\alpha, \beta)}(z).$$

В силу (5), эти ряды одновременно равномерно сходятся в эллипсе с фокусами в $z = \pm 1$, проходящем через точку z_0. Внутри этого эллипса, согласно теореме 13 (в нашем случае $\delta = 0$ и $\sigma = 0$), равномерно сходится последовательность

$$f_k(z) = \sum_{m=1}^{p_k} a_{km} P_{n_m}^{(\alpha, \beta)}(z) \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Точка z_0 была произвольной в области K. Таким образом, последовательность (7) равномерно сходится внутри некоторого эллипса C_1 с фокусами в $z = \pm 1$, который содержит в себе указанную область K.

Образуя ряды

$$F_1^{(2)}(z)=\sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(2)} Q_{n_m}^{(\alpha,\beta)}(z), \quad F_2^{(2)}(z)=\sum_{m=1}^{\infty} B_m^{(2)} Q_{n_m}^{(\alpha,\beta)}(z)$$

(они, согласно оценкам (6), одновременно равномерно сходятся вне эллипса с фокусами в $z=\pm 1$, проходящего через точку z_0), аналогичным образом убедимся в том, что последовательность

$$\varphi_k(z)=\sum_{m=1}^{\nu_k} b_{km} Q_{n_m}^{(\alpha,\beta)}(z) \quad (k=1,2,\ldots) \tag{8}$$

равномерно сходится вне некоторого эллипса C_2 с фокусами в $z=\pm 1$, причем область K лежит вне C_2. Отсюда выводим, что исходная последовательность (3), равномерно сходясь в области K, тем самым равномерно сходится внутри кольца, ограниченного эллипсами C_1 и C_2, причем это кольцо содержит в себе область K. Итак, мы получили следующую теорему.

ТЕОРЕМА 19. *Пусть последовательность* (3) *равномерно сходится в некоторой области* K (*область* K *не содержит точек отрезка* $[-1, +1]$), *и пусть выполняется условие*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m}{n_m}=\tau=0.$$

Тогда:

1) *последовательность* (7) *равномерно сходится внутри некоторого эллипса* C_1 *с фокусами в* $z=\pm 1$, *содержащего внутри область* K;

2) *последовательность* (8) *равномерно сходится вне некоторого эллипса* C_2 *с фокусами в* $z=\pm 1$, *причем область* K *лежит вне* C_2;

3) *исходная последовательность* (3) *равномерно сходится внутри кольца, ограниченного эллипсами* C_1 *и* C_2.

§ 13. Применение к последовательностям линейных агрегатов, образованных из полиномов Чебышева — Лагерра

Полиномы Чебышева — Лагерра $L_n^{(\alpha)}(z)$ удовлетворяют уравнению

$$Dy \equiv zy''+(\alpha+1-z)\,y'=-ny,$$

где α — произвольное действительное число. В каждой замкнутой области, которая не содержит точек отрезка $[0, +\infty)$, имеет место равномерно следующее асимптотическое представление [см. ([12]), стр. 193]:

$$L_n^{(\alpha)}(z) \cong \frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{z}{2}} (-z)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \exp\{2(-nz)^{\frac{1}{2}}\}. \tag{1}$$

Участвующие здесь степени выбраны так, что они имеют действительные и положительные значения при действительных $z<0$.

Из представления (1) следует, что ряд по полиномам $L_n^{(\alpha)}(z)$ сходится всюду (за исключением луча $[0, +\infty)$), внутри некоторой параболы

C с фокусом в начале и осью — положительной частью действительной оси. В частности, ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{L_{n_m}^{(\alpha)}(z)}{L_{n_m}^{(\alpha)}(z_0)},$$

где $n_1, n_2, \ldots$ — возрастающая последовательность чисел, а z_0 — какая-нибудь точка, не лежащая на луче $[0, +\infty)$, сходится (равномерно) всюду внутри (за исключением луча $[0, +\infty)$) параболы указанного выше вида, проходящей через точку z_0.

Чтобы применить общие теоремы к последовательностям агрегатов, составленных из полиномов Чебышева — Лагерра, положим

$$y(z, \lambda_m) = L_{n_m}^{(\alpha)}(z).$$

В соответствии с этим $\lambda_m = -n_m$, и мы будем требовать, поскольку $s = 2$, выполнения условия:

$$\lim_{m \to \infty} \frac{m}{\sqrt{n_m}} = \tau = 0. \quad (2)$$

Следует отметить, что в рассматриваемом случае величина δ вообще не равна нулю; в частности, можно привести примеры последовательностей $\{\lambda_m = -n_m\}$ со свойством (2), для которых $\delta = \infty$.

Имея в виду все изложенные факты, мы из общих теорем получим применительно к рассматриваемым последовательностям агрегатов следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 20. *Пусть последовательность агрегатов*

$$f_k(z) = \sum_{m=1}^{p_k} a_{km} L_{n_m}^{(\alpha)}(z) \quad (k = 1, 2, \ldots) \quad (3)$$

равномерно сходится в некоторой области K и пусть выполняется условие (2). *Тогда*:

1) *существуют пределы*

$$\lim_{k \to \infty} a_{km} = a_m \quad (m = 1, 2, \ldots);$$

2) *последовательность новых агрегатов*

$$\psi_k(z) = \sum_{m=1}^{k} a_m L_{k+1,\infty}(\lambda_m) L_{n_m}^{(\alpha)}(z) \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

где

$$L_{k+1,\infty}(z) = \prod_{\mu=k+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_\mu}\right), \quad \lambda_\mu = -n_\mu,$$

равномерно сходится к предельной функции $f(z)$ последовательности (3) *внутри всей области существования $f(z)$; следовательно, эта область односвязна и однолистна*;

3) *существует подпоследовательность частных сумм порядков* m_k $(k=1, 2, \ldots)$ (*числа* m_k *зависят только от* $\{n_m\}$) *ряда*

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m L_{n_m}^{(\alpha)}(z), \tag{4}$$

сходящаяся равномерно к $f(z)$ *во всей области существования* $f(z)$.

ТЕОРЕМА 21. *Пусть в условиях предыдущей теоремы функция* $f(z)$ *регулярна и ограничена внутри некоторого угла с вершиной в начале. Тогда* $f(z)\equiv 0$.

ТЕОРЕМА 22. *Пусть наряду с условиями теоремы 20 выполняется еще условие*

$$\sqrt{n_{m+1}}-\sqrt{n_m}\geqslant h>0. \tag{5}$$

Тогда:

1) *последовательность* (3) *сходится равномерно внутри* (*за исключением, быть может, отрезка* $[0, +\infty)$) *некоторой параболы с вершиной в начале и осью — положительной частью действительной оси*;

2) *ряд* (4) *сходится к* $f(z)$ *во всей области существования* $f(z)$; *следовательно, эта область есть внутренность* (*за исключением, быть может, луча* $[0, +\infty)$) *параболы с вершиной в начале, у которой осью служит луч* $[0, +\infty)$.

Остался невыясненным вопрос, будет ли без требования (5) область существования $f(z)$ внутренностью некоторой параболы?

§ 14. Применение к последовательностям линейных агрегатов, составленных из полиномов Чебышева — Эрмита

Полиномы Чебышева — Эрмита $H_n(z)$ удовлетворяют уравнению

$$y''-2zy'=-2ny.$$

Известно [см. ([12]), стр. 197], что в любой ограниченной замкнутой области, не содержащей точек действительной оси, равномерно

$$\frac{1}{\sqrt{2n}}\ln\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma(n+1)}|H_n(z)|\right\}\xrightarrow[n\to\infty]{}|\operatorname{Im}(z)|$$

(для действительных z верхний предел левой части при $n\to\infty$ будет не больше нуля). Из этого факта вытекает, что ряд по полиномам Чебышева — Эрмита

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n H_n(z)$$

сходится в некоторой горизонтальной полосе $|\operatorname{Im}(z)|<\alpha$, причем равномерно на любом замкнутом ограниченном множестве, не содержащем точек действительной оси. В частности, ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{H_{n_m}(z)}{H_{n_m}(z_0)},$$

где $n_1, n_2, \ldots$ — некоторая последовательность положительных чисел, а точка z_0 не лежит на действительной оси, сходится в полосе $|\operatorname{Im}(z)| < |\operatorname{Im}(z_0)|$.

Чтобы в рассматриваемом случае использовать общие теоремы, положим в них

$$y(z, \lambda_m) = H_{n_m}(z).$$

В соответствии с этим $\lambda_m = -2n_m$, и мы получаем следующие предложения.

ТЕОРЕМА 23. *Пусть последовательность агрегатов*

$$f_k(z) = \sum_{m=1}^{p_k} a_{km} H_{n_m}(z) \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

равномерно сходится внутри некоторой области K (будем предполагать, что область K не содержит точек действительной оси), и пусть выполняется условие

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m}{\sqrt{n_m}} = \tau = 0. \tag{2}$$

Тогда:

1) *существуют пределы*

$$\lim_{k\to\infty} a_{km} = a_m \quad (m = 1, 2, \ldots);$$

2) *последовательность новых агрегатов*

$$\psi_k(z) = \sum_{m=1}^{k} a_m L_{k+1,\infty}(\lambda_m) H_{n_m}(z) \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

где

$$L_{k+1,\infty}(z) = \prod_{\mu=k+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_\mu}\right), \quad \lambda_\mu = -2n_\mu,$$

сходится равномерно к предельной функции $f(z)$ последовательности (1) *внутри всей области существования $f(z)$; следовательно, эта область односвязна и однолистна;*

3) *существует подпоследовательность частных сумм порядков m_k $(k = 1, 2, \ldots)$ (числа m_k зависят только от $\{n_m\}$) ряда*

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m H_{n_m}(z), \tag{3}$$

сходящаяся равномерно к $f(z)$ во всей области существования $f(z)$.

ТЕОРЕМА 24. *Пусть в условиях предыдущей теоремы функция $f(z)$ регулярна и ограничена внутри некоторого угла с вершиной в начале. Тогда $f(z) \equiv 0$.*

ТЕОРЕМА 25. *Пусть наряду с условиями теоремы 23 выполняется еще условие*

$$\sqrt{n_{m+1}} - \sqrt{n_m} \geqslant h > 0. \tag{4}$$

Тогда:

1) *последовательность* (1) *равномерно сходится внутри полос* $0 < \operatorname{Im}(z) < \alpha$, $-\alpha < \operatorname{Im}(z) < 0$, *причем область* K *содержится в одной из этих полос;*

2) *ряд* (3) *равномерно сходится к* $f(z)$ *во всей области существования, следовательно, эта область представляет собой горизонтальную полосу одного из следующих трех видов:*

$$|\operatorname{Im}(z)| < \beta, \quad 0 < \operatorname{Im}(z) < \beta, \quad -\beta < \operatorname{Im}(z) < 0.$$

Из последней теоремы в качестве следствия получается следующий результат Е. Хилла (4): пусть ряд (3) сходится в некоторой полосе $|\operatorname{Im}(z)| < \beta$ к функции $f(z)$ и расходится вне ее. Тогда при соблюдении условий (2) и (4) прямые $\operatorname{Im}(z) = \pm\beta$ являются для функции $f(z)$ естественными границами.

§ 15. Применение к последовательностям линейных агрегатов, составленных из цилиндрических функций

Уравнение цилиндрических функций

$$z^2y'' + zy' + (z^2 - p^2)\, y = 0$$

имеет в качестве своих решений цилиндрические функции разных родов. Мы ограничимся рассмотрением цилиндрической функции Ханкеля первого рода $H_p^{(1)}(z)$. Она регулярна всюду, кроме начала, и имеет для $z = re^{\varphi i}$, $-\pi < \varphi < 2\pi$, следующее асимптотическое представление [см. (13), стр. 79]:

$$H_p^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{i\left(z - \frac{2p+1}{4}\pi\right)}\left[1 + o\left(\frac{1}{z}\right)\right].$$

Ради удобства нам в дальнейшем лучше иметь дело с функцией

$$K_p(z) = \frac{i\pi}{2}\, e^{\frac{ip\pi}{2}} H_p^{(1)}(z).$$

Она действительна при действительных значениях z, удовлетворяет уравнению

$$z^2y'' + zy' - (z^2 + p^2)\, y = 0$$

и имеет асимптотическое представление

$$K_p(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}\left[1 + o\left(\frac{1}{z}\right)\right], \quad -\frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}. \tag{1}$$

Пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ — некоторая последовательность положительных чисел. Рассмотрим функции $K_p(\mu_m z)$. Они удовлетворяют уравнению

$$y'' + \frac{1}{z}\, y' - \frac{p^2}{z^2}\, y = \mu_m^2 y.$$

Здесь $s = 2$, $Q_0(z) = 1$, $Q_1(z) = \frac{1}{z}$, $Q_2(z) = -\frac{p^2}{z^2}$, $\lambda_m = \mu_m^2$. Пред-

положим, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m}{\mu_m} = \tau = 0 \tag{2}$$

и последовательность линейных агрегатов

$$f_k(z) = \sum_{m=1}^{p_k} a_{km} K_p(\mu_m z) \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

$(K_p(\mu_m z) = y(z, \lambda_m))$ равномерно сходится в некоторой области K. Пусть z_0 — некоторая точка этой области, не лежащая на отрицательной части действительной оси, и $z_0 \neq 0$. В силу теоремы 10, существует последовательность целых функций $\{\omega_k(z)\}$ со свойствами:

1) $|\omega_k(z)| < \exp(\varepsilon |z|^{\frac{1}{2}}), \quad |z| > r_0(\varepsilon)$,

2) в любой ограниченной области $\{\omega_k(z)\}$ равномерно сходится,

3) $\omega_k(\lambda_m) = a_{km} K_p(\mu_m z_0) L'_{1,\infty}(\lambda_m)$ при $m \leqslant p_k$ и $\omega_k(\lambda_m) = 0$ при $m > p_k$

где

$$L_{1,\infty}(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_m}\right).$$

Рассмотрим выражение

$$\widetilde{f}_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\omega_k(t) K_p(\sqrt{t}\, z)}{L(t) K_p(\sqrt{t}\, z_0)} dt, \tag{4}$$

где C — бесконечный контур, идущий из ∞ по лучу $\arg t = \varepsilon$ до некоторой его точки t_0, от точки t_0 — по вертикали до точки t_1 луча $\arg t = -\varepsilon$ и возвращающийся из t_1 вдоль луча $\arg t = -\varepsilon$ в ∞. Точку t_0 выберем при этом так далеко от начала, чтобы внутри контура C функция $K(\sqrt{t}\, z_0)$ не обращалась в нуль. На основании асимптотического представления (1) это сделать можно. На основании того же представления и неравенства

$$\left|\frac{1}{L(t)}\right| < e^{\delta |t|^{\frac{1}{2}}}, \quad t \in C, \quad |t| > t_0(\delta)$$

[см. ([8]), стр. 167], где δ — любое число, большее нуля, подынтегральная функция в интеграле (4) имеет оценку:

$$\left|\frac{\omega_k(t) K_p(\sqrt{t}\, z)}{L(t) K_p(\sqrt{t}\, z_0)}\right| < |e^{-(z - z_0 - \delta_1)\sqrt{t}}|, \quad t \in C, \quad |t| > t_1(\delta_1), \tag{5}$$

где δ_1 — любое положительное число, $t_1(\delta_1)$ не зависит от k и точку z мы считаем лежащей в области A — плоскости с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси. Из оценки (5) видно, что, какова бы ни была ограниченная замкнутая область G, лежащая в A правее прямой $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z_0)$, число ε (оно входит в определение контура C) можно выбрать настолько малым, чтобы правая часть в неравенстве (5) была

меньше $\exp(-\delta_2 |t|^{\frac{1}{2}})$ $(\delta_2 > 0)$ для всех $z \in G$, $t \in C$, $|t| > t_2$. Следовательно, имея в виду (4), можно утверждать, поскольку $\{\omega_k(z)\}$ в любой ограниченной области сходится равномерно, что последовательность $\{\tilde{f}_k(z)\}$ в области G сходится равномерно.

Пусть в $\{\mu_m\}$ первой точкой, попавшей внутрь C, будет точка μ_{n_1}. В силу (4) и свойства 3) функций $\omega_k(z)$, имеем:

$$\tilde{f}_k(z) = \sum_{m=n_1}^{p_k} a_{km} K_p(\mu_m z).$$

Отметим, что так как существуют пределы

$$\lim_{k\to\infty} a_{km} = a_m \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

и n_1 — фиксированное число, то в произвольной ограниченной области, в частности в области G равномерно сходится последовательность

$$f_k^*(z) = \sum_{m=1}^{n_1-1} a_{km} K_p(\mu_m z).$$

Принимая во внимание, что

$$f_k(z) = \tilde{f}_k(z) + f_k^*(z),$$

мы видим, что в области G равномерно сходится исходная последовательность (3). Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 26. *Если последовательность* (3) *равномерно сходится в области* K (*будем предполагать, что* K *не содержит точек отрицательной части действительной оси*) *и выполняется условие* (2), *то*:

1) *она сходится в некоторой полуплоскости* $\mathrm{Re}(z) > \alpha$, *разрезанной вдоль отрицательной части действительной оси и содержащей внутри область* K;

2) *последовательность новых агрегатов*

$$\psi_k(z) = \sum_{m=1}^{k} a_m L_{k+1,\infty}(\lambda_m) K_p(\mu_m z) \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

где $a_m = \lim\limits_{k\to\infty} a_{km}$, *сходится к предельной функции* $f(z)$ *во всей области существования* $f(z)$, *за исключением точки* $z = 0$; *эта область, следовательно, с точностью до точек отрицательной части действительной оси, есть полуплоскость* $\mathrm{Re}(z) > \alpha$;

3) *существует подпоследовательность частных сумм ряда*

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m K_p(\mu_m z), \tag{6}$$

сходящаяся к $f(z)$ *во всей области существования, за исключением точки* $z = 0$.

ТЕОРЕМА 27. *Если в условиях предыдущей теоремы функция $f(z)$ аналитически продолжима неограниченно налево вдоль некоторого канала, описываемого кругом постоянного радиуса $d>0$ при движении центра вдоль некоторой кривой, и в этом канале она ограничена, то $f(z)\equiv 0$.*

Отметим, что в силу асимптотического представления (1) ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{K_p(\mu_m z)}{K_p(\mu_m z_0)},$$

где $z_0 \notin (-\infty, 0]$, сходится в полуплоскости $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_0)$, разрезанной вдоль луча $(-\infty, 0]$. Имея это в виду, можно утверждать справедливость следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 28. *Если, кроме условий теоремы* 26, *выполняется еще условие*

$$\mu_{m+1} - \mu_m \geqslant h > 0,$$

то ряд (6) *сходится к $f(z)$ во всей полуплоскости* $\operatorname{Re}(z) > \alpha$ (*разрезанной вдоль луча* $(-\infty, 0]$), *в которой $f(z)$ регулярна.*

В заключение этого параграфа отметим, что ряды по цилиндрическим функциям, точнее ряды вида

$$h(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m (i\lambda_m z)^{\frac{1}{2}} H_p^{(1)}(i\lambda_m z),$$

с точки зрения изучения областей простой, абсолютной и равномерной сходимости, а также поведения на прямой сходимости рассматривались в работе ([14]).

§ 16. О некоторых нерешенных вопросах

Предыдущие исследования показывают, что относительно последовательностей линейных агрегатов, составленных из решений рассматриваемого в работе уравнения

$$Dy = \lambda_j y,$$

имеет место ряд теорем, аналогичных теоремам относительно последовательностей полиномов Дирихле. Однако на изучаемые здесь последовательности мы еще не умеем переносить в соответствующем виде наиболее тонкие теоремы теории последовательностей полиномов Дирихле. Мы имеем в виду, например, следующую теорему, которую назовем теоремой А:

пусть $0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_m<\ldots$ и существует предел

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m}{\lambda_m} = \tau > 0.$$

Если последовательность полиномов Дирихле

$$P_m(z) = \sum_{j=1}^{p_m} (a_{mj} e^{-\lambda_j z} + b_{mj} e^{\lambda_j z}) \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

равномерно сходится в области, содержащей замкнутый вертикальный отрезок длиной $2\pi\tau$, то последовательности

$$Q_m(z) = \sum_{j=1}^{l_m} a_{mj} e^{-\lambda_j z} \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

и

$$R_m(z) = \sum_{j=1}^{p_m} b_{mj} e^{-\lambda_j z} \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

равномерно сходятся соответственно внутри некоторых полуплоскостей $\operatorname{Re}(z) > \alpha$ и $\operatorname{Re}(z) < \beta$, а значит исходная последовательность равномерно сходится в полосе $\alpha < \operatorname{Re}(z) < \beta$.

Аналогичной теоремой для последовательностей агрегатов, образованных, например, из полиномов Якоби, должна быть, по-видимому, следующая теорема: пусть целые числа $n_1, n_2, \ldots, n_m, \ldots$ таковы, что существует предел

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m}{n_m} = \tau > 0.$$

Если последовательность

$$P_m(z) = \sum_{j=1}^{p_m} a_{mj} P_{n_j}^{(\alpha,\beta)}(z) \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

равномерно сходится в области, содержащей дугу определенной длины (зависящей от τ) эллипса с фокусами в точках $z = \pm 1$, то она равномерно сходится внутри некоторого эллипса с фокусами в точках $z = \pm 1$.

Какими путями можно было бы попытаться перенести теорему А на изучаемые здесь последовательности линейных агрегатов?

Успех дела в случае последовательностей полиномов Дирихле был обеспечен возможностью представления оператора

$$M(y) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m D^m y, \quad Dy \equiv y',$$

в интегральной форме:

$$M(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_z} \gamma(t - z)\, y(t)\, dt,$$

где

$$\gamma(u) = \int_0^{\infty} L(\lambda)\, e^{-u\lambda}\, d\lambda, \qquad (1)$$

$$L(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \gamma(u)\, e^{\lambda u} du.$$

Здесь C_z — контур, охватывающий особые точки функции $\gamma(t-z)$ (в случае $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{m}{\lambda_m} = \tau$ они расположены на вертикальном отрезке длиной $2\pi\tau$ с центром в точке z), внутри которого функция $y(t)$ — аналитическая.

В общем случае роль ядер $e^{\pm\lambda u}$ в преобразованиях (1) будут играть, по-видимому, решения $y(z, \lambda)$ уравнения

$$Dy = \lambda y.$$

Следовательно, в общем случае можно попытаться сперва изучить преобразование

$$\gamma(u) = \int_0^\infty L(\lambda)\, y\ (u, \lambda)\, d\lambda$$

и возможность его обращения, а затем при помощи этого преобразования получить и изучить интегральное представление для оператора $M(y)$.

Решение более простой задачи — изучения асимптотического поведения ядра $y(z, \lambda)$ при больших $|\lambda|$ и z, лежащих в ограниченной области, — позволило бы и в простейшем случае $\tau = 0$ (как это сделано у нас в отношении агрегатов из цилиндрических функций) определить вид области сходимости последовательности линейных агрегатов, когда эта область отлична от области сходимости соответствующего ряда. Так, рассматривая агрегаты из полиномов Чебышева — Лагерра или Чебышева — Эрмита, мы ничего не могли сказать (см. теоремы 20 и 23) о форме области сходимости (кроме того, что она односвязна) без дополнительного предположения

$$|\lambda_{m+1}|^{\frac{1}{2}} - |\lambda_m|^{\frac{1}{2}} \geqslant h > 0,$$

тогда как есть все основания ожидать, что и без этого предположения область сходимости в случае полиномов Чебышева — Лагерра будет внутренностью параболы, а в случае полиномов Чебышева — Эрмита — горизонтальной полосой.

Поступило
27. V. 1957

ЛИТЕРАТУРА

1 Леонтьев А. Ф., О свойствах последовательностей линейных агрегатов, сходящихся в области, где порождающая линейные агрегаты система функций не является полной, Успехи матем. наук, XI, вып. 5 (71) (1956), 26—37.

2 Леонтьев А. Ф., О последовательностях полиномов Дирихле, Труды 3-го Всесоюзн. матем. съезда, III, 1958.

3 Carmichael R. D., Linear differential equations of infinite order, Bull. Amer. Math. Soc., XLII, № 4 (1936), 193—218.

4 Hille E., Contributions to the theory of Hermitian series, Duke Math. J., 5, № 4 (1939), 875—936.

5 Hille E., A class of differential operators of infinite order. I, Duke Math. J., 7 (1940), 458—495.

6 Klimczak W. J., Differential operators of infinite order, Duke Math. J., 20 N 2 (1953), 295—319.

[7] Леонтьев А. Ф., Об области регулярности предельной функции одной последовательности аналитических функций, Матем. сборн., 39 (81): 4 (1956), 405—422.

[8] Леонтьев А. Ф., Ряды полиномов Дирихле и их обобщения, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, т. 39, 1951.

[9] Трошин Г. Д., Об интерполировании в некоторых классах аналитических функций, диссертация, 1953.

[10] Трошин Г. Д., О сходимости подпоследовательности частных сумм одного ряда к целой функции конечного порядка, Матем. сборн., 39(81): 4 (1956), 433—446.

[11] Мандельбройт С., Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения, ИЛ, 1955.

[12] Szegö G., Orthogonal polynomials, Am. Math. soc., Colloquium publications, XXIII, 1939.

[13] Розет Т. А., Элементы теории цилиндрических функций с приложениями к радиотехнике, 1956.

[14] Greenwood R. E., Hankel and other extensions of Dirichlet's series, Ann. of Math., 42, № 3 (1941), 778—805.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 243—270

С. Я. ХАВИНСОН

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ФУНКЦИИ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В МЕТРИКЕ ПРОСТРАНСТВА L_1

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе изучаются вопросы единственности функции наилучшего приближения в пространстве суммируемых функций.

Ранее известные результаты Джексона и М. Г. Крейна распространяются на случай, когда приближаемая функция обладает определенного вида разрывами. Среди других получен результат, который может рассматриваться как аналог для пространства L_1 известной теоремы Хаара. Получен ряд конкретных результатов о единственности наилучшего приближения в L_1 комплекснозначных функций.

Введение

Рассмотрим пространство Банаха B и в нем линейное подпространство H, $\overline{H} \neq B$. Взяв какой-нибудь элемент $\omega \in B - \overline{H}$, обозначим через φ^* тот элемент из H, для которого

$$\|\omega - \varphi^*\| = \inf_{\varphi \in H} \|\omega - \varphi\|.$$

Такой элемент, вообще говоря, может не существовать, даже если $H = \overline{H}$. Однако нас будет интересовать здесь не вопрос существования такого элемента наилучшего приближения, а вопрос о его единственности.

Обозначим через $L_p(E, \mu)$ или, сокращенно, просто через L_p, пространство суммируемых в степени $p \geqslant 1$ по мере μ на множестве E функций. В случае $p > 1$ вопрос о единственности наилучшего приближения решается просто: строгая нормированность пространства L_p, $p > 1$, всегда обеспечивает единственность [см. ([1]), § 9]. Сложнее обстоит дело в пространстве L_1.

Рассмотрим случай, когда L_1 построено над отрезком $[a, b]$.

В 1924 г. Джексон ([2]) доказал, что многочлен n-й степени, наименее уклоняющийся в метрике L_1 от *непрерывной* функции $\omega(x)$, единственен. Метод Джексона может быть применен [см. ([1]), § 49] и к случаю, когда H состоит из линейных комбинаций (многочленов) функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, образующих на $[a, b]$ систему Чебышева, а функция $\omega(x)$ по-прежнему непрерывна. Впервые доказательство единственности многочлена наилучшего приближения в последних предположениях было дано М. Г. Крейном ([3]) методом, отличным от метода Джексона. М. Г. Крейн

доказал также, что, каковы бы ни были заданные на множестве $E = (-\infty, +\infty)$ функции $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, найдется такая суммируемая на E функция, для которой наименее уклоняющиеся от нее в метрике L_1 многочлены по системе $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ определяются не однозначно.

В настоящей работе, основывающейся на методе М. Г. Крейна, мы рассматриваем вопросы единственности функции наилучшего приближения для функций $\omega(x)$, допускающих разрывы определенного вида. Этот класс функций $\omega(x)$ обозначен нами через $T(\mu)$. Условия, необходимые и достаточные для того, чтобы функция $\varphi^*(x) \in H$ (H состоит из непрерывных функций), реализующая

$$\inf_{\varphi \in H} \int_E |\omega(x) - \varphi(x)|\, d\mu,$$

была единственной (если она существует) для всякой $\omega(x) \in T(\mu)$, совпадают с таковыми для класса C непрерывных функций $\omega(x)$ и даются в теореме 3.

Цитированный выше отрицательный результат М. Г. Крейна показывает, что для всего пространства L_1 не имеет смысла ставить вопрос, подобный известному вопросу Хаара для чебышевских приближений. Однако при соответствующей модификации такой вопрос естественно поставить для класса $T(\mu)$ (или, что эквивалентно этому, просто для класса C непрерывных функций). Из наших результатов следует, что свойство системы $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ быть системой Чебышева обеспечивает единственность функций наилучшего приближения (H состоит из многочленов по функциям $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$) для любой $\omega(x) \in T(\mu)$, если μ — произвольная мера, относительно которой $[a, b]$ — приведенное множество. В то же время при *фиксированной* мере μ система $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ не обязана быть системой Чебышева, чтобы обеспечить единственность функции наилучшего приближения для *любой* $\omega(x) \in T(\mu)$ или даже $\omega(x) \in C$. Простые примеры показывают, что существуют системы непрерывных функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, не являющиеся системами Чебышева на (a, b) и, однако, обеспечивающие единственность для всякой $\omega(x) \in T(\mu)$ при *любой* мере μ, в которой $[a, b]$ есть приведенное множество. Тем не менее, справедлив следующий результат, который и можно рассматривать как аналог теоремы Хаара [см. ([4]), гл. II] для пространства L_1.

ТЕОРЕМА 8. *Пусть $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — такая система непрерывных на $[a, b]$ функций, что всякий многочлен из функций этой системы имеет нигде не плотное множество нулей на $[a, b]$. Для того чтобы при любой мере μ, в которой $[a, b]$ — приведенное множество, для любой функции $\omega(x) \in T(\mu)$ наименее уклоняющийся от нее в метрике $L_1([a, b], \mu)$ многочлен $\varphi(x)$ из функций системы был единственен, необходимо и достаточно, чтобы система $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ была системой Чебышева.*

В связи с теоремой 8 интересно рассмотреть следующий вопрос: если мера μ такова, что для любой $\omega(x) \in T(\mu)$ при *любой* системе Чебышева $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ (n фиксировано) многочлен наилучшего приближе-

ния в метрике $L_1([a, b], \mu)$ единственен, то что можно сказать про расположение точек роста меры μ? Ответ на этот вопрос дается теоремой 10: множество точек роста меры μ либо должно быть некоторым отрезком $[c, d] \subseteq [a, b]$, либо содержать ровно n точек.

Из результатов, полученных нами (§ 4) для комплекснозначных функций, приведем здесь теорему 15:

Если D — область плоскости (z), μ — мера, относительно которой D — приведенное множество, H — подпространство в $L_1(D, \mu)$, состоящее из мероморфных в D функций, то для любой $\omega(x) \in T(\mu)$ функция $\varphi^*(x) \in H$, реализующая

$$\inf_{\varphi \in H} \int\limits_D |\omega(x) - \varphi(x)| \, d\mu,$$

единственна (если она существует).

Содержание настоящей работы разбито на четыре параграфа.

В § 1 вводится класс $T(\mu)$. В § 2 доказывается теорема о характеристическом свойстве функции наилучшего приближения в метрике L_1 и дается общая характеристика систем $H = \{\varphi(x)\}$, обеспечивающих единственность наилучшего приближения для всякой $\omega(x) \in T(\mu)$. Эта последняя теорема, несмотря на кажущуюся громоздкость ее формулировки, является весьма удобным инструментом при получении конкретных результатов. В § 3 рассматриваются системы Чебышева на $[a, b]$ в связи с единственностью наилучшего приближения в L_1. Наконец, § 4 посвящен приближению в L_1 комплекснозначных функций.

Основные результаты настоящей работы были приведены без доказательств в работах автора ([5]) и ([6]).

§ 1. Класс $T(\mu)$

Нам потребуются следующие факты из общей теории функций.

Пусть в метрическом сепарабельном пространстве R задан вполне аддитивный класс множеств, содержащий все борелевские множества, на котором определена неотрицательная мера μ. Пусть на некотором измеримом (μ) множестве E задана функция $f(x)$ (вообще комплекснозначная). Число c назовем предельным числом $f(x)$ в точке x_0, если существует последовательность $\{x_n\} \subset E$, сходящаяся к x_0, для которой $f(x_n) \to c$. (Последовательность может состоять и из одинаковых точек.) Множество всех предельных чисел $f(x)$ в точке x_0 обозначим через $A(x_0)$. Это множество — замкнутое.

Возьмем какое-нибудь множество $E_1 \subset E$, $\mu(E - E_1) = 0$, и оставим $f(x)$ определенной только на E_1. Тогда, вообще говоря, $\bar{E}_1 \neq E$ и, кроме того, в каждой точке $x_0 \in \bar{E}_1$ $A_1(x_0) \neq A(x_0)$. Последующие выбрасывания из E множеств меры нуль приводят к дальнейшей перестройке как множества тех точек, в которых можно говорить о предельных числах, так и самих множеств $A(x_0)$.

Однако справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $f(x)$ измерима (μ) на E. Существует множество $E_1 \subset E$, $\mu(E - E_1) = 0$, обладающее следующим свойством: выбросим из E_1 произвольное множество меры нуль и оставим $f(x)$ определенной только на оставшемся множестве E_2; тогда множество предельных чисел $f(x)$, определенной только на E_2, в каждой точке $x_0 \in \overline{E}_1$ совпадает с множеством предельных чисел $f(x)$, определенной на E_1.*

Доказательство. Для каждой пары рациональных чисел $p < q$ образуем множество

$$E_{p,q} = E\{p < f(x) < q\}.$$

Для натурального n положим

$$E_n = E\{f(x) \geqslant n\}, \quad E_{-n} = E\{f(x) \leqslant -n\}.$$

Сделаем каждое из множеств $E_{p,q}$, E_n, E_{-n} приведенным, т. е. таким, что каждая порция такого множества либо пуста, либо имеет положительную меру. С этой целью перенумеруем все сферы с центрами в точках счетного всюду плотного в R множества и всевозможных рациональных радиусов. Взяв какое-то из множеств $E_{p,q}$, E_n или E_{-n}, оставим лишь те его порции, которые имеют положительную меру, а остальные отбросим. Проделав ту же операцию со всеми множествами, получим, что от E останется множество E_1, $\mu(E - E_1) = 0$. Возьмем $E_2 \subset E_1$, $\mu(E_1 - E_2) = 0$, и оставим $f(x)$ определенной только на E_2. Пусть $x_0 \in \overline{E}_1$ и пусть c — предельное число (для определенности конечное) $f(x)$, рассматриваемой на E_1, в точке x_0. Возьмем произвольные рациональные p и q, $p < c < q$, и рассмотрим

$$E^1_{p,q} = E_1\{p < f(x) < q\}.$$

В каждой окрестности точки x_0 порция $E^1_{p,q}$ не пуста, а следовательно, по построению E_1, имеет положительную меру. Но тогда в любой окрестности x_0 и порция

$$E^2_{p,q} = E_2\{p < f(x) < q\}$$

тоже имеет положительную меру и тем более не пуста. Из приведенного анализа теорема вытекает без труда.

Замечание 1. Если мера μ определена как мера Каратеодори через внешнюю меру μ^*, приписанную уже всем множествам из R, то нет нужды предполагать в теореме измеримость $f(x)$. Легко также видеть, как переформулируется теорема, если заменить множества меры нуль множествами первой категории.

Множество E_1, о котором говорилось в теореме, будем называть *истинной* областью определения функции $f(x)$, а $f(x)$, рассматриваемую только на E_1, — истинной функцией.

В дальнейшем будем считать множество E *приведенным*. Тогда каждая истинная функция имеет предельные числа в каждой точке $\overline{E}$. В самом деле, пусть $\mathscr{E} \subset E$ и $\mu(E - \mathscr{E}) = 0$. Взяв точку $x_0 \subset \overline{E}$, замечаем, что в каждой окрестности x_0 порция E имеет положительную меру, а значит порция $\mathscr{E}$ не пуста.

Мы скажем, что $x_0 \in E$ является *точкой первого рода* для функции $f(x)$, если истинная для $f(x)$ функция имеет в этой точке множество

предельных чисел, содержащее по крайней мере три числа, не лежащих на одной прямой.

Точку $x_0 \in E$ назовем *точкой второго рода* функции $f(x)$, если ее истинная функция имеет в x_0 множество предельных чисел, являющееся отрезком (конечным, бесконечным или вырождающимся в точку).

Множество точек первого рода обозначим через $E_{\rm I}$, множество точек второго рода — через $E_{\rm II}$.

Суммируемую по мере μ на множестве E функцию $f(x)$ зачислим в класс $T(\mu)$, если ее истинная функция имеет на E только точки первого и второго рода, т. е. если $E \subset E_{\rm I} + E_{\rm II}$. Очевидно, что класс $T(\mu)$ содержит, в частности, все непрерывные на E функции.

§ 2. Общие теоремы

1. Обозначим через $L_1(E, \mu) = L_1$ пространство суммируемых по мере μ на множестве E функций (комплекснозначных или же вещественных) с нормой

$$\|\omega\| = \int_E |\omega(x)|\, d\mu.$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $H = \{\varphi(x)\}$ — линейное подпространство в L_1 (не обязательно замкнутое), $\overline{H} \neq L_1$. Пусть $\omega(x) \in L_1 - \overline{H}$. Для того чтобы функция $\varphi^*(x) \in H$ удовлетворяла условию:*

$$\|\omega - \varphi^*\| = \inf_{\varphi \in H} \|\omega - \varphi\|,$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\alpha(x)$ со следующими свойствами:

а) $|\alpha(x)| \leqslant 1$ *почти везде* (μ) *на* E.

б) $\alpha(x)[\omega(x) - \varphi^*(x)] = |\omega(x) - \varphi^*(x)|$ *почти везде* (μ) *на* E.

в) $\alpha(x)$ *ортогональна к* H, *т. е.* $\int_E \alpha(x)\varphi(x)\, d\mu = 0$ *для любой* $\varphi(x) \in H$.

При этом функция $\alpha(x)$ может считаться одной и той же для *любой* $\varphi^*(x) \in H$, которая наименее уклоняется от $\omega(x)$ в нашей метрике.

З а м е ч а н и е. Все элементы этой теоремы для случая, когда $E \subset (-\infty, +\infty)$, μ — лебеговская мера, H — конечномерное подпространство и L_1 состоит из вещественных функций, имеются в работе М. Г. Крейна ([3]). Доказательство в общем случае протекает по той же схеме.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Н е о б х о д и м о с т ь. Так как, по условию теоремы, $\omega \in L_1 - \overline{H}$, т. е.

$$d = \|\omega - \varphi^*\| = \inf_{\varphi \in H} \|\omega - \varphi\| > 0,$$

то существует линейный функционал $F(y)$, $y \in L_1$, обладающий следующими свойствами:

1) $F(\omega) = 1$,

2) $F(\varphi) = 0$, $\varphi \in H$,

3) $\|F\| = d^{-1}$ [см. ([10]), гл. IV, § 3].

Всякий линейный функционал над L_1 имеет вид:

$$F(y) = \int_E \beta(x)\, y(x)\, d\mu,$$

где $\beta(y)$ — функция с конечным (относительно меры μ) vrai max, причем

$$\|F\| = \text{vrai max}\, |\beta(x)|.$$

Доказательство последнего факта в случае, когда $E \subset (-\infty, +\infty)$ и μ — мера Лебега, см. в работе ([10]), а в общем случае доказательство протекает точно так же.

Для элемента $\omega - \varphi^*$ имеем:

$$1 = F(\omega) = F(\omega - \varphi^*) \leqslant \|F\|\,\|\omega - \varphi^*\| = d^{-1} d = 1.$$

Поэтому в цепочке неравенств:

$$\int_E \beta(x)\,[\omega(x) - \varphi^*(x)]\, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \int_E |\beta(x)|\,|\omega(x) - \varphi^*(x)|\, d\mu \leqslant \text{vrai max}\, \beta(x) \int_E |\omega(x) - \varphi^*(x)|\, d\mu$$

везде должны быть равенства. А это означает, что

$$\beta(x)\,[\omega(x) - \varphi^*(x)] = \text{vrai max}\, |\beta(x)| \cdot |\omega(x) - \varphi^*(x)|$$

почти везде (μ) на E. Теперь уже понятно, что для функции $\alpha(x) = \beta(x)\, d$ имеют место все утверждения теоремы.

Таким образом, необходимость условий теоремы установлена.

Достаточность. Пусть для функции $\varphi^*(x) \in H$ нашлась функция $\alpha(x)$, обладающая описанными в теореме свойствами. Тогда для любой $\varphi(x) \in H$ имеем:

$$\left|\int_E \alpha(x)\, \omega(x)\, d\mu\right| = \left|\int_E \alpha(x)\,[\omega(x) - \varphi(x)]\, d\mu\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_E |\alpha(x)|\,|\omega(x) - \varphi(x)|\, d\mu \leqslant \int_E |\omega(x) - \varphi(x)|\, d\mu,$$

а для $\varphi^*(x)$ получаем:

$$\left|\int_E \alpha(x)\, \omega(x)\, d\mu\right| = \left|\int_E \alpha(x)\,[\omega(x) - \varphi^*(x)]\, d\mu\right| = \int_E |\omega(x) - \varphi^*(x)|\, d\mu.$$

Отсюда заключаем, что

$$\|\omega - \varphi^*\| = \inf_{\varphi \in H} \|\omega - \varphi\|.$$

Теорема 2 полностью доказана.

2. Перейдем к изложению теоремы, являющейся в дальнейшем основным аппаратом для получения конкретных результатов. Пусть K — какой-нибудь класс функций, $K \subset L_1$, и пусть H — линейное подпространство в L_1. Мы будем говорить, что H обладает *свойством единственности* наилучшего приближения *относительно класса* K (или, короче, просто свойством единственности относительно K), если для любой $\omega(x) \in K$ существует не более одной функции $\varphi^*(x) \in H$, для которой

$$\|\omega - \varphi^*\| = \inf_{\varphi \in H} \|\omega - \varphi\|.$$

3. ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $H = \{\varphi(x)\}$ — *линейное подпространство в* $L_1(E, \mu)$, *состоящее из непрерывных на* E *функций. Для того чтобы* H *обладало свойством единственности наилучшего приближения относительно класса* $T(\mu)$, *необходимо и достаточно, чтобы не существовало замкнутого в* E *множества* F, $\mu(E - F) > 0$, *и функций* $\varphi^*(x) \in H$ *и* $\alpha(x)$, *обладающих следующими свойствами:*

1) $\varphi^*(x)$ *обращается в нуль на* F *и только на* F.

2) $|\alpha(x)| \leqslant 1$.

3) $\alpha(x) = \pm \frac{|\varphi^*(x)|}{\varphi^*(x)}$, $x \in E - F$, *причем на каждой связной компоненте* $E - F$ *знак сохраняется.*

4) $\alpha(x)$ *ортогональна к* H, *т. е.* $\int\limits_E \alpha(x)\varphi(x)\,d\mu = 0$, $\varphi \in H$.

Доказательство достаточности. Пусть для некоторой $\omega(x) \in T(\mu)$ существуют две функции наилучшего приближения $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. По теореме 2, имеем:

$$\begin{gathered}\alpha(x)[\omega(x) - \varphi_1(x)] = |\omega(x) - \varphi_1(x)|, \\ \alpha(x)[\omega(x) - \varphi_2(x)] = |\omega(x) - \varphi_2(x)|\end{gathered} \tag{1}$$

почти везде. Обозначим через F множество $E\{\varphi_1(x) = \varphi_2(x)\}$. F замкнуто в E, так как $\varphi_i(x)$ непрерывны. Положим

$$\varphi^*(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x).$$

Можно считать, что почти везде на $E_2 = E - F$

$$\omega(x) - \varphi_i(x) \neq 0, \quad i = 1, 2.$$

В противном случае мы вместо $\varphi_i(x)$ взяли бы $\varphi_{t_i}(x)$:

$$\varphi_{t_i}(x) = t_i\varphi_1(x) + (1 - t_i)\varphi_2(x), \quad 0 < t_i < 1, \quad i = 1, 2.$$

Легко видеть, что $\varphi_{t_i}(x)$ — тоже функции наилучшего приближения к $\omega(x)$, причем почти везде на E

$$|\omega(x) - \varphi_{t_i}(x)| = t_i|\omega(x) - \varphi_1(x)| + (1 - t_i)|\omega(x) - \varphi_2(x)|,$$

откуда ясно, что $\omega(x) - \varphi_{t_i}(x) \neq 0$ почти везде на E_2. Вычитая равенства (1), найдем:

$$\alpha(x)\varphi^*(x) = \pm|\varphi^*(x)|$$

почти везде на E_2. Значит, почти везде на E_2 имеем:

$$\alpha(x) = \frac{|\omega(x) - \varphi_1(x)|}{\omega(x) - \varphi_1(x)} = \frac{|\omega(x) - \varphi_2(x)|}{\omega(x) - \varphi_2(x)} = \pm\frac{|\varphi^*(x)|}{\varphi^*(x)}. \tag{2}$$

Обозначим через E_1 истинную область определения $\omega(x)$, а через E_3 — ту часть $E_2 \cdot E_1$, для которой выполняются равенства (2). Предельные значения истинной функции на множестве E_2 можно понимать взятыми с E_3, так как если точка $x_0 \in E_2$, то у нее существует окрестность, свободная от точек F (замкнутость F в E) и, кроме того, $\mu(E_2 - E_3) = 0$. Чтобы доказать включение $E_{\mathrm{I}} \subset F$ (E_{I} — множество точек первого рода для $\omega(x)$), допустим, что точка $x_0 \in E_{\mathrm{I}} \cdot E_2$. Обозначим через a, b, c три пре-

дельных числа истинной функции $\omega(x)$, не лежащих на одной прямой, которые, по условию, существуют в точке x_0. Положим также

$$\varphi_1(x_0)=d, \quad \varphi_2(x_0)=e.$$

Рассматривая x стремящимся к x_0 по множеству E_3, нетрудно заключить, что при любом расположении точек d и e относительно точек a, b, c в окрестности x_0 найдутся такие точки x из E_3, для которых

$$\arg[\omega(x)-\varphi_2(x)] \neq \arg[\omega(x)-\varphi_1(x)],$$

что противоречит равенствам (2), выполняющимся на E_3. Итак, $E_{\mathrm{I}} \subset F$, а потому $E_2 \subset E_{\mathrm{II}}$. Пусть $x_0 \in E_2$. Положив опять

$$\varphi_1(x_0)=d, \quad \varphi_2(x_0)=e$$

и устремляя x к x_0 по множеству E_3, заключаем из равенств (2), что d и e лежат на одной прямой с отрезком предельных чисел, вне этого отрезка и по одну сторону от него. Если $x_0 \in E_2 - E_3$, то доопределим функцию $\alpha(x)$ в этой точке (она первоначально задана на E_3) так: возьмем произвольную точку $z \in A(x_0)$ и положим

$$\alpha(x_0)=\frac{|z-\varphi_1(x_0)|}{z-\varphi_1(x_0)}=\frac{|z-\varphi_2(x_0)|}{z-\varphi_2(x_0)}.$$

Нетрудно видеть, что так доопределенная функция $\alpha(x)$ будет непрерывной на E_2. В самом деле, если $x \to x_0 \in E_2$ по E_3, то из равенств (2) и из способа доопределения $\alpha(x)$ легко следует, что

$$\lim \alpha(x)=\alpha(x_0).$$

Но E_3 всюду плотно на E_2, а отсюда уже следует непрерывность $\alpha(x)$ на всем E_2.

Рассмотрим, наконец, какую-нибудь компоненту D множества E_2. Из приведенности множества E следует, что $\mu(D)>0$. Кроме того, E_3 всюду плотно на D. По непрерывности $\alpha(x)$ и $\frac{\varphi^*(x)}{\varphi^*(x)}$ на D равенство

$$\alpha(x)=\pm\frac{|\varphi^*(x)|}{\varphi^*(x)}$$

легко распространить на все D. Из связности D следует сохранение одного и того же знака в последней формуле на всем D.

Множество F и функции $\alpha(x)$ и $\varphi^*(x)$ обладают как раз теми свойствами, о которых говорится в теореме. Значит, допущение наличия двух функций наилучшего приближения для некоторой $\omega(x) \in T(\mu)$ привело нас к противоречию.

Доказательство необходимости. Нам теперь дано, что H обладает свойством единственности относительно $T(\mu)$. Пусть существуют множество F и функции $\varphi^*(x) \in H$ и $\alpha(x)$, о которых говорится в теореме. Построим функцию $\omega(x)$ так:

$$\omega(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x \in F, \\ \varphi^*(x), & \text{если } \alpha(x)=\dfrac{|\varphi^*(x)|}{\varphi^*(x)}, \\ -\varphi^*(x), & \text{если } \alpha(x)=-\dfrac{|\varphi^*(x)|}{\varphi^*(x)}. \end{cases}$$

Нетрудно понять, что функция $\omega(x)$ непрерывна на E и, следовательно, $\omega(x) \in T(\mu)$. Мы имеем:

$$\alpha(x)\,\omega(x) \geqslant 0 \text{ на } E$$

и

$$\alpha(x)\left[\omega(x) - \frac{1}{2}\varphi^*(x)\right] \geqslant 0 \text{ на } E,$$

а значит, и

$$\alpha(x)\left[\omega(x) - \frac{1}{2}\varphi^*(x)\right] = \left|\omega(x) - \frac{1}{2}\varphi^*(x)\right|$$

почти везде (μ) на E; но тогда, по теореме 2, и функция $\frac{1}{2}\varphi^*(x)$ и тождественный нуль будут функциями наилучшего приближения для $\omega(x)$. Теорема доказана.

Обозначим через C, как обычно, множество всех непрерывных на E функций, а через C_H — класс непрерывных функций $\Phi(x)$, строящихся следующим образом: взяв какую-нибудь $\varphi(x) \in H$, положим $\Phi(x) = 0$ на множестве F, где $\varphi(x) = 0$, $\Phi(x) = \pm\varphi(x)$ на $E - F$, причем на каждой компоненте $E - F$ знак сохраняется. Из процесса доказательства теоремы 3 легко вытекает

ТЕОРЕМА 4. *Условия единственности подпространства $H = \{\varphi(x)\}$, состоящего из непрерывных функций, относительно классов $T(\mu)$, C и C_H совпадают между собой. (Очевидно, что $T(\mu) \supseteq C \supseteq C_H$.)*

4. Отметим еще одно простое следствие из теоремы 3.

Обозначим через $F_{\varphi(x)}$ множество нулей функции $\varphi(x)$ на E.

ТЕОРЕМА 5. *Если $H = \{\varphi(x)\}$ состоит из непрерывных функций, причем для каждой $\varphi(x)$ множество $E - F_{\varphi(x)}$ связно в E, то H обладает свойством единственности относительно класса $T(\mu)$.*

Доказательство. Если предположить противное утверждению нашей теоремы, то, по теореме 3, найдутся множество $F = F_{\varphi^*(x)}$ и функции $\varphi^*(x) \in H$ и $\alpha(x)$ такие, что

$$\alpha(x) = \pm\frac{|\varphi^*(x)|}{\varphi^*(x)}$$

на $E - F_{\varphi^*(x)}$, причем на каждой компоненте $E - F_{\varphi^*(x)}$ знак сохраняется, и, кроме того, $\alpha(x)$ ортогональна к H. Но так как $E - F_{\varphi^*(x)}$ связно, то на всем множестве $E - F_{\varphi^*(x)}$ перед дробью $\frac{|\varphi^*(x)|}{\varphi^*(x)}$ стоит один и тот же знак. Мы получаем:

$$\int_E \alpha(x)\,\varphi^*(x)\,d\mu = \int_{E-F_{\varphi^*(x)}} \alpha(x)\,\varphi^*(x)\,d\mu = \pm\int_{E-F_{\varphi^*(x)}} |\varphi^*(x)|\,d\mu \neq 0.$$

Последнее неравенство находится в противоречии с тем, что

$$\int_E \alpha(x)\,\varphi(x)\,d\mu = 0$$

для любой $\varphi(x) \in H$.

5. Отметим следующий частный случай теоремы 3.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть $L_1(E, \mu)$ составлено из вещественных функций, а $H \in L_1$ таково, что для любой $\varphi(x)$ $\mu(F_{\varphi(x)}) = 0$. Для того чтобы H обладало свойством единственности относительно класса $T(\mu)$* *, *необходимо и достаточно, чтобы для всякого замкнутого в E множества F либо не существовало функции $\varphi(x)$, для которой $F = F_{\varphi(x)}$, либо компоненты $E - F$ нельзя было разбить на две группы G_1 и G_2 таким образом, что*

$$\int_{G_1} \varphi(x)\, d\mu = \int_{G_2} \varphi(x)\, d\mu$$

для всякой $\varphi(x) \in H$.

6. Заметим в заключение, что при доказательстве достаточности теоремы 3 нами был установлен следующий факт: если у функции $\omega(x)$ имеются в H две функции наилучшего приближения $\varphi_1^*(x)$ и $\varphi_2^*(x)$ ($\|\omega - \varphi_1^*\| = \|\omega - \varphi_2^*\| = \inf\limits_{\varphi \in H} \|\omega - \varphi\|$) и $F = E\{\varphi_1^*(x) = \varphi_2^*(x)\}$, то $E_I \subset F$.

§ 3. Системы П. Л. Чебышева и единственность многочлена наилучшего приближения в L_1

1. Пусть $E = [a, b]$, L_1 состоит из вещественных функций, H состоит из многочленов по функциям $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, образующим систему Чебышева на (a, b).

ТЕОРЕМА 7. *Пусть μ — произвольная мера, относительно которой $[a, b]$ — приведенное множество. Если $\omega(x) \in T(\mu)$* **, *то существует единственная функция $\varphi^*(x) \in H$, для которой*

$$\|\omega - \varphi^*\| = \inf_{\varphi \in H} \|\omega - \varphi\|.$$

Доказательство. Пусть F — множество нулей какого-нибудь многочлена $P(x) \in H$. Рассмотрим функцию $\alpha(x)$, равную ± 1 на каждом из интервалов, смежных к F, и сохраняющую знак на каждом из этих интервалов. Пусть $x_1, \ldots, x_q$, $q \leqslant n - 1$, — точки смены знака $\alpha(x)$. В силу известных свойств системы Чебышева, найдется многочлен $Q(x) \in H$, меняющий знак в точках $x_1, \ldots, x_q$ и только в них. Очевидно, что

$$\int_a^b \alpha(x)\, Q(x)\, d\mu \neq 0.$$

В силу теоремы 3, доказательство нашей теоремы закончено.

2. В то же время из теоремы 3 легко усмотреть, что свойство системы $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ быть системой Чебышева при фиксированной мере μ вовсе не является необходимым, чтобы обеспечить свойство единственности подпространства H, натянутого на $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ относительно класса $T(\mu)$.

Из приведенного ниже примера следует, что многочлены из H могут

* В этом случае включение $\omega(x) \in T(\mu)$ означает, что любая точка E является точкой второго рода для $\omega(x)$.

** См. предыдущую сноску.

иметь сколько угодно нулей, а свойство единственности H относительно $T(\mu)$ будет иметь место.

Пусть $F \subset [a, b]$ — произвольное замкнутое множество, $F \neq [a, b]$. Обозначим через $\delta_1, \ldots, \delta_n, \ldots$ интервалы смежности к F. Положим $\varphi(x) = 0$ на F, а на каждом δ_i зададим график $\varphi(x)$ в виде треугольника с вершинами в концах и середине интервала δ_i. Высоты треугольников ε_i выберем так, чтобы удовлетворялись следующие условия:

1) $\lim\limits_{i\to\infty} \varepsilon_i = 0$,

2) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \mu(\delta_i) < +\infty$,

3) $\int\limits_{\delta_1} \varphi(x)\, d\mu > \sum\limits_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i\, \mu(\delta_i)$.

Очевидно, что такой подбор всегда возможен.

Пусть функция $\alpha(x)$ такова, что $|\alpha(x)| \leqslant 1$ почти везде (μ) на $[a, b]$, и $\alpha(x) = \pm 1$ на $[a, b] - F$, причем на каждом δ_i знак сохраняется. Тогда

$$\left|\int\limits_a^b \alpha(x)\varphi(x)\, d\mu\right| = \left|\int\limits_{[a,\, b]-F} \alpha(x)\varphi(x)\, d\mu\right| \geqslant \left|\int\limits_{\delta_1} \alpha(x)\varphi(x)\, d\mu\right| -$$

$$-\left|\int\limits_{\substack{\Sigma\delta_i \\ i\geqslant 2}} \alpha(x)\varphi(x)\, d\mu\right| = \int\limits_{\delta_1} \varphi(x)\, d\mu - \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i\, \mu(\delta_i) > 0.$$

На основании теоремы 3 отсюда следует, что подпространство $H = \{c\varphi(x)\}$ обладает свойством единственности относительно класса $T(\mu)$ (c пробегает все вещественные числа).

Легко привести примеры систем функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, не являющихся системами Чебышева на (a, b) и в то же время таких, что

$$H = \{c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x)\}$$

обладает свойством единственности относительно класса $T(\mu)$ при *любой* мере μ, если $[a, b]$ — приведенное множество в этой мере. Вот простейший пример такой системы, состоящей из одной функции.

Возьмем числа α и β, $a < \alpha < \beta < b$. Положим

$$\varphi(x) = 0, \qquad x \in [a, \alpha] \cup [\beta, b],$$

$$\varphi(x) > 0, \qquad x \in (\alpha, \beta).$$

Требуемое свойство $\{c\varphi(x)\}$ опять легко следует из теоремы 3. Однако имеет место следующая теорема.

3. ТЕОРЕМА 8. *Пусть $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — такая система непрерывных на $[a, b]$ функций, что всякий многочлен $c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x)$ имеет нигде не плотное множество нулей на (a, b). Для того чтобы при любой мере μ, в которой $[a, b]$ — приведенное множество, подпространство*

$$H = \{c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x)\}$$

обладало свойством единственности наилучшего приближения относительно класса $T(\mu)$ или (C), необходимо и достаточно, чтобы система функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ была системой Чебышева на (a, b).

Доказательство. Достаточность условий теоремы очевидна из теоремы 7. Для доказательства необходимости нам потребуются следующие элементарные леммы.

4. ЛЕММА 1. *Пусть в k-мерном эвклидовом пространстве задано выпуклое множество A. Тогда либо A содержит внутренние точки, либо лежит в некоторой гиперплоскости.*

Доказательство. Без ограничения общности предположим, что A содержит начало координат. Пусть максимальное число линейно независимых векторов из A равно r и пусть $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_r$ — эти векторы. Если $r < k$, то A содержится в подпространстве, натянутом на эти векторы. Пусть

$$\bar{a}_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ik}), \quad i = 1, 2, \ldots r;$$

рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \ldots, & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \ldots, & \alpha_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{r1}, & \alpha_{r2}, & \ldots, & \alpha_{rk} \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен r. Поэтому существуют такие числа λ_j, $j = 1, \ldots, k$, не все равные нулю, что для координат любого вектора $\bar{a}_i$ имеем:

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \alpha_{ij} = 0, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Следовательно, для координат любого вектора из A выполняется то же соотношение. А это означает, что A лежит в гиперплоскости

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_j x_j = 0.$$

Допустим теперь, что $r = k$. Рассмотрим k-мерный симплекс B, натянутый на точки $\bar{0}, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_k$. B имеет внутренние точки [см. ([11]), стр. 71] и состоит из точек $\bar{b}$ вида

$$\bar{b} = \mu_1 \bar{a}_1 + \ldots + \mu_k \bar{a}_k, \quad \mu_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, k, \quad \sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1.$$

Легко видеть, что $B \subset A$. В самом деле, $\bar{0} \in A$ и $\bar{a}_i \in A$, следовательно, при любом μ_i, $0 \leqslant \mu_i \leqslant 1$, $\mu_i \bar{a}_i \in A$, а тогда и

$$\mu_1 \bar{a}_1 + \mu_2 \bar{a}_2 \in A,$$

если $\mu_1 + \mu_2 \leqslant 1$, и

$$\mu_1 \bar{a}_1 + \mu_2 \bar{a}_2 + \mu_3 \bar{a}_3 \in A,$$

если $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \leqslant 1$ и т. д. Лемма полностью доказана.

Рассмотрим пространство R матриц

$$M = (a_{ij}), \quad i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, n+1,$$

положив

$$\|M\| = \left\{ \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

(записывая матрицу в одну строку, можно считать R $n(n+1)$-мерным эвклидовым пространством).

ЛЕММА 2. *Пусть M — произвольная матрица из R. В любой ее окрестности найдутся матрицы N, у которых все определители порядка n отличны от нуля. Множество матриц, обладающих последним свойством, открыто в R.*

Доказательство проводится дословно так же, как рассуждения в § 1 п. С книги (11). Пусть M^* — матрица, у которой все определители порядка n заведомо отличны от нуля; такова, например, матрица

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ & \cdot\ 0 & & 1 \\ & \cdot & & \cdot \\ 0 & & \cdot & \cdot \\ & & \cdot\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу

$$N(t) = tM^* + (1-t)M, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Любой определитель порядка n матрицы $N(t)$ есть многочлен от t, не равный тождественно нулю, ибо при $t=1$ он не равен нулю. Ввиду того, что многочлен имеет конечное число корней, будут существовать сколь угодно малые значения t, при которых $N(t)$ обладает требуемым свойством. Второе утверждение леммы вытекает из того, что определители матрицы — непрерывные функции ее элементов.

Следующая лемма потребуется нам лишь при доказательстве теоремы 9, но, ввиду того, что она примыкает к лемме 2, естественно ее привести здесь.

ЛЕММА 3. *Пусть даны $k \leqslant n$ линейно независимых n-мерных векторов. Пусть M — произвольная матрица из R, у которой эти векторы являются столбцами. Тогда в любой окрестности M найдутся матрицы из R, у которых соответствующие столбцы те же, что и у M (т. е. являются данными векторами), и все определители порядка n отличны от нуля.*

Доказательство. Обозначим данные нам векторы-столбцы через $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_k$. Добавим к ним недостающее до n число векторов так, чтобы векторы $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ были линейно независимыми. Возьмем еще вектор $\bar{a}_{n+1} = \bar{a}_1 + \ldots + \bar{a}_n$. Легко убедиться, что любые n из векторов системы $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{n+1}$ линейно независимы. Поэтому матрица $M^* \in R$, у которой столбцами служат векторы $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{n+1}$, имеет все определители порядка n не равными нулю. Далее доказательство ведется, как в лемме 2; нужно лишь заметить, что при любом t у матрицы $N(t)$ k соответствующих столбцов совпадают с соответствующими столбцами матрицы M.

5. Вернемся к доказательству необходимости теоремы 8. Мы докажем даже более сильное предложение:

Пусть μ — определенная мера, относительно которой $[a, b]$ — приведенное множество. Если при любой мере μ_1 вида

$$\mu_1(e) = \int_e \rho(x)\, d\mu, \quad \rho(x) > 0,$$

почти везде (μ) *подпространство*

$$H = \{c_1 \varphi_1(x) + \ldots + c_n \varphi_n(x)\}$$

обладает свойством единственности наилучшего приближения относительно класса $T(\mu)$, *то* $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ **есть система Чебышева на** (a, b).

Допустим противное: пусть система $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ не является системой Чебышева на (a, b). Это значит, что найдется многочлен $\varphi(x)$, обращающийся на (a, b) в нуль более чем в $n-1$ точке. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — n нулей $\varphi(x)$.

Рассмотрим в пространстве $L_1([a, b], \mu)$ множество A, состоящее из не отрицательных на $[a, b]$ функций. Ясно, что A — выпуклое множество в L_1. Поставим в соответствие каждой функции $\psi(x) \in L_1$ точку $M(\psi)$ $n(n+1)$-мерного эвклидова пространства R:

$$M(\psi) = \left(\int_a^{x_1} \varphi_1 \psi\, d\mu, \int_a^{x_1} \varphi_2 \psi\, d\mu, \ldots, \int_a^{x_1} \varphi_n \psi\, d\mu, \ldots, \int_{x_n}^{b} \varphi_n \psi\, d\mu\right).$$

Ту же точку $M(\psi)$ можно записать в виде матрицы:

$$M(\psi) = \begin{pmatrix} \int_a^{x_1} \varphi_1 \psi\, d\mu, \ldots, \int_{x_n}^{b} \varphi_1 \psi\, d\mu \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \int_a^{x_1} \varphi_n \psi\, d\mu, \ldots, \int_{x_n}^{b} \varphi_n \psi\, d\mu \end{pmatrix}. \quad (2)$$

При нашем отображении пространства L_1 в пространство R множество A перейдет в выпуклое множество B, содержащее начало координат (функция $\psi(x) \equiv 0 \in A$). Докажем, что B содержит внутренние точки. Допуская противное, придем, в силу леммы 1, к существованию ненулевой системы чисел c_{ij}, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n+1$, для которой будет выполняться тождество:

$$\sum_{i=1,\, j=1}^{i=n,\, j=n+1} c_{ij} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi_i \psi\, d\mu \equiv 0, \quad \psi \in A$$

(здесь положено $x_0 = a$, $x_{n+1} = b$). Положив

$$Q_j(x) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \varphi_i(x),$$

перепишем это тождество так:

$$\sum_{j=1}^{n+1} \int_{x_{j-1}}^{x_j} Q_j(x) \psi(x)\, d\mu \equiv 0, \quad \psi(x) \in A.$$

Отсюда, пользуясь произволом $\psi \in A$, легко заключить, что на отрезке $[x_{j-1}, x_j]$

$$Q_j(x) \equiv 0.$$

Но множество нулей любого нетривиального многочлена нигде не плотно (по условию), следовательно, $c_{ij}=0$, $i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,n+1$. Полученное противоречие и доказывает тот факт, что A содержит внутренние точки.

Пусть $\psi_0(x)\in A$ — такая функция, для которой $M(\psi_0)$ — внутренняя точка B.

В силу леммы 2, в любой близости от матрицы $M(\psi_0)$ найдутся матрицы, у которых все определители порядка n отличны от нуля. Так как $M(\psi_0)$ — внутренняя точка B, то, следовательно, найдутся точки (матрицы) из B, у которых все определители порядка n отличны от нуля. Пусть $M(\psi_1)$ — такая точка. В силу непрерывности отображения $L([a,b],\mu)\to R$ и второй части леммы 2, функцию $\psi_1(x)$ можно считать непрерывной, положительной на $[a,b]$ функцией.

Рассмотрим систему n линейных уравнений с $n+1$ неизвестными $D_1,\ldots D_{n+1}$;

$$\sum_{j=1}^{n+1} D_j \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi_i\,\psi_1\,d\mu=0,\quad i=1,\ldots,n. \tag{3}$$

Задав свободное неизвестное D_{n+1} не равным нулю, заключаем, что и все $D_i\neq 0$, $i=1,\ldots,n+1$, ибо все детерминанты порядка n матрицы $M(\psi_1)$ отличны от нуля.

Введем функции

$$\psi_2(x)=|D_j|\,\psi_1(x),\quad x\in(x_{j-1},x_j]$$

и

$$\alpha(x)=\operatorname{sign} D_j,\quad x\in(x_{j-1},x_j),\quad j=1,\ldots,n+1.$$

Определим меру

$$\mu_1(e)=\int\limits_e \psi_2(x)\,d\mu.$$

В этой мере $[a,b]$ — приведенное множество.

Рассмотрим множество F всех нулей функции $\varphi(x)$; $F\supset\{x_1,\ldots,x_n\}$. Для этого множества F имеется функция $\alpha(x)$, равная ± 1 на каждой компоненте $[a,b]-F$, сохраняющая знак на каждой компоненте и ортогональная по мере μ_1 к функциям $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ (последнее вытекает из (3)). Следовательно, по теореме 3, существуют функции $\omega(x)\in T(\mu_1)$, для которых единственность многочлена наилучшего приближения в метрике $L_1([a,b],\mu_1)$ не имеет места.

Теорема 8 полностью доказана.

6. В теореме 8 показано, в частности, что если множество точек роста меры μ совпадает с $[a,b]$, то это обеспечивает единственность многочлена наилучшего приближения по *любой* системе Чебышева для $\omega(x)\in T(\mu)$. Интересно рассмотреть обратный вопрос: если мера μ такова, что для *любой* $\omega(x)\in T(\mu)$ при *любой* системе Чебышева $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ (n фиксировано) многочлен наилучшего приближения в $L_1(\mu)$ единственен, то что можно сказать про расположение точек роста меры μ? На этот во-

прос отвечает теорема 9. Заметим только, что x_0 называется точкой роста меры μ, если для любого $(\alpha, \beta) \supset x_0$ имеем $\mu(\alpha, \beta) > 0$.

ТЕОРЕМА 9. *Пусть μ — некоторая мера. Для того чтобы для любой функции $\omega(x) \in T(\mu)$ и любой системы Чебышева на $[a, b]$ $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ (n фиксировано) многочлен*

$$\varphi^*(x) = c_1^* \varphi(x) + \ldots + c_n^* \varphi_n(x),$$

наименее уклоняющийся от $\omega(x)$ в $L_1(\mu)$, был единственным, необходимо и достаточно, чтобы множество точек роста меры μ было либо связным (т. е. было некоторым отрезком $[c, d] \subset [a, b]$), либо содержало ровно n точек.

Доказательство достаточности. Если множество точек роста меры μ связно, т. е. является некоторым отрезком $[c, d] \subseteq [a, b]$, то доказательство единственности проводится так же, как в предыдущей теореме.

Допустим теперь, что множество E точек роста меры μ состоит из n точек $x_1, \ldots, x_n$. Пусть $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — произвольная система Чебышева. Допустим, что существуют множество F, многочлен $\varphi^*(x)$ и функция $\alpha(x)$, обладающие свойствами, перечисленными в теореме 3.

Множество F содержит $k < n$ точек, ибо система $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — чебышевская. Условие 4) теоремы 3 дает:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha(x_i) \varphi_j(x_i) \mu(x_i) = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

При этом имеется хоть одна точка $(\in E - F)$, в которой $\alpha(x_i) \mu(x_i) \neq 0$. Следовательно, система линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_j(x_i) X_i = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

имеет нетривиальное решение. Но последнее невозможно, так как определитель этой системы $|\varphi_j(x_i)|$, $i, j = 1, \ldots, n$, в силу свойств функций, образующих систему Чебышева, не равен нулю.

Доказательство необходимости. Если E насчитывает менее n точек, то любая система Чебышева $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ линейно зависима на E и поэтому единственность многочлена наилучшего приближения не будет иметь места ни для какой функции. Допустим, что E несвязно и насчитывает более чем n точек. Множество E замкнуто. Поэтому $E = P + N$, где P — совершенное множество, а N — не более чем счетное множество. Разберем возможные случаи:

I. P пусто.

I$_1$. N счетно. Тогда можно построить n точек $y_1, \ldots, y_n$, принадлежащих $[a, b] - N$, причем так, что каждый из промежутков $[a, y_1), \ldots, (y_k, y_{k+1}), \ldots, [y_n, b]$ будет содержать более чем $n - 1$ точки из E. Рассмотрим отображение множества A положительных непрерывных на $[a, b]$ функций в эвклидово пространство $R_{n(n+1)}$, поставив в соответствие функции $\psi(x) \in A$ точку $M(\psi)$ по формуле (2) (здесь $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ —

некоторая определенная система Чебышева). Рассуждения, аналогичные тем, которые проводились в доказательстве теоремы 8, позволяют заключить, что образ A — множество B — будет выпуклым телом. В самом деле, допустив, что выпуклое множество B не содержит внутренних точек, мы придем (в силу леммы 1 из п. 4) к существованию ненулевой системы чисел c_{ij}, $i=1, \ldots, n$, $j=1, \ldots, n+1$, для которой имеет место тождество

$$\sum_{i,j} c_{ij} \int_{y_{j-1}}^{y_i} \varphi_i \psi \, d\mu \equiv 0.$$

Здесь положено:

$$y_0 = a, \quad y_{n+1} = b.$$

Обозначив

$$Q_j(x) = \sum_{i-1}^{n} c_{ij} \varphi_i(x),$$

перепишем последнее тождество так:

$$\sum_{j=1}^{n+1} \int_{y_{j-1}}^{y_j} Q_j \psi \, d\mu \equiv 0, \quad \psi \in A.$$

Отсюда следует, что в каждой точке роста меры μ на отрезке $[y_{j-1}, y_j)$, $j=1, \ldots, n+1$, непрерывная функция $Q_j(x)$ обращается в нуль. А так как на каждом участке имеется $\geqslant n$ точек роста меры μ, то все $Q_j(x) \equiv 0$ и, следовательно, $c_{ij}=0$, $i=1, \ldots, n$, $j=1, \ldots, n+1$, т. е. мы пришли к противоречию. Поэтому найдутся, как и в теореме 8, непрерывная функция $\psi_1(x)$ и числа D_j, $j=1, \ldots, n+1$, все не равные нулю, удовлетворяющие равенствам (3).

Далее, введем функции

$$\psi_2(x) = |D_j| \psi_1(x)$$

и

$$\alpha(x) = \operatorname{sign} D_j, \quad x \in [y_{j-1}, y_j).$$

Равенства (3) перепишутся так:

$$\int_a^b \alpha(x) \psi_2(x) \varphi_i(x) \, d\mu = 0, \quad i=1, \ldots, n. \tag{4}$$

Функция $\psi_2(x)$ — положительная функция, терпящая разрыв лишь в точках y_j. Но ни одна из точек y_j не является точкой роста меры μ. Поэтому легко построить положительную и непрерывную на $[a, b]$ функцию $\psi_3(x)$, почти везде (μ) совпадающую с функцией $\psi_2(x)$. Для $\psi_3(x)$ имеем:

$$\int_a^b \alpha(x) \psi_3(x) \varphi_i(x) \, d\mu = 0. \tag{5}$$

Рассмотрим, наконец, систему функций

$$\{\Phi_i(x) = \psi_3(x)\varphi_i(x)\}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ясно, что это — система Чебышева.

При этом существуют множество F (пустое) и функция $\alpha(x) = \pm 1$ на $E - F$ и непрерывная на $E - F$, ортогональная к системе $\{\Phi_i(x)\}$. Следовательно, по теореме 3, не для всякой функции класса $T(\mu)$ многочлен наилучшего приближения по системе $\{\Phi_i(x)\}$ в метрике $L_1(\mu)$ единственен.

I_2. N — конечное множество, $N = \{x_1, \ldots, x_m\}$, $m > n$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\sum_{j=1}^{m} D_j \varphi_i(x_j)\mu(x_j) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Перепишем ее так:

$$\sum_{j=1}^{n} D_j \varphi_i(x_j)\mu(x_j) = -\sum_{j=n+1}^{m} D_j \varphi_i(x_j)\mu(x_j). \tag{7}$$

Дадим свободным неизвестным значение 1: $D_{n+1} = \ldots = D_m = 1$.

Вычисляя D_k, $k = 1, \ldots, n$, увидим, что в числителе формулы Крамера стоит величина

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) \ldots -\sum\limits_{j=n+1}^{m} \varphi_1(x_j)\mu(x_j) \ldots \varphi_1(x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x_1) \ldots -\sum\limits_{j=n+1}^{m} \varphi_n(x_j)\mu(x_j) \ldots \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^{n} \mu(x_r) =$$

$$= \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^{n} \mu(x_r) \sum_{j=n+1}^{m} \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) \ldots -\varphi_1(x_j)\mu(x_j) \ldots \varphi_1(x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x_1) \ldots -\varphi_n(x_j)\mu(x_j) \ldots \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Используя то, что для систем Чебышева определитель

$$|\varphi_i(x_j)|, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n,$$

отличен от нуля и имеет один и тот же знак при любой системе точек $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ [см. ([1]), стр. 86], найдем, что все $D_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, m$. Возьмем непрерывную положительную на $[a, b]$ функцию $\psi(x)$, для которой

$$|\psi(x_j)| = |D_j|,$$

и функцию $\alpha(x)$, определенную на $E = N$ равенствами:

$$\alpha(x_j) = \operatorname{sign} D_j, \quad j = 1, \ldots, m,$$

и построим систему Чебышева

$$\{\Phi_i(x) = \psi(x)\varphi_i(x)\}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Далее рассуждаем так же, как в предыдущем случае.

II. P не пусто.

II$_1$. E нигде не плотно на $[a, b]$. Тогда рассуждения ведутся дословно так же, как в случае I$_1$.

II$_2$. E содержит отрезок $[c, d]$, и часть множества $E - [c, d]$, лежащая правее * $[c, d]$, насчитывает более $n-1$ точки.

Строим точки $y_1, \ldots, y_{n-1}$ на $[c, d]$ так, что в каждой точке y_i существует конечная производная аддитивной функции $\mu(e)$. Это возможно в силу теоремы Лебега [см. (7), стр. 176]. Возьмем еще точку $y_n \in [d, b] - E$, за которой насчитывается более $n-1$ точки E (легко видеть, что такая точка y_n существует). Как обычно, полагаем $y_0 = a$ и $y_{n+1} = b$.

Далее, рассуждая, как в случае I_1, построим непрерывную положительную на $[a, b]$ функцию $\psi_1(x)$ и числа $D_j = D_j^1$, все отличные от нуля, причем

$$\sum_{j=1}^{n+1} D_j^1 \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} \varphi_i \psi_1 \, d\mu = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Фиксируем D_{n+1}. Фунцию $\psi_1(x)$ заменяем положительной функцией $\psi_2(x)$ совпадающей с $\psi_1(x)$ везде, кроме достаточно малых окрестностей точек y_j, $j = 1, \ldots, n-1$. В упомянутых окрестностях точек y_j, $j = 1, \ldots, n-1$, функцию $\psi_2(x)$ делаем линейной как справа от y_j, так и слева, причем так, что

$$\psi_2(y_j - 0) |D_{j-1}^1| = 1$$

и

$$\psi_2(y_j + 0) |D_j^1| = 1.$$

Величины окрестностей лимитируем следующим образом. Пусть C_ρ — окрестность радиуса ρ точки $M(\psi_1)$, лежащая в B и состоящая целиком из таких матриц, у которых все определители порядка n отличны от нуля (лемма 2). Тогда окрестности точек y_j берем столь малыми, чтобы

$$\|M(\psi_2) - M(\psi_1)\| \leqslant \frac{1}{2^2} \rho.$$

Этого можно достигнуть в силу непрерывности отображения $L(\mu)$ в R. В самом деле, мера $\|\psi_2 - \psi_1\|$ может быть сделана сколь угодно малой, если мера всех окрестностей точек y_j достаточно мала. Для этого нами и допущено наличие производной от $\mu(e)$ в точках y_j. Будем считать эту меру во всяком случае $< \frac{1}{2}$. По функции $\psi_2(x)$ определим из системы

$$\sum_{j=1}^{n+1} D_j^2 \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} \varphi_i \psi_2 \, d\mu = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{10}$$

---

* Случай, когда часть $E - [c, d]$, лежащая левее $[c, d]$, содержит более $n-1$ точки, разбирается аналогично.

числа D_j^2 ($D_{n+1}^2 = D_{n+1}^1$). Меру взятых окрестностей точек y_j можно считать столь малой, что

$$|(D_j^2)^{-1} - (D_j^1)^{-1}| < \frac{1}{2}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Это вытекает из непрерывной зависимости решений системы

$$\sum_{j=1}^{n+1} X_j \int_{y_{j-1}}^{y_j} \varphi_i \psi \, d\mu = 0 \tag{11}$$

от ψ (при фиксированном $X_{n+1} = D_{n+1}$).

По функции $\psi_2(x)$ точно так же строим функцию $\psi_3(x)$, причем, в частности,

$$\psi_3(y_j - 0) | D_{j-1}^2 | = \psi_3(y_j + 0) | D_j^2 | = 1, \quad j = 1, \ldots, n+1,$$

$$\| M(\psi_3) - M(\psi_2) \| \leqslant \frac{1}{2^3} \rho, \quad |(D_j^3)^{-1} - (D_j^2)^{-1}| < \frac{1}{2^2}.$$

По функции $\psi_3(x)$ строим D_j^3 и т. д., изменяя соответствующим образом неравенства. Рассмотрим построенную последовательность функций $\{\psi_k(x)\}$ на каком-нибудь отрезке $[y_{j-1}, y_j]$ (в концах отрезка положим значения функций равными пределам: в y_{j-1} — пределу справа, а в y_j — пределу слева). Последовательность $\{\psi_k(x)\}$ равномерно сходится на этом отрезке, что непосредственно вытекает из неравенства:

$$|\psi_k(x) - \psi_{k+1}(x)| \leqslant |(D_j^{k-1})^{-1} - (D_j^k)^{-1}|,$$

содержащегося в способе построения функций $\psi_k(x)$.

Обозначим предельную функцию нашей последовательности через $\psi(x)$. Легко видеть, что она положительна и непрерывна на каждом (y_{j-1}, y_j) и имеет конечные пределы справа и слева в каждой точке y_j. Далее, очевидно, что $\|\psi - \psi_k\| \to 0$ и поэтому $M(\psi_k) \to M(\psi)$.

Из неравенства

$$\| M(\psi_k) - M(\psi_{k-1}) \| < \frac{1}{2^k} \rho$$

легко заключить, что $M(\psi) \in C_\rho$ и, следовательно, все определители порядка n матрицы $M(\psi)$ отличны от нуля. Из системы (11) найдем для $\psi(x)$ соответствующие числа D_j^0, $j = 1, \ldots, n+1$, все отличные от нуля

$$\sum_{j=1}^{n+1} D_j^0 \int_{y_{j-1}}^{y_j} \varphi_i \psi \, d\mu = 0 \tag{12}$$

($D_{n+1}^0 = D_{n+1}^1$). Очевидно, что

$$D_j^0 = \lim_{k \to \infty} D_j^k.$$

Теперь имеем:

$$\psi(y_j - 0) | D_{j-1}^0 | = \lim_{k \to \infty} \psi_k(y_j - 0) \cdot \lim_{k \to \infty} | D_{j-1}^{k-1} | =$$

$$= \lim_{k \to \infty} [\psi_k(y_j - 0) | D_{j-1}^{k-1} |] = 1.$$

Точно так же

$$\psi(y_j+0)\,|D_j^0|=1, \quad j=1,\ldots,n.$$

Поэтому функция

$$\Phi(x)=\psi(x)\,|D_j^0|, \quad x\in[y_{j-1},y_j), \quad j=1,\ldots,n+1,$$

положительна и непрерывна на $[a,b]$. Возьмем функцию

$$\alpha(x)=\operatorname{sign} D_j, \quad x\in[y_{j-1},y_j),$$

и систему Чебышева

$$\{\Phi_i(x)=\Phi(x)\,\varphi_i(x)\}$$

и перепишем систему (12) в следующем виде:

$$\int_a^b \alpha(x)\,\Phi_i(x)\,d\mu=0, \quad i=1,\ldots,n. \tag{13}$$

Для множества $F=\{y_1,\ldots,y_{n-1}\}$ существует многочлен из функций системы $\{\Phi_i(x)\}$, обращающийся в нуль на F, и только на F, и функция $\alpha(x)$, как раз такая, какая описана в теореме 3. Следовательно, единственность многочлена наилучшего приближения в $L_1(\mu)$ по системе $\{\Phi_i(x)\}$ имеет место не для всех $\omega(x)\in T(\mu)$.

II$_3$. E содержит отрезок $[c,d]$, правее * которого находится только $k\leqslant n-1$ точки E. В этом случае выбираем на (c,d) точки $y_1,\ldots,y_{n-k}$, в которых у меры μ имеется конечная производная, и рассматриваем отображение класса A непрерывных положительных на $[a,b]$ функций в эвклидово пространство $R_{n\cdot(n-k-1)}$:

$$M_1(\psi)=\Bigl(\int_a^{y_1}\varphi_1\psi\,d\mu,\ldots,\int_{y_{n-k}}^{d}\varphi_n\psi\,d\mu\Bigr), \quad \psi\in A.$$

Рассуждения, аналогичные предыдущим, позволяют заключить, что B_1 — образ A — содержит внутренние точки. Пусть $M_1(\psi_1)$ — внутренняя точка B_1. Обозначим через $x_1,\ldots,x_k$ те точки E, которые лежат справа от $[c,d]$, и рассмотрим точку (матрицу) $n\cdot(n+1)$-мерного пространства:

$$M(\psi)=(M_1(\psi),\varphi_1(x_1),\ldots,\varphi_n(x_1),\ldots,\varphi_1(x_k),\ldots,\varphi_n(x_k)).$$

Так как k n-мерных векторов $(\varphi_1(x_1),\ldots,\varphi_n(x_1)),\ldots,(\varphi_1(x_k),\ldots,\varphi_n\ x_k\ )$ линейно независимы, что следует из известного свойства систем Чебышева [см. ([1]), стр. 81], то мы можем применить лемму 3 этого параграфа и далее вести рассуждения точно так же, как в случае II$_2$, используя, однако, вместо системы (11) следующую:

$$\sum_{j=1}^{n-k+1} X_j\int_{y_{j-1}}^{y_j}\psi_1\varphi_i\,d\mu+$$

$$+\sum_{j=n-k+2}^{n+1} X_j\mu\,(x_{j-(n-k+1)})\,\varphi_i(x_{j-(n-k+1)})=0 \quad (i=1,\ldots,n). \tag{14}$$

Здесь положено: $y_0=a$, $y_{n-k+1}=d$.

Этим заканчивается доказательство теоремы 9.

* Случай, когда левее $[c,d]$ находится только $k\leqslant n-1$ точки E, разбирается аналогично.

7. Пусть μ — произвольная мера, в которой $[a, b]$ — приведенное множество. Рассмотрим всевозможные меры

$$\mu_1, \quad \mu_1(e) = \int_e \rho(x)\, d\mu, \quad 0 < \rho(x).$$

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 10. *Пусть $\omega(x)$ — суммируемая (μ) функция. Для того чтобы для любого отрезка $[c, d] \subset [a, b]$, любой системы Чебышева на $[c, d]$ и любой меры μ_1 многочлен (из функций системы) наилучшего приближения к функции $\omega(x)$ в метрике $L_1([c, d], \mu_1)$ был единственным, необходимо и достаточно, чтобы $\omega(x) \in T(\mu)$.*

Доказательство. Достаточность условий теоремы вытекает непосредственно из теоремы 7, так как $T(\mu) \subseteq T(\mu_1)$.

Докажем необходимость. Пусть $\omega(x) \overline{\in} T(\mu)$. Это значит, что найдется точка $x_0 \in [a, b]$, в которой множество предельных чисел $A(x_0)$ истинной функции $\tilde{\omega}(x)$ имеет по крайней мере один конечный смежный интервал δ. Пусть $\delta = (\alpha, \beta)$ и γ — середина δ. Возьмем числа α_1 и β_1 такие, что $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$, и построим отрезок $\Delta = [c, d] \supset x_0$, для которого при $x \in [c, d]$ значения $\tilde{\omega}(x)$ находятся вне $[\alpha_1, \beta_1]$. Положим

$$E_1 = \Delta\{\tilde{\omega}(x) > \gamma\}, \quad E_2 = \Delta\{\tilde{\omega}(x) < \gamma\}, \quad m_1 = \mu(E_1), \quad m_2 = \mu(E_2).$$

Из определения истинной функции заключаем, что $m_1 > 0$ и $m_2 > 0$.

Введем обозначения:

$$\alpha(x) = \operatorname{sign}[\omega(x) - \gamma], \quad \rho(x) = \begin{cases} 1, & x \in E_1, \\ \dfrac{m_1}{m_2}, & x \overline{\in} E_1, \end{cases} \quad \mu_1(e) = \int_e \rho\, d\mu.$$

Рассмотрим систему Чебышева, состоящую из единственной функции $\varphi_1(x) \equiv 1$. Имеем: $\alpha(x)[\omega(x) - \gamma] = |\omega(x) - \gamma|$ почти везде (μ_1) и, кроме того,

$$\int_c^d \alpha(x)\varphi_1(x)\, d\mu = \int_{E_1} \alpha(x)\, d\mu + \int_{E_2} (x)\frac{m_1}{m_2}\, d\mu = m_1 - m_1 = 0.$$

Следовательно, «многочлен» γ из функций системы $\{\varphi_1(x) \equiv 1\}$ наименее отклоняется от $\omega(x)$ в метрике $L_1([c, d], \mu_1)$. Но все предыдущие выкладки проходят с заменой γ на любое γ_1, $\alpha_1 < \gamma_1 < \beta_1$. Поэтому единственности многочлена наилучшего приближения в метрике $L_1([c, d], \mu_1)$ по функциям системы Чебышева $\{\varphi_1(x) \equiv 1\}$ здесь нет.

Теорема доказана.

§ 4. Некоторые теоремы о приближении в метрике L_1 функций комплексного переменного

1. ТЕОРЕМА 11. *Пусть Γ — дуга окружности, μ — неотрицательная мера B-множеств, относительно которой Γ — приведенное множество. Для любой функции $\omega(z) \in T(\mu)$ многочлен n-й степени, наименее уклоняющийся от $\omega(z)$ в метрике $L_1(\Gamma, \mu)$, единственен.*

Доказательство. Заметим, что без ограничения общности можно считать Γ дугой единичной окружности. Допустим теперь, что теорема не имеет места. Тогда найдутся множество F и функции $\alpha(z)$ и $\varphi^*(z)$, о которых говорится в теореме 3. Так как $\varphi^*(z)$ — многочлен n-й степени, то F содержит не более, чем n точек, а

$$\alpha(z) = \pm\frac{|\varphi^*(z)|}{\varphi^*(z)}$$

на смежных к F интервалах. Обозначим через $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ те нули $\varphi^*(z)$, в которых происходит смена знака в формуле для $\alpha(z)$. Пусть k_i — кратность нуля α_i. Обозначим через $\beta_1, \ldots, \beta_s$ остальные нули $\varphi^*(z)$ (здесь каждый нуль повторен столько раз, какова его кратность). Рассмотрим сначала случай, когда $r = 2p$ — четное число. Используем то обстоятельство, что $|\alpha_i| = 1, i = 1, \ldots, 2p$, и положим

$$e^{i\delta} = \overline{\alpha}_1 \cdot \overline{\alpha}_2 \ldots \overline{\alpha}_{2p}.$$

Построим многочлен

$$R(z) = e^{-i\frac{\delta}{2}} z^p (z-\beta_1)\ldots(z-\beta_s)(z-\alpha_1)^{k_1-1}\ldots(z-\alpha_{2p})^{k_{2p}-1}.$$

Степень $R(z)$ не превосходит n. Мы имеем:

$$\alpha(z) R(z) = \pm\frac{e^{-i\frac{\delta}{2}} z^p |\varphi^*(z)|}{a(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_{2p})}$$

(a — старший коэффициент $\varphi^*(z)$).

Рассмотрим дробь:

$$u(z) = \frac{e^{-i\frac{\delta}{2}} z^p}{(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_{2p})} = \frac{e^{-i\frac{\delta}{2}} \frac{1}{\overline{z}^p}}{\left(\frac{1}{\overline{z}} - \frac{1}{\overline{\alpha}_1}\right)\cdots\left(\frac{1}{\overline{z}} - \frac{1}{\overline{\alpha}_{2p}}\right)} =$$

$$= \frac{e^{i\frac{\delta}{2}} \overline{z}^p}{(\overline{z}-\overline{\alpha}_1)\cdots(\overline{z}-\overline{\alpha}_{2p})} = \overline{u(z)}.$$

Мы видим, что $u(z)$ меняет знаки в тех самых точках α_i, $i = 1, \ldots, 2p$, в которых происходит смена знака у $\alpha(z)$. Поэтому произведение $a\alpha(z)R(z)$ вещественно на Γ и сохраняет там постоянный знак. Следовательно,

$$\int_\Gamma \alpha(z) R(z)\, d\mu \neq 0,$$

что противоречит свойству функции $\alpha(z)$ быть ортогональной ко всем многочленам степени n.

Пусть теперь $r = 2p + 1$ — нечетное число; тогда на единичной окружности найдется точка $\beta \overline{\in} \Gamma$: в самом деле, если бы Γ была всей единичной окружностью, то перемена знака могла бы происходить лишь в четном числе точек. Положим

$$e^{i\delta} = \overline{\alpha}_1 \ldots \overline{\alpha}_r \beta$$

и построим многочлен

$$R(z) = e^{-i\frac{\delta}{2}} z^p (z-\beta_1)\ldots(z-\beta_s)(z-\alpha_1)^{k_1-1}\ldots(z-\alpha_r)^{k_r-1}\cdot(z-\beta).$$

Аналогично предыдущему случаю, убедимся, что

$$\int_{\Gamma} \alpha(z) R(z)\, d\mu \neq 0.$$

Теорема полностью доказана.

2. На протяжении этого пункта слова «почти везде» относятся к мере Лебега.

Мы скажем, что заданная на дуге окружности функция $\omega(z)$ входит в класс $\mathscr{E}_1$, если в некоторой области d с жордановой спрямляемой границей $S \supset \Gamma$ найдется аналитическая функция $\omega(y)$, $y \in d$, класса E_1, граничные значения которой почти везде на Γ совпадают с $\omega(z)$ (определение класса аналитических функций E_1 см. в работе ([8]), гл. III, § 6).

ТЕОРЕМА 12. *Если* $\omega(z) \in \mathscr{E}_1$, $\mu_1(e) = \int_e \rho(\theta)\, d\theta$, $\rho(\theta) > 0$, *почти везде относительно лебеговской меры) на* Γ, *то многочлен n-й степени, наименее уклоняющийся от* $\omega(z)$ *в метрике* $L_1(\Gamma, \mu_1)$, *единственен.*

Доказательство. Мы не можем применять сразу же теорему 3, так как не знаем, имеет ли функция класса $\mathscr{E}_1$ лишь точки 1-го и 2-го рода. Поэтому нам приходится до известной степени повторить начальные рассуждения из доказательства теоремы 3. Допустим, что существуют два многочлена наилучшего приближения к $\omega(z)$: $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$.

Положив

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) - \varphi_2(z)$$

и введя $\alpha(z)$ из теоремы 2, найдем (учитывая, что число нулей $\varphi(z)$ не более n), как и при доказательстве теоремы 3, что почти везде на Γ выполняются равенства:

$$\alpha(z) = \frac{|\omega(z) - \varphi_i(z)|}{\omega(z) - \varphi_i(z)} = \pm \frac{|\varphi(z)|}{\varphi(z)}, \quad i = 1, 2.$$

Деля одно из этих равенств на другое, обнаружим, что $\frac{\omega(z) - \varphi_1(z)}{\varphi(z)}$ вещественно почти везде на Γ.

Рассмотрим в области d мероморфную функцию $T(y)$:

$$T(y) = \frac{\omega(y) - \varphi_1(y)}{\varphi(y)}.$$

Из свойств функций класса E_1 легко вытекает, что, имея почти везде на Γ вещественные граничные значения, $T(y)$ аналитически продолжается через любую дугу $\gamma \subset \Gamma$, свободную от нулей $\varphi(z)$. Отсюда, в частности, следует, что функция $\omega(z)$ оказывается непрерывной на Γ, за исключением точек, являющихся нулями $\varphi(z)$. Заметим также, что равенство

$$\omega(z) - \varphi_1(z) = 0$$

можно считать выполняющимися лишь в нулях $\varphi(z)$ (это доказывается аналогично соответствующему месту теоремы 3). Следовательно, перемена знака в формуле

$$\alpha(z) = \pm \frac{|\varphi(z)|}{\varphi(z)}$$

происходит лишь в некоторых нулях $\varphi(z)$

Дальнейшие рассуждения ведутся так же, как в теореме 12.

3. Рассмотрим случай, когда E состоит из двух концентрических окружностей Γ_1 и Γ_2. Без ограничения общности считаем Γ_1 единичной окружностью, а Γ_2 — окружностью радиуса $r < 1$. Обозначим через K единичный круг.

ТЕОРЕМА 13. *Пусть* $E = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\mu(e) = \int\limits_e |\psi(z)|\, d\mu$, $\psi(z) \in H_1$ *в единичном круге* [см. определение H_1 в работе (8), гл. II]. *Для того чтобы система H, состоящая из многочленов степени n, обладала свойством единственности наилучшего приближения в метрике $L_1(E, \mu)$ относительно класса $T(\mu)$, необходимо и достаточно, чтобы* $\psi(z) \not\equiv \frac{A}{Q_n(z)}$, *где* $Q_n(z) \in H$ *(в силу условия* $\psi(z) \in H_1$, $Q_n(z) \neq 0$ *при* $|z| \leqslant 1$).

Доказательство достаточности. Допустив противное, мы, в силу теоремы 3, придем к существованию многочлена $P_n^*(z) \in H$ и функции

$$\alpha(z) = \pm \frac{|P_n^*(z)|}{P_n^* |z|},$$

ортогональной ко всем многочленам степени n, причем перемена знака происходит в некоторых нулях $P_n^*(z)$. Если на Γ_1 есть точки $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2p}$, где происходит перемена знака, то строим $R(z)$, как в п. 1. Тогда на Γ_1 будем иметь:

$$\alpha(z) R(z) = |R(z)|,$$

а поэтому

$$\int\limits_{\Gamma_1} \alpha(z) R(z)\, d\mu = \int\limits_{\Gamma_1} |R(z) \psi(z)|\, d\theta.$$

Пусть $z \in \Gamma_2$. Тогда

$$\alpha(z) R(z) = \pm \frac{e^{-i\frac{\delta}{2}} |P_n^*(z)|\, z^p}{(z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_{2p})},$$

$$\overline{\alpha(z) R(z)} = \pm \frac{e^{-i\frac{\delta}{2}} r^{2p} z^p}{(z - \alpha_1 r^2) \cdots (z - \alpha_{2p} r^2)}.$$

Отсюда ясно, что равенство

$$\alpha(z) R(z) = \overline{\alpha(z) R(z)}$$

не может быть справедливо почти везде (иначе многочлены, стоящие в знаменателях обоих выражений, имели бы одинаковые нули, что не имеет места).

Итак,

$$\left|\mathrm{Re} \int\limits_{\Gamma_2} \alpha(z) R(z)\, d\mu\right| < \int\limits_{\Gamma_2} |R(z)|\, d\mu$$

(строгое неравенство!).

С другой стороны, в силу известных свойств средних для аналитических функций, выполняется неравенство:

$$\int_{\Gamma_2} |R(z)\psi(z)|\,d\theta \leqslant \int_{\Gamma_1} |R(z)\psi(z)|\,d\theta.$$

Таким образом,

$$\left|\int_E \alpha(z) R(z)\,d\mu\right| \geqslant \int_E \operatorname{Re}[\alpha(z) R(z)]\,|\psi(z)|\,d\theta =$$

$$= \int_{\Gamma_1} |R(z)\psi(z)|\,d\theta + \int_{\Gamma_2} \operatorname{Re}[\alpha(z) R(z)]\,|\psi(z)|\,d\theta >$$

$$> \int_{\Gamma_1} |R(z)\psi(z)|\,d\theta - \int_{\Gamma_2} |R(z)\psi(z)|\,d\theta > 0.$$

Следовательно,

$$\int_E \alpha(z) R(z)\,d\mu \neq 0.$$

Если на Γ_1 нет точек перемены знака для $\alpha(z)$, а на Γ_2 есть, то положим просто

$$R(z) = P_n^*(z).$$

Тогда на Γ_1

$$\alpha(z) R(z) = |P_n^*(z)|,$$

(можно считать знак $+$), а на Γ_2

$$\left|\int_{\Gamma_2} \operatorname{Re}[\alpha(z) R(z)]\,d\mu\right| = \left|\int_{\Gamma_2} \pm |P_n^*(z)|\,|\psi(z)|\,d\theta\right| <$$

$$< \int_{\Gamma_2} |P_n^*(z)\psi(z)|\,d\theta.$$

Далее рассуждаем, как и выше.

Наконец, может представиться такой случай:

$$\alpha(z) = +\frac{|P_n^*(z)|}{P_n^*(z)}\ z \in \Gamma_1, \qquad \alpha(z) = -\frac{|P_n^*(z)|}{P_n^*(z)}\ z \in \Gamma_2.$$

Рассуждения предыдущего случая окажутся неприменимыми для данного лишь тогда, когда

$$\int_{\Gamma_1} |P_n^*(z)\psi(z)|\,d\theta = \int_{\Gamma_2} |P_n^*(z)\psi(z)|\,d\theta.$$

При этом последнем предположении, в силу отмечавшегося свойства средних, для любой окружности Γ радиуса $R, r \leqslant R \leqslant 1$, будем иметь:

$$\int_{\Gamma} |P_n^*(z)\psi(z)|\,d\theta \equiv \text{const}.$$

Отсюда легко усмотреть, что

$$P_n^*(z)\,\psi(z) \equiv \text{const} = A.$$

Но тогда $\psi(z) \equiv \frac{A}{P_n^*(z)}$, вопреки предположению.

Доказательство необходимости. Если

$$\psi(z) = \frac{A}{Q_n(z)}, \quad Q_n(z) \neq 0 \text{ при } |z| \leqslant 1,$$

то в классе $T(\mu)$ единственности обеспечить нельзя. В самом деле, положим

$$\alpha(z) = + \frac{|Q(z)|}{Q_n(z)}, \quad z \in \Gamma_1,$$

и

$$\alpha(z) = - \frac{|Q_n(z)|}{Q_n(z)}, \quad z \in \Gamma_2.$$

Тогда для любого многочлена $P_n(z)$ степени $\leqslant n$ имеем:

$$\int_E \alpha(z) P_n(z)\, d\mu = A \int_{\Gamma_1} \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}\, d\theta - A \int_{\Gamma_2} \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}\, d =$$

$$= A\left[\frac{P_n(0)}{Q_n(0)} - \frac{P_n(0)}{Q_n(0)}\right] = 0.$$

В силу теоремы 3, единственность будет иметь место не для всех $\omega(z) \in T(\mu)$.

ТЕОРЕМА 14. *Если в условиях предыдущей теоремы* $\psi(z) \not\equiv \frac{A}{Q_n(z)}$, *то H, состоящее из многочленов n-й степени, обладает свойством единственности в классе граничных значений аналитических в кольце $r < |z| < 1$, функций, принадлежащих классу E_1 (E_1 — класс аналитических функций представимых интегралом Коши через свои граничные значения* *).

Доказательство протекает так же, как в первой части доказательства теоремы 13 с использованием приема, применявшегося в теореме 12.

4. Рассмотрим приближения функций, заданных в области D плоскости z.

ТЕОРЕМА 15. *Пусть D — область плоскости z и μ — мера, в которой D — приведенное множество. Пусть H — какое-то линейное подпространство в $L_1(D, \mu)$, элементы которого суть функции, мероморфные в D. Тогда H обладает свойством единственности наилучшего приближения относительно класса $T(\mu)$.*

Теорема 15 немедленно следует из теоремы 5, ибо для каждой $\varphi(z) \in H$ множество F_φ нулей $\varphi(z)$ состоит из изолированных точек и, значит, $D - F$ связно.

ТЕОРЕМА 16. *Утверждение теоремы 14 имеет место, если элементами H являются решения*

$$\varphi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

---

* См. ([8]), гл. III и ([2]), гл. I.

линейной эллиптической системы уравнений с частными производными:

$$u_x - v_y = a(x, y)u + b(x, y)v, \quad u_y + v_x = c(x, y)u + d(x, y)v$$

(каждая $\varphi(z)$ может удовлетворять своей системе).

Доказательство немедленно следует из известной теоремы Карлемана [см. ([12])], утверждающей, что нули $\varphi(z)$ внутри D являются изолированными точками.

5. Интересно отметить тот парадоксальный факт, что наличие у функции достаточного числа точек 1-го рода уже гарантирует в некоторых случаях единственность функции наилучшего приближения.

ТЕОРЕМА 17. *Пусть E — множество плоскости z, приведенное относительно меры μ. Пусть $\omega(z) \in L_1(E, \mu)$ и имеет $n + 1$ точку 1-го рода. Многочлен степени n, наименее уклоняющийся в метрике $L_1(E, \mu)$ от $\omega(z)$, единственен.*

ТЕОРЕМА 18. *Пусть D — область плоскости z, приведенная относительно меры μ. Пусть $\omega(z) \in L_1(D, \mu)$ и имеет бесконечное множество точек 1-го рода, допускающее предельную точку внутри D. Пусть, наконец, $H \subset L_1(D, \mu)$ состоит из аналитических в D функций. Существует не более одной функции $\varphi^*(z) \in H$, наименее уклоняющейся от $\omega(z)$ в метрике $L_1(D, \mu)$.*

Теоремы 17 и 18 немедленно следуют из замечания, сделанного в п. 6 § 2.

Поступило
12.XII.1956

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, М.—Л., Гостехиздат, 1947.

[2] Jackson D., A general class of problems in approximation, Amer. Journ. of Math., XLVI (1924), 215—234.

[3] Крейн М. Г., L-проблема моментов в абстрактном нормированном пространстве, статья IV в книге: Ахиезер Н. И. и Крейн М. Г., L-проблема моментов, Харьков, 1938.

[4] Haar A., Die Minkowskische Geometrie und Annäherung an stetige Funktionen, Mat. Ann., 78 (1918), 294—311.

[5] Хавинсон С. Я., К вопросу о единственности многочлена наилучшего приближения в метрике пространства L_1, Доклады Ак. наук СССР, 105, № 6 (1956), 1159—1161.

[6] Хавинсон С. Я., Системы П. Л. Чебышева и единственность многочлена наилучшего приближения в метрике пространства L_1, Труды 3-го Всесоюзн. матем. съезда, т. 1 (1956), 110.

[7] Сакс С., Теория интеграла, М.—Л., 1949.

[8] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, изд. 2-е, М.—Л., Гостехиздат, 1950.

[9] Хавинсон С. Я., Некоторые экстремальные проблемы для аналитических функций в конечно-связных областях, Матем. сборн., 36 (78):3 (1955), 445—478.

[10] Банах С., Курс функціонального аналізу, Киев, изд. Радянська школа, 1948.

[11] Понтрягин Л. С., Основы комбинаторной топологии, М.—Л., Гостехиздат, 1947.

[12] Carleman T., Sur les système linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables, Comptes rendus, Paris, 197(1933), 471—474.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 271—298

В. Н. МАСЛЕННИКОВА

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

(*Представлено академиком* **С. Л. Соболевым**)

Решаются две смешанные задачи для уравнения четвертого порядка и для системы уравнений первого порядка, описывающих малые колебания вращающейся жидкости с учетом сжимаемости. Доказывается единственность этих решений, непрерывная зависимость их от начальных данных и правых частей уравнений системы, а также исследуются дифференциальные свойства полученных решений.

Рассматриваются две смешанные задачи для системы

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - [\vec{v} \times \vec{k}] + \operatorname{grad} p = \vec{F}, \qquad \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{v} = \psi, \tag{1}$$

записанной в векторной форме, когда кроме начальных данных

$$\vec{v}\,|_{t=0} = \vec{v}^{\,0}(x), \qquad p\,|_{t=0} = p^0(x), \tag{2}$$

задаются условия на границе. Эти условия могут быть двух видов:

$$p\,|_S = 0 \tag{3}$$

или

$$v_n\,|_S = 0, \tag{4}$$

где S — поверхность в трехмерном пространстве переменных $x = x_1, x_2, x_3$, ограничивающая область Ω, в которой задана система (1), n — внутренняя нормаль к этой поверхности, вектор $\vec{v}$ имеет компоненты v_{x_1}, v_{x_2}, v_{x_3}, $\vec{k}$ — единичный орт, направленный по оси x_3. В соответствии с этим мы будем говорить о первой или второй смешанных задачах. Задача Коши для системы (1) при условиях (2) решена в явном виде в работе ([4]).

Такие же смешанные задачи и задача Коши были решены С. Л. Соболевым для случая, когда в последнее уравнение системы (1) не входит $\frac{\partial p}{\partial t}$, т. е. для несжимаемой жидкости [см. ([1])].

Одновременно мы решаем две смешанные задачи для уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta u + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = f, \tag{5}$$

которое получается из системы (1) путем исключения неизвестных (здесь Δu — оператор Лапласа). Решение уравнения (5) находится при начальном условии

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \tag{6}$$

и при одном из следующих граничных условий:

$$u\,|_S = 0$$

или

$$\left[\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial n} + \frac{\partial u}{\partial x_3}\cos nx_3 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial t}\cos nx_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial t}\cos nx_1\right]_S = 0.$$

Краткое резюме настоящей статьи содержится в работе ([5]).

§ 1. Решение первой смешанной задачи для уравнения четвертого порядка

Построение решения первой смешанной задачи для системы (1) при условиях (2) и (3) начнем с определения неизвестной функции p. Для этого построим решение уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta p + \frac{\partial^2 p}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 p}{\partial t^4} = f \tag{5}$$

в ограниченной области изменения x, удовлетворяющее начальным условиям

$$\left.\frac{\partial^k p}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \varphi_k(x), \quad k = 0, 1, 2, 3, \tag{6'}$$

и граничному условию

$$p\,|_S = 0 \tag{7}$$

при $t \geqslant 0$.

Предполагая, что функции φ_k дважды непрерывно дифференцируемы по x и что выполнены условия согласования:

$$\varphi_k\,|_S = 0 \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

можно начальные условия (6′) свести к однородным, сделав замену неизвестной функции по формуле*:

$$p_1 = p - \varphi_0 - t\varphi_1 - \frac{t^2}{2}\varphi_2 - \frac{t^3}{6}\varphi_3. \tag{8}$$

Таким образом, для упрощения выкладок, мы будем доказывать существование решения уравнения (5) при условиях:

$$\left.\frac{\partial^k p}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \tag{6}$$

$$p\,|_S = 0. \tag{7}$$

* Заметим, что сведение начальных условий к однородным не играет принципиальной роли в доказательстве и вводится только ради простоты изложения; следовательно, использование условий согласования несущественно.

Пусть свободный член уравнения (5) после того, как начальные условия сведены к нулевым, таков, что

$$\int_0^\infty \int_\Omega f^2 e^{-2\alpha_1 t}\, d\Omega\, dt < \infty \tag{9}$$

для какого-нибудь $\alpha_1 \geqslant 0$.

Применим к уравнению (5) преобразование Лапласа по переменному t. Обозначим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty p(x,\ t)\, e^{-\lambda t} dt = P(x,\ \lambda),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(x,\ t)\, e^{-\lambda t} dt = \varphi(x,\ \lambda),$$

где $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, $\lambda_1 \geqslant \lambda_0 > 0$.

Уравнение (5) при условиях (6) преобразуется в уравнение

$$\lambda^2 \Delta P + \frac{\partial^2 P}{\partial x_3^2} - \lambda^2 (1 + \lambda^2) P = \varphi(x,\ \lambda). \tag{10}$$

Найдем решение этого уравнения, удовлетворяющее граничному условию

$$P|_S = 0. \tag{11}$$

Определение. Назовем обобщенным решением уравнения (10) при нулевом граничном условии (11) функцию P, принадлежащую классу $D^0(\Omega)$ [см. ([2])] и удовлетворяющую следующему интегральному тождеству:

$$\int_\Omega \left(\lambda^2 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial P}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial P}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right) d\Omega = -\int_\Omega \{\lambda^2 (1 + \lambda^2) P\Phi + \varphi\Phi\}\, d\Omega \tag{12}$$

для любой комплексно-значной функции $\Phi \in D^0(\Omega)$. Здесь $D^0(\Omega)$ есть замыкание в норме $W_2^{(1)}(\Omega)$ совокупности всех один раз непрерывно дифференцируемых в Ω функций, равных нулю вблизи границы области.

Доказательство существования и единственности этого решения можно провести методом конечных разностей так же, как в работе ([2]) (стр. 197—200), с использованием теорем вложения С. Л. Соболева, если доказать справедливость следующих неравенств:

$$I_{\Omega_h}(P) \equiv h^3 \sum_{\Omega_h} |P_h|^2 \leqslant \frac{c_1}{|\lambda|^2} h^3 \cdot \sum_{\Omega_h} |\varphi|^2, \tag{13}$$

$$I_{\Omega h}^{(1)}(P) \equiv h^3 \sum_{\Omega_h} \sum_{i=1}^{3} |P_{x_i}|^2 \leqslant c_2 h^3 \sum_{\Omega_h} |\varphi|^2, \tag{14}$$

где $\operatorname{Re}\lambda = \lambda_1 \geqslant \lambda_0 > 0$, h — шаг сетки, на которую разбивается пространство x_1, x_2, x_3,

$$P_{x_i} = \frac{P(x_i + \Delta x_i,\ \lambda) - P(x_i,\ \lambda)}{\Delta x_i},$$

Ω_h — квадрильяж области Ω и суммирование проводится по всем точкам решетки, принадлежащим Ω_h.

Уравнение (10) при этом заменяется разностным:

$$\lambda^2 \sum_{i=1}^{3} P_{x_i\bar{x}_i} + P_{x_3\bar{x}_3} - \lambda^2 (1+\lambda^2) P_h = \varphi(x, \lambda). \tag{10*}$$

Функцию P_h в точках границы области Ω_h и вне этой области положим равной нулю. Во внутренних точках области Ω_h функция P_h должна удовлетворять уравнению (10*). Тогда мы получим систему неоднородных алгебраических уравнений, число которых совпадает с числом неизвестных. Для ее однозначной разрешимости покажем, что соответствующая ей однородная система может иметь только нулевое решение. Для этого достаточно доказать неравенства (13) и (14) [см. ([2])], но мы докажем более сильные неравенства:

$$I_{\Omega_h}(P) \leqslant \frac{c_3}{|\lambda|^6} I_{\Omega_h}(\varphi), \tag{15}$$

$$I^{(1)}_{\Omega_h}(P) \leqslant \frac{c_4}{|\lambda|^4} I_{\Omega_h}(\varphi), \tag{16}$$

которыми и будем пользоваться в дальнейшем. Для их доказательства умножим (10*) на функцию $\overline{P}$, комплексно-сопряженную с P, разделим обе части (10*) на λ^2+1 и просуммируем по всем точкам решетки и по частям.

Ввиду нулевого граничного условия, контурные члены пропадут и мы получим следующее равенство:

$$h^3 \sum_{\Omega_h} \left\{ \sum_{i=1}^{2} \frac{\lambda^2}{\lambda^2+1} P_{x_i}\overline{P}_{x_i} + P_{x_3}\overline{P}_{x_3} \right\} = -h^3 \sum_{\Omega_h} (\lambda^2 |P_h|^2 + \varphi'\overline{P}_h),$$

где

$$\varphi'(x, \lambda) = \frac{\varphi(x, \lambda)}{\lambda^2+1}.$$

Отделим вещественные и мнимые части, считая

$$P_h = P_1 + iP_2, \quad \varphi' = \varphi'_1 + i\varphi'_2, \quad \lambda = \lambda_1 + i\lambda_2,$$

$$\frac{\lambda^2}{\lambda^2+1} = \frac{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)^2 + (\lambda_1^2-\lambda_2^2)}{(\lambda_1^2-\lambda_2^2+1)^2 + 4\lambda_1^2\lambda_2^2} + i\frac{2\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1^2-\lambda_2^2+1)^2+4\lambda_1^2\lambda_2^2} = a_1 + ia_2.$$

Мы получим:

$$h^3 \sum_{\Omega_h} \left(a_1 \sum_{i=1}^{2} |P_{x_i}|^2 + |P_{x_3}|^2 \right) = h^3 \sum_{\Omega_h} \left\{ (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)|P_h|^2 - \sum_{i=1}^{2} P_i \varphi'_i \right\}, \tag{17}$$

$$h^3 \sum_{\Omega_h} a_2 \sum_{i=1}^{2} |P_{x_i}|^2 = h^3 \sum_{\Omega_h} \{-2\lambda_1\lambda_2 |P_h|^2 + \varphi'_1 P_2 - \varphi'_2 P_1\}. \tag{18}$$

Как и в работе ([2]), разберем два случая: 1) $\frac{1}{2}\lambda_1^2 > \lambda_2^2$, 2) $\frac{1}{2}\lambda_1^2 \leqslant \lambda_2^2$ и заметим, что в обоих случаях $a_1 > 0$ (полагаем $\operatorname{Re}\lambda = \lambda_1 > 1$).

1) Пусть $\frac{1}{2}\lambda_1^2 > \lambda_2^2$. Оценим a_1 снизу:

$$a_1 \geqslant \frac{\lambda_1^4 + \frac{1}{2}\lambda_1^2}{3\lambda_1^4 + 2\lambda_1^2 + 1} \geqslant \frac{1}{6}.$$

Подставляя эту оценку в (17), получим неравенство:

$$I^{(1)}_{\Omega_h}(P) \leqslant h^3 \sum_{\Omega_h} 6\left\{-\frac{1}{2}\lambda_1^2 |P_h|^2 - P_1\varphi_1' - P_2\varphi_2'\right\}.$$

Перенося первый член правой части налево и используя неравенство Коши, получаем неравенства (13) и (14).

2) Пусть $\frac{1}{2}\lambda_1^2 \leqslant \lambda_2^2$. Оценим a_1 снизу:

$$a_1 \geqslant \frac{\lambda_1^4 + \lambda_2^4 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2(2\lambda_1^2 - 1)}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 1)^2 + 8\lambda_2^4} \geqslant \frac{\lambda_2^4}{(3\lambda_2^2 + 1)^2 + 8\lambda_2^4} \geqslant \frac{1}{33}.$$

Подставляя эту оценку в (17), получим неравенство:

$$I^{(1)}_{\Omega_h}(P) \leqslant 33|\lambda_2|^2 I_{\Omega_h}(P) + 33\sqrt{I_{\Omega_h}(P)\, I_{\Omega_h}(\varphi')}. \qquad (19)$$

С другой стороны, из (18) имеем:

$$2|\lambda_1\lambda_2|\, I_{\Omega_h}(P) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2|\lambda_1\lambda_2|}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + 1)^2 + 4\lambda_1^2\lambda_2^2} I^{(1)}_{\Omega_h}(P) + \sqrt{I_{\Omega_h}(P)\, I_{\Omega_h}(\varphi')}.$$

Оценим сверху коэффициент при $I^{(1)}_{\Omega_h}(P)$:

$$\frac{2|\lambda_1\lambda_2|}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + 1)^2 + 4\lambda_1^2\lambda_2^2} \leqslant \frac{1}{2|\lambda_1\lambda_2|} \leqslant \frac{1}{|\lambda_2|},$$

так как, по предположению, $\lambda_1 \geqslant 1$. Мы получаем:

$$2|\lambda_1\lambda_2|\, I_{\Omega_h}(P) \leqslant \frac{1}{|\lambda_2|} I^{(1)}_{\Omega_h}(P) + \sqrt{I_{\Omega_h}(P)\, I_{\Omega_h}(\varphi')}.$$

Используя неравенство (19), находим отсюда:

$$(2\lambda_1 - 33)|\lambda_2|\, I_{\Omega_h}(P) \leqslant c_5\sqrt{I_{\Omega_h}(P)\, I_{\Omega_h}(\varphi')}.$$

Выбирая λ_1 столь большим, чтобы $2\lambda_1 - 33 > 1$, получаем:

$$I_{\Omega_h}(P) \leqslant \frac{c_5^2}{|\lambda_2|^2} I_{\Omega_h}(\varphi') \leqslant \frac{c_6}{|\lambda|^2} I_{\Omega_h}(\varphi').$$

Подставляя эту оценку в (19), найдем:

$$I^{(1)}_{\Omega_h}(P) \leqslant c_7 I_{\Omega_h}(\varphi').$$

Таким образом, неравенства (13) и (14) доказаны для $\frac{1}{2}\lambda_1^2 \leqslant \lambda_2^2$ при условии, что $\operatorname{Re}\lambda = \lambda_1 \geqslant \lambda_0' > 1$. Но

$$I_{\Omega_h}(\varphi') = h^3 \sum_{\Omega_h} \frac{|\varphi|^2}{|\lambda^2+1|^2} \leqslant \frac{c'}{|\lambda|^4} I_{\Omega_h}(\varphi). \tag{20}$$

Подставляя (20) в неравенства (13) и (14), получим нужные нам неравенства (15) и (16).

Так как неравенства (15) и (16) справедливы для любых малых h, то предельная функция P будет удовлетворять следующим интегральным неравенствам:

$$I_\Omega(P) \equiv \int_\Omega |P|^2 d\Omega \leqslant \frac{c_3}{|\lambda|^6} I_\Omega(\varphi), \tag{21}$$

$$I^{(1)}_\Omega(P) \equiv \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} \left|\frac{\partial P}{\partial x_i}\right|^2 d\Omega \leqslant \frac{c_4}{|\lambda|^4} I_\Omega(\varphi). \tag{22}$$

Заметим, что обобщенное решение краевой задачи для уравнения (10) в смысле (12) будет существовать для любой функции φ, квадратично суммируемой по Ω.

Для доказательства существования обратного преобразования Лапласа от функции P и ее производных воспользуемся известной теоремой Планшереля для преобразований Фурье и равенством Парсеваля:

$$\int_0^\infty e^{-2kx} |f(x)|^2 dx = \int_{\infty}^{+\infty} |\varphi(k+it)|^2 dt, \tag{23}$$

где $\varphi(s)$ — преобразованная по Лапласу функция $f(x)$ ($f(x) = 0$ для $x<0$), а именно, докажем существование интеграла:

$$p(x, t) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_1 - i\infty}^{\lambda_1 + i\infty} P(x, \lambda) e^{\lambda t} d\lambda \tag{24}$$

для почти всех $x \in \Omega$ и $\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda \geqslant \lambda_0 > 1$, а также справедливость неравенства:

$$\int_\Omega \int_0^\infty \left[p^2 + \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)^2 + \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial^3 p}{\partial x_i \partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^3 p}{\partial t^3}\right)^2\right] e^{-2\lambda_1 t} dt\, d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant c \int_\Omega \int_0^\infty f^2 e^{-2\lambda_1 t} dt\, d\Omega. \tag{25}$$

Действительно, у нас доказано неравенство

$$\int_\Omega |P|^2 d\Omega \leqslant c \int_\Omega |\varphi(x, \lambda)|^2 d\Omega, \tag{26}$$

справедливое для всех λ, для которых $\operatorname{Re}\lambda > \lambda_0 > 1$.

Далее,

$$\varphi(x,\ \lambda_1 + i\lambda_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(x,\ t)\, e^{-(\lambda_1 + i\lambda_2)t}\, dt,$$

причем для f выполнено условие (9), т. е. $fe^{-\lambda_1 t} \in L_{2,\infty}$ по t.

На основании (23), $\varphi(x,\ \lambda_1 + i\lambda_2) \in L_{2,\infty}$ по λ_2, а следовательно, по (26), и $P(x,\ \lambda_1 + i\lambda_2) \in L_{2,\infty}$ по λ_2.

Действительно, мы имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_\Omega |P(x,\ \lambda_1 + i\lambda_2)|^2\, d\Omega\, d\lambda_2 \leqslant$$

$$\leqslant c \int_{-\infty}^{+\infty} \int_\Omega |\varphi(x,\ \lambda_1 + i\lambda_2)|^2\, d\lambda_2 \leqslant c \int_0^\infty \int_\Omega |f(x,\ t)|^2\, e^{-2\lambda_1 t}\, dt\, d\Omega,$$

т. е. $P(x,\ \lambda) \in L_2$ по Ω и, кроме того, $P(x,\ \lambda_1 + i\lambda_2) \in L_{2,\infty}$ по λ_2.

Пользуясь теоремой Планшереля, находим, что равенство (24) выполняется в указанном смысле и что

$$\int_0^\infty \int_\Omega [p(x,\ t)]^2\, e^{-2\lambda_1 t}\, d\Omega\, dt \leqslant \int_0^\infty \int_\Omega [f(x,\ t)]^2\, e^{-2\lambda_1 t}\, dt\, d\Omega.$$

Аналогично оцениваются производные от p по координатам, так как для $\frac{\partial p}{\partial x_i}$ справедливы оценки (18).

Оценим $\frac{\partial^3 p}{\partial t^3}$. При нулевых начальных данных

$$\frac{\partial^3 p}{\partial t^3} = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_1 - i\infty}^{\lambda_1 + i\infty} \lambda^3 P e^{-\lambda t}\, d\lambda.$$

На основании (15) имеем:

$$\int_\Omega |\lambda^3 P|^2\, d\Omega = |\lambda|^6 \int_\Omega |P|^2\, d\Omega \leqslant c_3 \int_\Omega |\varphi|^2\, d\Omega.$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty \int_\Omega \left(\frac{\partial^3 p}{\partial t^3}\right)^2 e^{-2\lambda_1 t}\, d\Omega\, dt \leqslant c_3 \int_0^\infty \int_\Omega [f(x,\ t)]^2\, e^{-2\lambda_1 t}\, dt\, d\Omega.$$

Оценки для других производных в (25) проводятся аналогично. Таким образом, неравенство (25) доказано.

Определение. Назовем обобщенным решением смешанной задачи для уравнения (5) при нулевом граничном и начальных условиях (6) и (7) функцию $p(x,\ t)$, принадлежащую классу $D_1^0(Q)$, $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \in L_2(Q)$ (Q — цилиндр в пространстве x, t высоты l с основанием Ω), принимающую начальные условия

$$\left.\frac{\partial^k p}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0, \quad k = 0,\ 1,$$

и удовлетворяющую следующему интегральному тождеству:

$$\int_0^l \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^3 p}{\partial x_i \partial t^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \Phi + \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right] d\Omega\, dt =$$

$$= -\int_0^l \int_\Omega f \cdot \Phi d\Omega dt \tag{27}$$

для любой функции $\Phi(x, t) \in D_1^0(Q)$ и такой, что

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \in L_2(Q), \quad \frac{\partial^k \Phi}{\partial t^k}\Big|_{t=l} = 0, \quad k = 0, 1.$$

Здесь [см. ([2])] $D_1^0(Q)$ есть замыкание в норме $W_2^{(1)}(Q)$ совокупности всех непрерывно дифференцируемых функций, равных нулю в δ-окрестности боковой поверхности цилиндра Q.

Формула (24) дает обобщенное решение уравнения (5) в смысле (27). Действительно, $P(x, \lambda)$ есть обобщенное решение уравнения (10) в смысле (12). Применяя преобразование Лапласа к интегральному тождеству (27), беря при этом в качестве функции $\Phi(x, t)$ функцию $\Phi(x, l-t)$, пользуясь теоремой о свертке и тем, что

$$\Phi|_{t=l} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t}\Big|_{t=l} = 0,$$

мы получаем интегральное тождество (12):

$$\int_\Omega \left(\lambda^2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial P}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_i} + \frac{\partial P}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_3}\right) d\Omega = -\int_\Omega [\lambda^2 (\lambda^2 + 1) P\Phi^* + \varphi \Phi^*]\, d\Omega. \tag{12}$$

где Φ^* обращается в нуль на границе области.

Таким образом, если мы найдем функцию $P(x, \lambda)$, удовлетворяющую этому интегральному тождеству и неравенствам (17) и (18), то, умножая (12) на $\frac{1}{i\sqrt{2\pi}} e^{\lambda t}$ и интегрируя по λ от $\lambda_1 - i\infty$ до $\lambda_1 + i\infty$ и по частям, легко проверить, что интеграл

$$p = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_1 - i\infty}^{\lambda_1 + i\infty} P(x, \lambda) e^{\lambda t}\, d\lambda$$

будет удовлетворять интегральному тождеству (27). Кроме того, $p|_S = 0$. Этим доказана

ТЕОРЕМА 1. *Если правая часть уравнения* (5) *такова, что*

$$\int_0^\infty \int_\Omega f^2 e^{-2\alpha_1 t}\, dt\, d\Omega < \infty$$

для какого-нибудь $\alpha_1 \geqslant 0$, *то существует единственное обобщенное в смысле* (27) *решение* $p(x, t)$ *уравнения* (5) *смешанной задачи при нулевых начальных и краевых условиях* (6) *и* (7), *которое может быть представлено*

как трансформация Лапласа от обобщенного решения уравнения (10), *удовлетворяющего условию* $P \in D^0(\Omega)$ *при* λ *таком, что* $\operatorname{Re}\lambda = \lambda_1 > \alpha_2 \geqslant \alpha_1$. *При этом для* $p(x, t)$ *справедлива оценка* (25) *и интеграл*

$$p = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\lambda_1 - i\infty}^{\lambda_1 + i\infty} P(x, \lambda) e^{\lambda t} d\lambda$$

существует для почти всех x.

§ 2. Решение второй смешанной задачи для уравнения четвертого порядка

Построение решения второй смешанной задачи для системы (1) при условиях (2) и (4) начнем также с определения неизвестной функции p. Для определения p мы получим уравнение (5), решение которого должно удовлетворять начальным условиям (6) и условию на границе:

$$L_1 p\,|_S \equiv \left[\frac{\partial p}{\partial x_3}\cos nx_3 + \frac{\partial^3 p}{\partial t^2 \partial n} - \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial t}\cos nx_2 + \frac{\partial^2 p}{\partial x_2 \partial t}\cos nx_1\right]_S = G. \qquad (28$$

Условие (28) на функцию p на границе есть следствие условия

$$v_n|_S = 0.$$

В самом деле, умножим третье уравнение системы (1) на $\cos nx_3$, первое и второе уравнения продифференцируем по t и умножим соответственно на $-\cos nx_2$ и $\cos nx_1$ и сложим это с продифференцированными два раза по t первыми тремя уравнениями системы, умноженными соответственно на $\cos nx_i$, $i = 1, 2, 3$; тогда получим:

$$\left[\frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{\partial^3 v_n}{\partial t^3} + \frac{\partial p}{\partial x_3}\cos nx_3 + \frac{\partial^3 p}{\partial t^2 \partial n} - \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial t}\cos nx_2 + \frac{\partial^2 p}{\partial t\, \partial x_2}\cos nx_1\right]_S =$$
$$= \left[\frac{\partial^2 F_n}{\partial t^2} + F_{x_3}\cos nx_3 - \frac{\partial F_{x_1}}{\partial t}\cos nx_2 + \frac{\partial F_{x_2}}{\partial t}\cos nx_1\right]_S.$$

Так как $v_n|_S = 0$, то отсюда будет следовать условие (28), если обозначить правую часть полученного равенства через G.

Для простоты изложения сведем условия (6′) и (28) к однородным при выполнении следующего условия согласования:

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\varphi_0 + t\varphi_1 + \frac{t^2}{2}\varphi_2 + \frac{t^3}{6}\varphi_3\right)\cos nx_3\,|_S = G. \qquad (29)$$

Таким образом, как и в первой задаче, мы будем доказывать существование обобщенного решения уравнения (5) при начальных условиях*

$$\left.\frac{\partial^k p}{\partial t^k}\right|_{=0} = 0, \quad k = 0, 2, 1, 3, \qquad (6)$$

и условии на границе

$$L_1 p\,|_S = 0. \qquad (30)$$

Пусть свободный член уравнения (5) после приведения начальных

* См. сноску на стр. 272

и граничного условий к нулевым удовлетворяет условию (9). Применяя, как и раньше, преобразование Лапласа к уравнению (5), а также к граничному условию (30), мы придем к решению краевой задачи для уравнения

$$\lambda^2 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x_3^2} = \lambda^2 (\lambda^2 + 1) P + \varphi (x, \lambda) \tag{10}$$

с граничным условием

$$\left[\frac{\partial P}{\partial x_3} \cos n x_3 + \lambda^2 \frac{\partial P}{\partial n} - \lambda \frac{\partial P}{\partial x_1} \cos n x_2 + \lambda \frac{\partial P}{\partial x_2} \cos n x_1\right]_S = 0, \tag{31}$$

где $\operatorname{Re} \lambda = \lambda_1 \geqslant \lambda_0 > 1$.

Определение. Обобщенным решением уравнения (10) при граничном условии (31) назовем функцию P, удовлетворяющую следующему интегральному тождеству:

$$\int_\Omega \left\{\lambda^2 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial P}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial P}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \lambda \frac{\partial P}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial P}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\right\} d\Omega =$$
$$= -\int_\Omega [\lambda^2 (\lambda^2 + 1) P\Phi + \varphi\Phi]\, d\Omega \tag{32}$$

для произвольной комплексно-значной функции $\Phi \in W_2^{(1)}(\Omega)$.

Для нахождения решения, удовлетворяющего интегральному тождеству (32), применим опять метод конечных разностей. Построив в пространстве x_1, x_2, x_3 кубическую сетку, возьмем $\Omega_h \supset \Omega$, заменим интегралы в тождестве (32) суммами, причем суммирование распространим на все точки решетки, принадлежащие Ω_h, включая границу S_h, а производные заменим разностными отношениями (этот метод применяется О. А. Ладыженской в работе [6] при решении общей задачи дифракции).

Мы получим:

$$h^3 \sum_{\Omega_h + S_h} \left\{\lambda^2 \sum_{i=1}^{3} P_{x_i} \Phi_{x_i} + P_{x_3} \Phi_{x_3} - \lambda P_{x_1} \Phi_{x_2} + \lambda P_{x_2} \Phi_{x_1}\right\} +$$
$$+ h^3 \sum_{\Omega_h + S_h} \{\lambda^2 (\lambda^2 + 1) P_h \Phi_h + \varphi' \Phi_h\} = 0, \tag{33}$$

где

$$\varphi'(x, \lambda) = \frac{\varphi(x, \lambda)}{\lambda^2 + 1}.$$

В выражении (33) берутся только те разностные отношения, которые имеют смысл для данной области суммирования.

Для нахождения приближенного решения мы получим систему линейных алгебраических уравнений относительно функции P_h, определяемой в узлах сетки. Эта система получается следующим образом. Берем Φ_h в определенной точке решетки (эта точка может лежать и на границе S_h) и подсчитываем при ней коэффициент, который будет зависеть от P_h и φ'. Такие коэффициенты подсчитываем во всех точках решетки, вклю-

чая границу. Ввиду произвольности функции Φ_h (заметим, что на границе области на функцию Φ никаких условий не накладывается), для выполнения тождества (33) эти коэффициенты при Φ_h в каждой точке решетки должны равняться нулю. Таким образом получается система алгебраических уравнений для определения P_h, причем число уравнений совпадает с числом неизвестных — значений P_h в точках решетки $\Omega_h + S_h$. Для однозначной разрешимости такой системы достаточно доказать, что соответствующая ей однородная система имеет лишь нулевое решение. Для доказательства этого последнего предложения установим неравенства (15) и (16) для функции P_h, удовлетворяющей тождеству (33). Для этого в тождество (33) вместо Φ_h подставим функцию $\overline{P}_h$, комплексно-сопряженную с P_h. Отделяя вещественную и мнимую части, получим:

$$h^3 \sum_{\Omega_h+S_h} \left\{a_1 \sum_{i=1}^{2} |P_{x_i}|^2 + |P_{x_3}|^2\right\} =$$

$$= h^3 \sum_{\Omega_h+S_h} \{2\, b_1\, (P_{1x_2} P_{2x_1} - P_{1x_1} P_{2x_2}) + (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)\, |P_h|^2 - P_1 \varphi_1' - P_2 \varphi_2'\}, \quad (34)$$

$$h^3 \sum_{\Omega_h+S_h} a_2 \sum_{i=1}^{2} |P_{x_i}|^2 =$$

$$= h^3 \sum_{\Omega_h+S_h} \{2\, b_2\, (P_{1x_2} P_{2x_1} - P_{1x_1} P_{2x_2}) - 2\lambda_1\lambda_2\, |P|^2 + P_2 \varphi_1' - P_1 \varphi_2'\}, \quad (35)$$

где

$$b_1 = \frac{\lambda_2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 1)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + 1)^2 + 4\, \lambda_1^2 \lambda_2^2}, \quad b_2 = \frac{\lambda_1 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 1)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + 1)^2 + 4\, \lambda_1^2 \lambda_2^2},$$

а остальные обозначения — прежние.

Рассмотрим два случая: 1) $\frac{1}{2}\lambda_1^2 > \lambda_2^2$ и 2) $\frac{1}{2}\lambda_1^2 \leqslant \lambda_2^2$.

1) Пусть $\frac{1}{2}\lambda_1^2 > \lambda_2^2$. Тогда, учитывая, что $a_1 > 0$, подставляя его оценку снизу в (34) и оценивая по модулю правую часть (34), имеем:

$$\frac{1}{6} I^{(1)}_{\Omega_h+S_h}(P) + \lambda_1^2 I_{\Omega_h+S_h}(P) \leqslant$$

$$\leqslant 2\, |b_1|\, h^3 \sum_{\Omega_h+S_h} (|P_{1x_2} P_{2x_1}| + |P_{1x_1} P_{2x_2}|) +$$

$$+ \frac{1}{2} \lambda_1^2 I_{\Omega_h+S_h}(P) + I_{\Omega_h+S_h}(\sqrt{|\varphi' P|}).$$

Но

$$h^3 \sum_{\Omega_h+S_h} 2\, (|P_{1x_2} P_{2x_1}| + |P_{1x_1} P_{2x_2}|) \leqslant h^3 \sum_{\Omega_h+S_h} \sum_{i=1}^{2} |P_{x_i}|^2.$$

Поэтому

$$\frac{1}{6} I^{(1)}_{\Omega_h+S_h}(P) + \frac{1}{2} \lambda_1^2 I_{\Omega_h+S_h}(P) \leqslant |b_1|\, I^{(1)}_{\Omega_h+S_h}(P) + \sqrt{I_{\Omega_h+S_h}(P)\, I_{\Omega_h+S_h}(\varphi')}.$$

Оценим сверху $|b_1|$:

$$|b_1| = \left| \frac{\lambda_2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 1)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + 1)^2 + 4\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right| \leqslant \frac{|\lambda_2|}{\lambda_1^2} \leqslant \frac{3}{2\sqrt{2}\,\lambda_1}.$$

Выбирая λ_1 так, чтобы $\frac{1}{6} - \frac{3}{2\sqrt{2}\,\lambda_1} > 0$, получим:

$$I_{\Omega_h + S_h}(P) \leqslant \frac{c_1}{|\lambda|^2} I_{\Omega_h + S_h}(\varphi')$$

и

$$I^{(1)}_{\Omega_h + S_h}(P) \leqslant c_2 I_{\Omega_h + S_h}(\varphi').$$

2) Пусть $\frac{1}{2}\lambda_1^2 \leqslant \lambda_2^2$; в этом случае

$$a_1 \geqslant \frac{1}{33}, \quad |b_1| \leqslant \frac{3}{|\lambda_2|} \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{\lambda_1}.$$

Выбирая λ_1 так, чтобы $\frac{1}{33} - \frac{3\sqrt{2}}{\lambda_1} > 0$, и подставляя в (34), получим:

$$I^{(1)}_{\Omega_h + S_h}(P) \leqslant c_3 |\lambda_2|^2 I_{\Omega_h + S_h}(P) + c_3 \sqrt{I_{\Omega_h + S_h}(P)\, I_{\Omega_h + S_h}(\varphi')}. \tag{36}$$

С другой стороны, из (35) имеем:

$$h^3 \sum_{\Omega_h + S_h} 2\lambda_1 \lambda_2 |P_h|^2 =$$

$$= -h^3 \sum_{\Omega_h + S_h} \left\{ a_2 \sum_{i=1}^{2} |P_{x_i}|^2 + 2 b_2 (P_{1x_2} P_{2x_1} - P_{1x_1} P_{2x_2}) - P_2 \varphi_1' - P_1 \varphi_2' \right\}.$$

Найдем оценку сверху для $|b_2|$ (оценка сверху для $|a_2|$ была найдена нами ранее: $|a_2| \leqslant \frac{1}{|\lambda_2|}$):

$$|b_2| \leqslant \frac{\lambda_1 (2\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}{\lambda_2^4} \leqslant \frac{5\lambda_1}{\lambda_2^2} \leqslant \frac{5\sqrt{2}}{|\lambda_2|}.$$

Подставив эту оценку в последнее равенство и используя неравенство (36), получаем:

$$2|\lambda_1 \lambda_2| I_{\Omega_h + S_h}(P) \leqslant c_4 |\lambda_2| I_{\Omega_h + S_h}(P) + c_5 \sqrt{I_{\Omega_h + S_h}(P)\, I_{\Omega_h + S_h}(\varphi')}.$$

Выбирая λ_1 столь большим, что $2\lambda_1 - c_4 > 1$, найдем, как и в § 2, что справедливы неравенства (13) и (14). Затем, подставляя вместо $|\varphi'|^2$ его значение $\frac{|\varphi|^2}{|\lambda^2 + 1|^2}$, получим неравенства (15) и (16) для области $\Omega_h + S_h$. Для предельной функции будут справедливы соответствующие интегральные неравенства:

$$I_\Omega(P) \leqslant \frac{c'}{|\lambda|^6} I_\Omega(\varphi), \tag{37}$$

$$I^{(1)}_\Omega(P) \leqslant \frac{c''}{|\lambda|^4} I_\Omega(\varphi). \tag{38}$$

Доказательство существования и единственности обобщенного решения в смысле (32) проводится при помощи неравенств (15) и (16) методом конечных разностей точно так же, как и доказательство существования и единственности соответствующего решения при условии $P|_S = 0$ с той лишь разницей, что теперь не нужно требовать принадлежности функции P к классу $D^0(\Omega)$, так как граничное условие теперь вошло в определение обобщенного решения (функция P принадлежит $W_2^{(1)}(\Omega)$).

Доказательство существования обратного преобразования Лапласа проводится с использованием теоремы Планшереля без всяких изменений на основании неравенств (37) и (38).

Определение. Назовем обобщенным решением смешанной задачи для уравнения (5) при нулевых начальных условиях (6) и при условии на границе (30) функцию $p(x, t)$, принадлежащую классу $W_2^{(1)}(Q)$, $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \in L_2(Q)$, которая принимает начальные условия

$$\left.\frac{\partial^k p}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0, \quad k = 0,1,$$

и удовлетворяет следующему интегральному тождеству:

$$\int_0^l \int_\Omega \left\{\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^3 p}{\partial x_i \partial t^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_2 \partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \Phi + \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right\} d\Omega\, dt = -\int_0^l \int_\Omega f \Phi\, d\Omega\, dt \qquad (39)$$

для произвольной функции $\Phi \in W_2^{(1)}(Q)$ и такой, что

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \in L_2(Q), \quad \Phi(x, t)|_{t=l} = 0, \quad \left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{t=l} = 0.$$

Рассуждения, аналогичные проведенным в § 2, позволяют заключить, что интеграл

$$p = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_1 - i\infty}^{\lambda_1 + i\infty} P(x, \lambda)\, e^{\lambda t}\, d\lambda$$

есть обобщенное решение смешанной задачи при нулевых начальных и краевом условии (30) уравнения (5) в смысле (39), где $P(x, \lambda)$ есть обобщенное решение в смысле (32) уравнения (10) при граничном условии (31).

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 2. *Если правая часть уравнения* (5) *такова, что*

$$\int_0^\infty \int_\Omega f^2 e^{-2\alpha_1 t}\, d\Omega\, dt < \infty \qquad (9)$$

для какого-нибудь $\alpha_1 \geqslant 0$, *то существует единственное обобщенное в смысле* (39) *решение уравнения* (5) *при условиях* (6) *и* (30), *которое*

может быть представлено как преобразование Лапласа от обобщенного решения уравнения (10) *при условии* (31), *именно*

$$p = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\lambda_1 - i\infty}^{\lambda_1 + i\infty} P(x, \lambda)\, e^{\lambda t}\, d\lambda, \tag{40}$$

где $\operatorname{Re}\lambda = \lambda_1 > \alpha_2 \geqslant \alpha_1$, *причем интеграл* (40) *существует для почти всех* x *и для* $p(x, t)$ *справедлива оценка* (25).

§ 3. Решение первой и второй смешанных задач для системы

Возвратимся к системе (1). Построим решение этой системы при условиях (2) и (3).

Предполагая правые части системы (1) и начальные данные достаточно гладкими, исключим из системы (1) неизвестные v_{x_i}, $i = 1, 2, 3$, в результате чего мы получим уравнение четвертого порядка (5) относительно p, где

$$f = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^3 F_{x_i}}{\partial x_i \partial t^2} - \frac{\partial^2 F_{x_1}}{\partial x_2 \partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial t} + \frac{\partial F_{x_3}}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial t^3}.$$

С помощью системы (1) вычислим производные $\frac{\partial^k p}{\partial t^k}$ при $t = 0$, $k = 1, 2, 3$.

Найдем функцию p из уравнения (5) со свободным членом f, удовлетворяющим условию (9) (см. § 1). Подставив найденную функцию p в систему (1) и относя $\frac{\partial p}{\partial x_i}$, $\frac{\partial p}{\partial t}$, $i = 1, 2, 3$, в правые части, определим вектор $\vec{v}(x, t)$.

Так как у нас осталось четыре уравнения для определения трех функций, то для определенности системы введем дополнительную функцию p' такую, что $p'|_S = 0$.

Полученная новая система будет иметь вид:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - [\vec{v} \times \vec{k}] + \operatorname{grad} p' = \vec{F} - \operatorname{grad} p, \\ \operatorname{div} \vec{v} = \left(\psi - \frac{\partial p}{\partial t}\right). \end{gathered} \tag{41}$$

Решение этой системы при условиях

$$\vec{v}|_{t=0} = \vec{v}^0(x), \quad p'|_S = 0$$

существует, единственно и выражается явно в виде степенного ряда [см. ([1])].

Если мы покажем, что в этом решении $p' \equiv 0$, то тем самым будет доказано существование решения исходной системы при условиях (2) и (3); действительно, в этом случае найденные функции v_{x_i}, p будут удовлетворять системе (1) при условиях (2) и (3).

Для доказательства того, что $p' \equiv 0$, исключим из системы (41) функции v_{x_i}, $i = 1, 2, 3$; тогда мы получим уравнение относительно p':

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta p' + \frac{\partial^2 p'}{\partial x_3^2} = 0 \tag{42}$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{grad} p' |_{t=0} = 0, \\ &\operatorname{grad} \frac{\partial p'}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \\ &p' |_S = 0. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

В самом деле, найдем вектор $\vec{v}^*$ такой, что

$$\operatorname{div} \vec{v}^* = \psi - \frac{\partial p}{\partial t}$$

и в системе (41) сделаем замену неизвестной функции $\vec{v}$ по формуле $\vec{v} = \vec{v}^* + \vec{v}^1$. Неизвестная функция $\vec{v}^1$ будет удовлетворять при этом системе:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}^1}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t} + [(\vec{v}^1 + \vec{v}^*) \times \vec{k}] - \operatorname{grad} p' + (\vec{F} - \operatorname{grad} p), \\ \operatorname{div} \vec{v}^1 = 0. \end{aligned}\right. \tag{41*}$$

Обозначим через P_1^* операцию проектирования в пространство потенциальных срезанных векторов G_0 [см. ([1])]. Вектор $\operatorname{grad} p'$ есть некоторый элемент из G_0. Из формул (41*) следует, что он определяется следующим образом:

$$\operatorname{grad} p' = P_1^* \left\{ -\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t} + [(\vec{v}^1 + \vec{v}^*) \times \vec{k}] + \vec{F} - \operatorname{grad} p \right\}.$$

При $t = 0$ имеем:

$$\operatorname{grad} p' |_{t=0} = P_1^* \left\{ -\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t} + [(\vec{v}^1 + \vec{v}^*) \times \vec{k}] + \vec{F} - \operatorname{grad} p \right\}.$$

Но из системы (1) следует, что

$$-\operatorname{grad} p^0 = \frac{\partial \vec{v}^0}{\partial t} - [\vec{v}^0 \times \vec{k}] - \vec{F}^0.$$

Поэтому

$$\operatorname{grad} p' |_{t=0} = P_1^* \left\{ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \Big|_{t=0} \right\} = 0,$$

так как $\vec{v}^1$ — соленоидальный вектор, принадлежащий пространству I_1 и известно [см. ([1])], что $I_1 \perp G_0$.

Далее,

$$\operatorname{grad} \frac{\partial p'}{\partial t}\Big|_{t=0} = P_1^* \left\{ -\frac{\partial^2 \vec{v}^*}{\partial t^2} + \left[\frac{\partial (\vec{v}^* + \vec{v}^1)}{\partial t} \times \vec{k} \right] + \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} - \operatorname{grad} \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{t=0} \right.$$

Но

$$-\operatorname{grad}\frac{\partial p}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2}\bigg|_{t=0}-\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\times\vec{k}\right]_{t=0}-\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}\bigg|_{t=0},$$

поэтому

$$\operatorname{grad}\frac{\partial p'}{\partial t}\bigg|_{t=0}=P_1^*\left\{\frac{\partial^2\vec{v}^1}{\partial t^2}\right\}_{t=0}=0.$$

Кроме того, функция p' после исключения v_{x_i} из системы (41) будет удовлетворять уравнению (42) и условию $p'|_S=0$, так как p есть решение уравнения (5) при начальных условиях, определяемых из системы (1), и граничном условии $p|_S=0$. Но функция, удовлетворяющая (42) и (43), есть тождественный нуль. Действительно, так как эта функция должна удовлетворять уравнению (42), то мы имеем:

$$0=\int_0^l\int_\Omega q\left(\frac{\partial^2\Delta p'}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 p'}{\partial x_3^2}\right)d\Omega dt=$$

$$=-\int_0^l\int_S\left\{\sum_{i=1}^3\frac{\partial^3 p'}{\partial x_i\partial t^2}\cos nx_i+\frac{\partial p'}{\partial x_3}\cos nx_3\right\}q\,dS\,dt-$$

$$-\int_0^l\int_\Omega\left\{\sum_{i=1}^3\frac{\partial^3 p'}{\partial x_i\partial t^2}\frac{\partial q}{\partial x_i}+\frac{\partial p'}{\partial x_3}\frac{\partial q}{\partial x_3}\right\}d\Omega\,dt. \tag{44}$$

Пусть

$$q=\int_l^t p'dt_1;$$

тогда поверхностный интеграл равен нулю, так как $q|_S=0$. Преобразуем отдельные члены в (44):

$$-\int_0^l\int_\Omega\frac{\partial p'}{\partial x_3}\frac{\partial q}{\partial x_3}\,d\Omega\,dt=-\frac{1}{2}\int_\Omega\left(\frac{\partial q}{\partial x_3}\right)^2_{t=0}d\Omega.$$

Далее,

$$-\int_0^l\int_\Omega\sum_{i=1}^3\frac{\partial^3 p'}{\partial t^2\partial x_i}\frac{\partial q}{\partial x_i}\,d\Omega\,dt=$$

$$=-\int_0^l\int_\Omega\left[\sum_{i=1}^3\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x_i\partial t}\frac{\partial q}{\partial x_i}\right)+\sum_{i=1}^3\frac{\partial^2 p'}{\partial t\partial x_i}\frac{\partial p'}{\partial x_i}\right]d\Omega\,dt.$$

Первый интеграл правой части обращается в нуль в силу того, что

$$\operatorname{grad}\frac{\partial p'}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0,\quad q|_{t=l}=0.$$

Второй интеграл можно записать так:

$$\frac{1}{2}\int_0^l\int_\Omega\sum_{i=1}^3\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial p'}{\partial x_i}\right)^2d\Omega dt=\frac{1}{2}\int_\Omega\sum_{i=1}^3\left(\frac{\partial p'}{\partial x_i}\right)^2_{t=l}d\Omega.$$

После этих преобразований видно, что $\left.\frac{\partial p'}{\partial x_i}\right|_{t=l} = 0$. Так как l может быть любым ($0 \leqslant t < \infty$), то p' может зависеть только от t. Но $p|_S = 0$ при любом t, значит $p \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Решение второй смешанной задачи для системы (1) при условиях (2) и (4) проводится аналогично.

Исключая из системы (1) неизвестные v_{x_i}, $i = 1, 2, 3$, мы получим относительно p уравнение (5) с соответствующими начальными условиями и условием на границе (28).

Построим функцию p так, как это сделано в § 2, и далее поступим так же, как и в случае первой смешанной задачи. Введя дополнительную функцию p' такую, что

$$L_1 p'|_S = 0,$$

мы решим систему (41) при условиях (2) и (4).

В этом случае функция p' будет удовлетворять уравнению (42) при условиях

$$\left.\operatorname{grad} p'\right|_{t=0} = 0, \quad \left.\operatorname{grad}\frac{\partial p'}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \qquad L_1 p'|_S = 0. \tag{45}$$

Начальные условия в (45) получаются таким же путем, как и в предыдущей задаче; нужно только проектировать $\operatorname{grad} p'$ на пространство потенциальных векторов G_1 и пользоваться ортогональностью G_1 и I_0, где I_0 — замыкание в норме L_2 пространства соленоидальных срезанных векторов [см. ([1])].

Но функция, удовлетворяющая (42) и (45), представляет собой произвольную функцию, зависящую только от t. В самом деле, так как функция p' должна удовлетворять уравнению (42), то мы имеем опять равенство (44).

Пусть

$$q = \int_l^t p' dt_1;$$

тогда поверхностный интеграл в правой части полученного равенства, в силу граничного условия $L_1 p'|_S = 0$, будет равен нулю. Действительно,

$$-\int_0^l \iint_S \left(\frac{\partial^3 p'}{\partial t^2 \partial n} + \frac{\partial p'}{\partial x_3}\cos nx_3\right) q\,dS\,dt =$$

$$= \int_0^l \iint_S \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x_2 \partial t}\cos nx_1 - \frac{\partial^2 p'}{\partial x_1 \partial t}\cos nx_2\right) q\,dS\,dt =$$

$$= \int_0^l \iiint_\Omega \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x_1 \partial t}\frac{\partial q}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x_2 \partial t}\frac{\partial q}{\partial x_1}\right) d\Omega\,dt =$$

$$= \int_0^l \iiint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial p'}{\partial x_1}\frac{\partial q}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial p'}{\partial x_2}\frac{\partial q}{\partial x_1}\right)\right] d\Omega\,dt = 0,$$

так как

$$\operatorname{grad} p'|_{t=0} = 0, \quad q|_{t=l} = 0.$$

Преобразуя второй интеграл правой части равенства (44) так же, как в предыдущей задаче, найдем, что

$$\left.\frac{\partial p'}{\partial x_i}\right|_{t=l} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Так как l может быть любым, то, вообще говоря, функция p' может зависеть от t, т. е. $p' = c(t)$. Но решение системы (41) при условиях

$$\vec{v}\,|_{t=0} = \vec{v}^0(x), \quad v_n|_S = 0$$

существует для любой функции $p' = c(t)$. Полагая, в частности, $c(t) = 0$, заключаем, что в действительности доказано существование решения исходной системы (1) при условиях (2) и (4).

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 3. *Если начальные данные и правые части уравнений системы* (1) *имеют непрерывные производные до пятого порядка, то существует единственное решение смешанных задач* (2), (3) *и* (2), (4) *для системы* (1), *у которого производные* $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$, $\frac{\partial p}{\partial t}$, $\frac{\partial p}{\partial x_i}$ *и* $\operatorname{div} \vec{v}$ *принадлежат пространству* $L_2(\Omega \times [0, \infty])$; *при этом правая часть получающегося уравнения четвертого порядка* (5) *для определения функции* p *должна удовлетворять условию:*

$$\int_0^\infty \int_\Omega f^2 e^{-2\lambda_1 t}\, d\Omega\, dt < \infty \tag{9}$$

для некоторого $\lambda_1 \geqslant 0$.

Метод доказательства теоремы дает одновременно и способ непосредственного нахождения этого решения.

Сейчас мы освободимся от ограничений гладкости, наложенных в теореме 3 на правую часть и начальные данные, и определим обобщенное решение в интегральном смысле.

В дальнейшем мы всегда будем иметь дело с областью, ограниченной по t, поэтому условие (9) не станем специально оговаривать. Область, где рассматривается решение, будем обозначать через Q, где $Q = \Omega \times [0, l]$.

Запишем систему (1) в виде одного векторного уравнения

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + A\,\vec{w} = \vec{f}, \tag{46}$$

где вектор $\vec{w} = (v_{x_1}, v_{x_2}, v_{x_3}, p)$, $\vec{f} = (F_{x_1}, F_{x_2}, F_{x_3}, \psi)$.

Матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \end{pmatrix}. \tag{47}$$

Согласно теореме 3, полученное решение смешанных задач будет удовлетворять интегральному тождеству:

$$\int_Q \left[\left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial t}, \vec{\Phi}\right) + (A\vec{w}, \vec{\Phi})\right] dQ = \int_Q (\vec{f}, \vec{\Phi})\, dQ \tag{48}$$

для некоторой произвольной вектор-функции $\vec{\Phi} = (\Phi_{x_1}, \Phi_{x_2}, \Phi_{x_3}, q)$ и достаточно гладких начальных данных и $\vec{f}$, где символ (,) обозначает обычное скалярное произведение.

Пусть теперь $\vec{\Phi}$ принадлежит пространству $W_2^{(1)}(Q)$, $\vec{\Phi}|_{t=l} = 0$ и ее компонента q удовлетворяет граничному условию $q|_S = 0$, если рассматривается смешанная задача для уравнения (46) при условии $p|_S = 0$, и $\Phi_n|_S = 0$, если на границе $v_n|_S = 0$, где

$$\Phi_n = \sum_{i=1}^{3} \Phi_{x_i} \cos nx_i.$$

При этих условиях на $\vec{\Phi}$ интегральное тождество (48) вместе с начальными и граничными условиями, которым удовлетворяет решение, равносильно следующему:

$$\int_Q \left[\left(\vec{w}, \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t}\right) - (\vec{w}, A^*\Phi)\right] dQ = -\int_Q (\vec{f}, \vec{\Phi})\, dQ - \int_\Omega (\vec{w}_0, \vec{\Phi}_0)\, d\Omega, \tag{49}$$

где

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -\dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ 1 & 0 & 0 & -\dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ -\dfrac{\partial}{\partial x_1} & -\dfrac{\partial}{\partial x_2} & -\dfrac{\partial}{\partial x_3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Назовем обобщенным решением рассматриваемых смешанных задач при условиях (2), (3) и (2), (4) функцию $\vec{w}$, удовлетворяющую этому интегральному тождеству.

Положим в этом интегральном тождестве $\vec{\Phi} = (l - t)\vec{w}$; тогда обычным приемом получается оценка:

$$\int_Q \vec{w}^2\, dQ \leqslant c_1 \int_Q \vec{f}^2\, dQ + c_2 \int_\Omega \vec{w}_0\, d\Omega. \tag{50}$$

Пусть правые части уравнения (46) и начальные данные (2) суммируемы с квадратом по области Q. Приближая их в метрике L_2 гладкими функциями, мы получим решение смешанных задач, которое удовлетворяет тождеству (49). При этом $\vec{w}_m - \vec{w}_n$ будет обобщенным решением в

смысле (49) при начальном условии $\vec{w}_{0m} - \vec{w}_{0n}$ и правой части $f_m - f_n$. Для этого решения справедлива оценка (50). Из нее следует, что последовательность $\vec{w}_m$ сходится в $L_2(Q)$. Предельная функция также принадлежит $L_2(Q)$ и, очевидно, удовлетворяет тождеству (49).

Единственность такого обобщенного решения и непрерывная зависимость его от начальных данных и правых частей уравнений системы, благодаря (50), очевидна.

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 4. *Пусть правые части системы* (46) *принадлежат* $L_2(Q)$, *а* $\vec{w}_0 \in L_2(\Omega)$. *Тогда существует единственное обобщенное в смысле* (49) *решение, принадлежащее* $L_2(Q)$, *смешанных задач* (2), (3) *и* (2), (4) *для системы* (46).

§ 4. Дифференциальные свойства обобщенных решений

1. Оценка производных по t. Пусть начальные данные имеют обобщенные производные по x_i до порядка k, правые части системы имеют обобщенные производные по t до порядка k и смешанные производные по x_i и t — до порядка $k-1$; тогда обобщенные производные по t до порядка k от обобщенного решения указанных смешанных задач будут удовлетворять следующему неравенству:

$$\int\limits_Q \left(\frac{\partial^k \vec{w}}{\partial t^k}\right)^2 dQ \leqslant c_3 \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial^k \vec{w}}{\partial t^k}\right)^2_{t=0} d\Omega + c_4 \int\limits_Q \left(\frac{\partial^k f}{\partial t^k}\right)^2 dQ. \tag{51}$$

Из системы (1) сразу следует, что первые производные по координатам от функции p оцениваются через первые производные по t от $\vec{v}$, т. е. через первые производные от начальных данных и правых частей, причем эта оценка имеет место во всей области Q вплоть до границы:

$$\int\limits_Q (\operatorname{grad} p)^2\, dQ \leqslant c_5 \left\{ \int\limits_Q \left[\vec{f}^2 + \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\right)^2\right] dQ + \int\limits_\Omega [\vec{w}_0^2 + (\operatorname{grad} p_0)^2 + (\operatorname{div} \vec{v}_0)^2]\, d\Omega \right\}. \tag{52}$$

2. Производные по x_i внутри области. При оценке производных по x_i и смешанных производных по x_i и t до порядка k внутри области, принимая во внимание оценку (51), получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* $\Omega'' \subset \Omega' \subset \Omega$, *причем границы этих областей не имеют общих точек, но могут быть сколь угодно близки друг к другу. Если начальные данные и правые части уравнений системы* (46) *принадлежат пространству* $W_2^k(\Omega' \times [0, l])$, *то решение смешанных задач* (2), (3) *и* (2), (4) *принадлежит пространству* $W_2^{(k)}(\Omega'' \times [0, l])$. *При этом*

имеет место следующая оценка:

$$\|\vec{w}\|_{W_2^{(k)}(\Omega''\times[0,l])} \leqslant c_6\,[\,\|\vec{f}\|_{W_2^{(k)}(\Omega'\times[0,l])} + \|\vec{w}_0\|_{W_2^{(k)}(\Omega')}]. \tag{53}$$

Доказательство этой теоремы можно провести с помощью метода средних функций [см. ([7])], но проводить его мы не будем, так как оно получается упрощением доказательства соответствующей теоремы с оценками вплоть до границы, к которой мы сейчас перейдем.

Замечание. Если рассматривать систему (1) для несжимаемой жидкости, т. е. для случая, когда $\frac{\partial p}{\partial t}$ не входит в последнее уравнение системы (1), то, используя метод проекций [см. ([1])], можно получить оценки для производных от $\vec{v}$ и p до порядка k через производные от начальных данных и правых частей до порядка $k-1$. Таким образом, решение системы (1) для случая несжимаемой жидкости более гладко, чем для сжимаемой, что совпадает с физическими данными, а математически следует из того, что первая система в известном смысле близка к параболической, а вторая — к гиперболической.

3. Оценки для производных по x_i вплоть до границы. Пусть граница S области Ω непрерывно дифференцируема до порядка $k+2$. Разобьем область Ω на конечное число перекрывающихся между собой подобластей таким образом, что для части границы $\Gamma_1 \subset S$ каждой подобласти существует $k+2$ раза непрерывно дифференцируемое преобразование координат

$$y_i = y_i(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3,$$

которое отображает, например, подобласть Ω_1 на подобласть D так, что часть границы Ω_1, которая принадлежит S, будет лежать в плоскости $y_3 = \mathrm{const}$.

Рассмотрим подобласть D и немного бо́льшую $D' \supset D$ такую, что D не содержит части границы D', которая не принадлежит S. Часть границы подобласти D', которая не принадлежит S, обозначим через Γ_2, а оставшуюся — через Γ_1.

Введем бесконечно дифференцируемую функцию обрезания $\zeta(y)$, равную единице всюду в D, равную нулю вблизи Γ_2 и не большую единицы в других точках.

За функциями, входящими в систему уравнений (1), после преобразования координат оставим прежние обозначения.

После преобразования координат сделаем замену $\vec{v}\zeta = \vec{u}$, $p\zeta = q$ в подобласти D'.

Система уравнений (1) в новых координатах и с функцией ζ запишется в виде:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - [\vec{u} \times l_3] + \operatorname{grad} q = \zeta \vec{F} + p \operatorname{grad} \zeta, \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{u} = \zeta \psi + \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{1}{H_i} \frac{\partial \zeta}{\partial y_i},\end{gathered} \tag{54}$$

где H_i — параметры Ламе, вектор $\vec{u}$ имеет проекциями на оси криволинейных координат функции u_1, u_2, u_3; $\operatorname{grad} q$ и $\operatorname{div} \vec{u}$ в криволинейных координатах, как известно, имеют вид:

$$\operatorname{grad} q = \sum_{i=1}^{3} \frac{l_i}{H_i} \frac{\partial q}{\partial y_i},$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{H_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ u_1 \frac{\partial (H_2 H_3)}{\partial y_1} + u_2 \frac{\partial (H_1 H_3)}{\partial y_2} + u_3 \frac{\partial (H_1 H_2)}{\partial y_3} \right\}.$$

Предположим сначала, что правые части и начальные данные имеют непрерывные производные* до порядка k. При этих предположениях дадим оценки в норме L_2 производных порядка k от решения через производные от правых частей и начальных данных до порядка k.

Так как часть границы D', которая принадлежит S, лежит в плоскости $y_3 = \text{const}$, то это позволяет оценить все производные в касательном направлении, т. е. производные по y_1 и y_2 вплоть до границы Γ_1. Производные же по y_3 оцениваются из уравнений системы (54).

Найдем оценку для производной $\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial y_1}$.

Продифференцируем первое векторное уравнение системы (54) по y_1, умножим его скалярно на $\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial y_1}(l-t) H_1 H_2 H_3$ и проинтегрируем по области $D' \times [0, l]$. Тогда член с производной по t преобразуется так:

$$\int_0^l \int_{D'} (l-t) H_1 H_2 H_3 \left(\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t \partial y_1} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial y_1} \right) dy\,dt = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{D'} H_1 H_2 H_3 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial y_1} \right)^2 dy\,dt -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{D'} H_1 H_2 H_3 \left(\frac{\partial \vec{u}_0}{\partial y_1} \right)^2 dy. \tag{55}$$

Учитывая то, что в криволинейных координатах компоненты единичных ортов зависят от y_i, преобразуем члены с производными второго порядка в скалярном произведении

$$\int_0^l \int_{D'} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \operatorname{grad} p \, \frac{\partial \vec{u}}{\partial y_1} \right) H_1 H_2 H_3 \, dy\,dt \tag{56}$$

и воспользуемся вторым уравнением системы (54), продифференцированным по y_1. Имеем:

$$\int_0^l \int_{D'} \left(H_2 H_3 \frac{\partial^2 q}{\partial y_1^2} \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + H_1 H_3 \frac{\partial^2 q}{\partial y_1 \partial y_2} \frac{\partial u_2}{\partial y_1} + H_1 H_2 \frac{\partial^2 q}{\partial y_1 \partial y_3} \frac{\partial u_3}{\partial y_3} \right) dy\,dt =$$

$$= \int_0^l \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \left(H_2 H_3 \frac{\partial q}{\partial y_1} \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \cos n y_1 + H_1 H_3 \frac{\partial q}{\partial y_1} \frac{\partial u_2}{\partial y_1} \cos n y_2 + \right.$$

* В дальнейшем, как это обычно делается [см. ([2]), ([3])], можно освободиться от требования непрерывности производных от начальных данных и правых частей, заменив непрерывные производные обобщенными.

$$+ H_1H_2 \frac{\partial q}{\partial y_1} \frac{\partial u_3}{\partial y_1} \cos ny_3\Big) d\Gamma dt - \int_0^l \int_{D'} H_1H_2H_3 \frac{\partial q}{\partial y_1} \Big\{ \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \frac{1}{H_1H_2H_3} \frac{\partial}{\partial y_1}(H_2H_3) +$$

$$+ \frac{\partial u_2}{\partial y_1} \frac{1}{H_1H_2H_3} \frac{\partial}{\partial y_2}(H_1H_3) + \frac{\partial u_3}{\partial y_1} \frac{1}{H_1H_2H_3} \frac{\partial}{\partial y_3}(H_1H_2) + \frac{1}{H_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2} +$$

$$+ \frac{1}{H_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y_1 \partial y_2} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial^2 u_3}{\partial y_1 \partial y_3} \Big\} dydt = \int_0^l \int_{D'} H_1H_2H_3 \frac{\partial q}{\partial y_1} \cdot \Big\{ \frac{\partial^2 q}{\partial t \partial y_1} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{1}{H_i}\right) \frac{\partial u_i}{\partial y_i} + u_1 \frac{\partial}{\partial y_1}\left[\frac{1}{H_1H_2H_3} \frac{\partial (H_2H_3)}{\partial y_1}\right] +$$

$$+ u_2 \frac{\partial}{\partial y_1}\left[\frac{1}{H_1H_2H_3} \frac{\partial (H_1H_3)}{\partial y_2}\right] + u_3 \frac{\partial}{\partial y_1}\left[\frac{1}{H_1H_2H_3} \frac{\partial (H_1H_2)}{\partial y_3}\right] -$$

$$- \frac{\partial (\psi\zeta)}{\partial y_1} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_1}\left[v_i \frac{1}{H_i} \frac{\partial \zeta}{\partial y_i}\right]\Big\} dydt.$$

Интеграл по поверхности $\Gamma_1 + \Gamma_2$ равен нулю. Действительно, на границе Γ_2 q, $\vec{u}$ и все их производные равны нулю благодаря ζ. Граничное условие $v_n|_S = 0$ после преобразования координат на части границы Γ_1 переходит в условие $u_3|_{\Gamma_1} = 0$, так как граница Γ_1 плоская. Поэтому, в зависимости от того, какая смешанная задача рассматривается, мы пользуемся тем, что

$$\frac{\partial q}{\partial y_1}\Big|_{\Gamma_1} = 0 \text{ или } \frac{\partial u_3}{\partial y_1}\Big|_{\Gamma_1} = 0,$$

где производная берется в касательном к Γ_1 направлении.

Член

$$H_1H_2H_3 \frac{\partial q}{\partial y_1} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{1}{H_i}\right) \frac{\partial u_i}{\partial y_i}$$

в (56) с помощью интегрирования по частям преобразуется так, чтобы производные $\frac{\partial}{\partial y_2}$ и $\frac{\partial}{\partial y_3}$ брались от q, а от u_i бралась производная только по y_1.

Теперь оставим в левой части равенства, полученного дифференцированием первого уравнения системы (54) и интегрированием его по области $D' \times [0, l]$, члены, которые после сделанных преобразований содержат квадраты производных по y_1 от $\vec{u}$ и q, перенеся в правую часть все остальные члены, в том числе и квадраты производных от начальных данных. Члены, стоящие справа и имеющие вид $\frac{\partial q}{\partial y_k} \frac{\partial u_i}{\partial y_1}$ и $u_k \frac{\partial u_i}{\partial y_1}$, оценим с помощью неравенства

$$ab \leqslant \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2, \qquad (*)$$

где роль a будет играть $\frac{\partial u_i}{\partial y_1}$, а роль b — производная $\frac{\partial q}{\partial y_k}$ или u_k. Члены же типа $\frac{\partial q}{\partial y_k} u_i$ оценим при помощи неравенства

$$ab \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

и воспользуемся уже выведенными оценками для интегралов от квадрата решений и квадрата производных $\frac{\partial q}{\partial y_k}$, а также гладкостью преобразования, в данном случае до третьего порядка, и гладкостью функции ζ. При этом справа у нас есть член

$$\frac{\partial q}{\partial y_1} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_1}\left[v_i \frac{1}{H_i} \frac{\partial \zeta}{\partial y_i}\right],$$

в который входит производная по y_1 от v_i, в то время как слева имеется квадрат производной от $u_i = \zeta v_i$. Но члены такого типа можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{\partial q}{\partial y_1} \frac{\partial v_i}{\partial y_1} = \frac{\partial p}{\partial y_1} \frac{\partial u_i}{\partial y_1} - \frac{\partial p}{\partial y_1} v_i \frac{\partial \zeta}{\partial y_1} + p \frac{\partial v_i}{\partial y_1} \frac{\partial \zeta}{\partial y_1}.$$

В члене же $p \frac{\partial v_i}{\partial y_1} \frac{\partial \zeta}{\partial y_1}$ с помощью интегрирования по частям можно производную по y_1 перебросить с v_i на p.

Далее, выберем ε в неравенстве (*) столь малым, чтобы при перенесении членов с квадратами производных налево не изменился знак левой части.

В результате мы получаем искомую оценку интеграла от квадрата производной в касательном направлении от $\vec{v}$ через интеграл от квадрата первых производных от правых частей и начальных данных.

Дадим оценку производных от $\vec{v}$ по y_3. При этом граничные условия больше не будут использоваться, поэтому мы будем исходить из системы (54) без функции ζ, т. е. из системы:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - [\vec{v} \times \vec{l}_3] + \operatorname{grad} p = \vec{F}, \tag{57}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{H_i} \frac{\partial v_i}{\partial y_i} \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left\{v_1 \frac{\partial (H_2 H_3)}{\partial y_1} + v_2 \frac{\partial (H_1 H_3)}{\partial y_2} + v_3 \frac{\partial (H_1 H_2)}{\partial y_3}\right\} = \psi. \tag{58}$$

Непосредственно в систему (57) — (58) входит только производная $\frac{\partial v_3}{\partial y_3}$, интеграл от квадрата которой и оценивается очевидным образом из второго уравнения этой системы. Для оценки интеграла от квадрата $\frac{\partial v_1}{\partial y_3}$ и $\frac{\partial v_2}{\partial y_3}$ продифференцируем уравнение (57) по y_3, умножим его скалярно на $H_1 H_2 H_3 \frac{\partial \vec{v}}{\partial y_3}(l - t)$ и проинтегрируем по области $D \times [0, l]$, а затем

сделаем некоторые преобразования с помощью интегрирования по частям по t. Имеем:

$$\frac{1}{2}\int_0^l\int_D H_1H_2H_3\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial y_3}\right)^2 dy\,dt +$$

$$+\int_0^l\int_D H_1H_2H_3(l-t)\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_3}\operatorname{grad} p,\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial y_3}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial y_3}[\vec{v}\times\vec{l}_3],\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial y_3}\right)\right\} dy\,dt =$$

$$=\int_0^l\int_D H_1H_2H_3\left(\vec{F},\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial y_3}\right)dydt+\frac{l}{2}\int_D H_1H_2H_3\left(\frac{\partial \vec{v}_0}{\partial y_3}\right)^2 dy. \qquad (59)$$

Рассмотрим главные члены, т. е. члены со вторыми производными, во втором слагаемом левой части этого равенства:

$$\int_0^l\int_D (l-t)\left[\frac{1}{H_1}\frac{\partial v_1}{\partial y_3}\frac{\partial^2 p}{\partial y_1\partial y_3}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial v_2}{\partial y_3}\frac{\partial^2 p}{\partial y_2\partial y_3}+\frac{1}{H_3}\frac{\partial v_3}{\partial y_3}\frac{\partial^2 p}{\partial y_3^2}\right]dy\,dt. \qquad (60)$$

Эти члены можно преобразовать не с помощью интегрирования по частям по y, как мы это делали в предыдущих оценках, а выразить их через те производные, оценки для которых уже получены.

Для ясности изложения проведем эти преобразования для системы, записанной в декартовых прямолинейных координатах, так как отличие от оценок в криволинейных координатах будет только для младших членов, которые получаются от дифференцирования единичных ортов и параметров Ламе по координатам и оценки для которых известны.

Итак, в члене

$$I=\int_0^l\int_{\Omega'}(l-t)\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial v_{x_i}}{\partial x_3}\frac{\partial^2 p}{\partial x_i\partial x_3}\,dx\,dt$$

заменим вторые производные от p членами из третьего уравнения системы (1):

$$\frac{\partial v_{x_3}}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x_3}=F_{x_3},$$

продифференцированного по x_1, x_2, x_3 соответственно; мы получим:

$$I=\int_0^l\int_{\Omega'}(l-t)\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial v_{x_i}}{\partial x_3}\left[\frac{\partial F_{x_3}}{\partial x_i}-\frac{\partial^2 v_{x_3}}{\partial t\partial x_i}\right]dx\,dt.$$

Члены $\frac{\partial v_{x_i}}{\partial x_3}\frac{\partial F_{x_3}}{\partial x_i}$ можно оценить при помощи неравенства (*), члены же с производными $\frac{\partial^2 v_{x_3}}{\partial t\partial x_i}$ проинтегрируем по частям по t:

$$-\int_0^l\int_{\Omega'}(l-t)\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial v_{x_i}}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial^2 v_{x_3}}{\partial t\partial x_i}\,dx\,dt = l\int_{\Omega'}\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial v_{x_i}}{\partial x_3}\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_3}\right)\right]_{t=0}dx -$$

$$-\int_0^l\int_{\Omega'}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial v_{x_i}}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_3}\,dx\,dt+\int_0^l\int_{\Omega'}(l-t)\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 v_{x_i}}{\partial t\partial x_3}\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_i}\,dx\,dt. \qquad (61)$$

Члены

$$\int_0^l\int_{\Omega'}\frac{\partial v_{x_i}}{\partial x_3}\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_i}\,dxdt$$

оцениваются с помощью неравенства (*) и, кроме того, используется уже полученная оценка для $\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_3}$. Из всех членов в (61) остается, таким образом, оценить последний член, который для этого преобразуется при помощи первого и второго уравнений системы (1), продифференцированных по x_3. Мы находим:

$$\int_0^l\int_{\Omega'}(l-t)\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 v_{x_i}}{\partial x_3\partial t}\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_i}\,dt\,dx =$$

$$=\int_0^l\int_{\Omega'}(l-t)\left\{\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F_{x_i}}{\partial x_3}-\frac{\partial^2 p}{\partial x_i\partial x_3}\right)-\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_1}\frac{\partial v_{x_2}}{\partial x_3}+\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_2}\frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_3}\right\}dx\,dt,$$

где члены со вторыми производными от p заменяются опять членами из третьего уравнения системы (1), продифференцированного по x_1 и x_2 соответственно:

$$-\int_0^l\int_{\Omega'}(l-t)\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_i}\frac{\partial^2 p}{\partial x_i\partial x_3}\,dx\,dt=\int_0^l\int_{\Omega'}(l-t)\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial^2 v_{x_3}}{\partial t\partial x_i}\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_i}-\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_i}\frac{\partial F_{x_3}}{\partial x_i}\right)dx\,dt.$$

Далее,

$$\int_0^l\int_{\Omega'}(l-t)\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 v_{x_3}}{\partial t\partial x_i}\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_i}\,dx\,dt=\frac{1}{2}\int_0^l\int_{\Omega'}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_i}\right)^2 dxdt-\frac{l}{2}\int_{\Omega'}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_i}\right)^2_{t=0}dx.$$

Оценка же члена

$$\int_0^l\int_{\Omega'}\left(\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_i}\right)^2 dx\,dt$$

нам известна.

Идея всех приведенных выкладок, таким образом, состояла в замене $\frac{\partial v_{x_i}}{\partial x_3}$ через $\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_i}$, т. е. в перемене индексов у числителя и знаменателя.

В криволинейных координатах, как уже отмечалось выше, преобразование членов выражения (60) можно провести точно таким же путем, так как оценки младших членов только удлиняют выкладки, идея же остается прежней. У коэффициентов H_i при этом производные увеличиваться не будут, так как мы проводили интегрирование по частям только по t, а H_i от t не зависят.

Оценивая другие члены в (59) с помощью неравенства (*) и соотношения $2ab \leqslant a^2 + b^2$, мы получим из (59) оценку для $\frac{\partial v}{\partial y_3}$.

Учитывая все сказанное, имеем оценку:

$$\|\vec{w}\|_{W_2^{(1)}(Q)} \leqslant c_7 (\|\vec{f}\|_{W_2^{(1)}(Q)} + \|\vec{w}_0\|_{W_2^{(1)}(\Omega)}) \tag{62}$$

в произвольном конечном цилиндре $Q = \Omega \times [0, l]$, где $\vec{w} = (v_{x_1}, v_{x_2}, v_{x_3}, p)$ и граница S области Ω непрерывно дифференцируема три раза.

Оценки производных порядка k по «касательным» координатам проводятся точно так же, только при этом нужно сначала оценить производную

$$\frac{\partial^k q}{\partial y_1^{\alpha_1} \cdot \partial y_2^{\alpha_2} \partial y_3^{\alpha_3}} .$$

Оценка этой производной получится через оценку производной

$$\frac{\partial^k \vec{u}}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2} \partial t} ,$$

которая, в свою очередь, оценивается через младшие производные от $\vec{u}$ по координатам и через $\frac{\partial^k \vec{u}}{\partial t^k}$.

Оценки смешанных производных по y_i, где $i = 1, 2$, и по t проводятся аналогично.

Оценка всевозможных производных, где есть дифференцирование по y_3, проводится точно по тому же плану, что и для первой производной по y_3.

Все указанные оценки без изменений в выкладках можно получить в терминах конечных разностей, для чего, например, вместо производной $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_1}$ оценить разделенную разность $\frac{\vec{u}(x_1 + h) - \vec{u}(x_1)}{h}$; получающиеся при этом константы не будут зависеть от величины шага h.

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 6. *Если свободные члены системы* (1) *и начальные данные принадлежат пространству* $W_2^{(k)}(Q)$, *а граница* S *области* Ω *непрерывно дифференцируема до порядка* $k+2$, *то обобщенное решение в смысле интегрального тождества* (49) *смешанных задач* (2), (3) *и* (2), (4) *принадлежит пространству* $W_2^{(k)}(Q)$. *При* $k = 1$ *это решение является решением почти всюду. Если* $k = 4$, *то решение будет классическим* [см. ([3])]. *Для решения справедливо неравенство*

$$\|\vec{w}\|_{W_2^{(k)}(Q)} \leqslant c_8 (\|\vec{f}\|_{W_2^{(k)}(Q)} + \|\vec{w}_0\|_{W_2^{(k)}(\Omega)}). \tag{63}$$

Автор выражает глубокую благодарность С. Л. Соболеву за постановку задачи и внимание, оказанное им при написании настоящей работы.

Поступило
24. X. 1955

ЛИТЕРАТУРА

[1] Соболев С. Л., Об одной новой задаче математической физики, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 18 (1954), 3—50.

[2] Ладыженская О. А., Смешанная задача для гиперболического уравнения, Гостехиздат, 1953.

[3] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во ЛГУ, 1950.

[4] Масленникова В. Н., Решение в явном виде задачи Коши для одной системы уравнений с частными производными, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 22 (1958), 135—160.

[5] Масленникова В. Н., О смешанных задачах для одной системы уравнений математической физики, Доклады Ак. наук СССР, 102, № 5 (1955), 885—888.

[6] Ладыженская О. А., О решении общей задачи дифракции, Доклады Ак. наук СССР, 96, № 3 (1954), 433—436.

[7] Friedrichs K. O., On the differentiability of the solutions of linear elliptic differential equations, Communic. on pure and appl. mathem., 6, № 3 (1953), 299—325.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 299—308

Л. А. САХНОВИЧ

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПЕРАТОРОВ ВИДА

$$Kf = \int_0^x f(t)\, k(x-t)\, dt$$

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В работе находятся достаточные условия существования корня n-ой степени из оператора $Kf = \int_0^x f(t)\, k(x-t)\, dt$. В качестве следствия получаются теоремы о приведении оператора K к простейшему виду.

В § 1 настоящей работы содержится доказательство следующей теоремы:

Если ядро $k(x, t)$ *оператора*

$$Kf = i\int_0^x f(t)\, k(x, t)\, dt, \quad f(t) \in L^2[0, l],$$

имеет ограниченную смешанную производную $\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} k(x, t)$ *и* $k(x, x) \equiv 1$, *то оператор* K *линейно эквивалентен оператору*

$$iIf = i\int_0^x f(t)\, dt, \quad f(t) \in L^2[0, l].$$

В работе [1] автором было дано более сложное доказательство сформулированной теоремы и при бо̀льших ограничениях на ядро $k(x, t)$. Там эта теорема использовалась для изучения инвариантных подпространств оператора K, а также при доказательстве теорем единственности для систем дифференциальных уравнений.

В § 2 при помощи сформулированной теоремы находятся условия существования корней второй степени из оператора K вида

$$Kf = \int_0^x f(t)\, k(x-t)\, dt,$$

а также исследуется вид этих корней.

Полученные результаты дают возможность сформулировать достаточные условия линейной эквивалентности операторов

$$Kf = \int_0^x f(t)\, k(x-t)\, dt \quad \text{и} \quad I^2 f = \int_0^x f(t)\, (x-t)\, dt.$$

В § 3 теоремы § 2 обобщаются на случай $n > 2$.

§ 1

Определение. Операторы K и K_1, действующие в $L^2[0, l]$, будем называть линейно эквивалентными, если существует ограниченный оператор V, удовлетворяющий условиям:

1) существует и ограничен оператор V^{-1},

2) имеет место равенство: $VKV^{-1} = K_1$.

ТЕОРЕМА 1. *Если ядро $k(x, t)$ оператора*

$$Kf = i\int_0^x f(t)\,k(x, t)\,dt, \quad f(t) \in L^2[0, l], \tag{1.1}$$

имеет ограниченную смешанную производную $\frac{d^2}{dt\,dx} k(x, t)$ и $k(x, x) = 1$, то оператор K линейно эквивалентен оператору

$$iJf = i\int_0^x f(t)\,dt, \quad f(t) \in L^2[0, l].$$

Доказательство. Пусть $y(x, \lambda) = (I + \lambda k)^{-1} f$; тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} - i\lambda y - i\lambda \int_0^x y(t, \lambda)\frac{\partial}{\partial x} k(x, t)\,dt. \tag{1.2}$$

Рассмотрим оператор

$$(I + H)f = f(x) + \int_0^x f(t)\,H(x, t)\,dt, \tag{1.3}$$

обратный по отношению к оператору

$$(I + K_1)f = f(x) + \int_0^x f(t)\frac{\partial}{\partial x} k(x, t)\,dt.$$

Применим к обеим частям равенства (1.2) оператор $(I + H)$:

$$\frac{dy}{dx} = r(x) - \int_0^x \frac{dy}{dt} H(x, t)\,dt - i\lambda y,$$

где $r(x) = (I + H)f'(x)$. Из гладкости $\frac{\partial}{\partial x} k(x, t)$ по переменной t следует гладкость $H(x, t)$ по переменной t. Действительно, ядра $\frac{\partial}{\partial x} k(x, t) = k_1(x, t)$ и $H(x, t)$ связаны следующим соотношением:

$$k_1(x, t) + H(x, t) + \int_t^x H(x, \xi)\,k_1(\xi, t)\,d\xi = 0.$$

Поэтому мы можем записать:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = s(x) - y(x, \lambda)\,q(x) - \int_0^x y(t, \lambda)\frac{\partial}{\partial t} H(x, t)\,dt - i\lambda y,$$

где

$$s(x) = r(x) + f(0)\,H(x, 0), \quad q(x) = H(x, x).$$

Выберем $f(x)$ в равенстве (1.2) так, чтобы $s(x) \equiv 0$, $f(0) = 1$. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = -y(x, \lambda)\, q(x) - i\lambda y - \int_0^x y(t, \lambda) \frac{\partial}{\partial t} H(x, t)\, dt.$$

Положив

$$y = e^{-\int_0^x q(s)\, ds} y_1(x, \lambda),$$

получим уравнение:

$$\frac{dy_1}{dx} = -i\lambda y_1 - \int_0^x y_1(t, \lambda) \frac{\partial}{\partial t} H(x, t)\, e^{\int_t^x q(s)\, ds}\, dt.$$

Применяя метод последовательных приближений, можно записать:

$$y_1(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} + \varphi_1(\lambda, x) + \varphi_2(\lambda, x) + \cdots,$$

где

$$\varphi_n(\lambda, x) = (-1)^n \int_0^x \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{2n-1}} e^{-i\lambda(x-t_1)} e^{-i\lambda(t_2-t_3)} \ldots e^{-i\lambda t_{2n}} \ldots M(t_{11} t_2) \cdots$$

$$\cdots M(t_{2n-1}, t_{2n})\, dt_{2n} \cdots dt_1, \tag{1.4}$$

причем

$$M(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} H(x, t) \cdot e^{\int_t^x q(s)\, ds}.$$

Обозначая

$$(x - t_1 + t_2 - t_3 + \ldots - t_{2n}) = y$$

и переставляя в (1.4) порядок интегрирования, представим $\varphi_n(\lambda, x)$ в виде

$$\varphi_n(\lambda, x) = \int_0^x e^{-i\lambda y} N_n(x, y)\, dy,$$

где

$$|N_n(x, y)| \leqslant \frac{M^n \cdot x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad M \geqslant |M(x, t)| \quad (0 \leqslant x, t \leqslant l).$$

Тогда для $y_1(x, \lambda)$ выполняется соотношение:

$$y_1(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} + \int_0^x e^{-i\lambda y} N(x, y)\, dy, \quad N(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} N_n(x, y).$$

Отсюда получаем основную формулу:

$$y(x, \lambda) = \left[e^{-i\lambda x} + \int_0^x e^{-i\lambda y} N(x, y)\, dy\right] e^{-\int_0^x q(s)\, ds}. \tag{1.5}$$

Рассмотрим оператор V, определенный в $L^2[0, l]$ формулой:

$$V\varphi = \left[\varphi(x) + \int_0^x \varphi(y) N(x, y)\, dy\right] \cdot e^{-\int_0^x q(s)\, ds}. \tag{1.6}$$

Так как

$$e^{-i\lambda x} = (I + i\lambda I)^{-1} \cdot 1,$$

то из формул (1.5) и (1.6) получаем:

$$(I + \lambda k)^{-1} f = V (I + i\lambda I)^{-1} \cdot 1. \qquad (1.7)$$

Очевидно, оператор V^{-1} существует и ограничен.

Разложив обе части равенства (1.7) в ряд по λ и приравняв соответствующие коэффициенты, нетрудно убедиться в справедливости соотношения

$$K = V(iI) V^{-1}.$$

Таким образом, теорема 1 доказана.

§ 2

В настоящем параграфе решается вопрос об извлечении корня n-й степени из операторов вида

$$Kf = \int_0^x f(t)\, k(x-t)\, dt, \quad f(t),\ k(t) \in L^2[0, l]. \qquad (2.1)$$

Рассуждения проводятся подробно для случая $n = 2$.

ЛЕММА. *Если функция $\Phi(x)$ измерима и ограничена, то уравнение*

$$\Phi(x) = \gamma\psi(x) + \int_0^x \psi(s)\, \psi(x-s)\, ds \quad (0 \leqslant x \leqslant l,\ \gamma \neq 0) \qquad (2.2)$$

имеет одно и только одно ограниченное решение.

Доказательство. Пользуясь методом последовательных приближений, получаем:

$$\psi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \cdots, \qquad (2.3)$$

где

$$\varphi_0(x) = \frac{\Phi(x)}{\gamma}, \quad \varphi_n(x) = -\frac{1}{\gamma} \int_0^x \varphi_{n-1}(s)\, \varphi_{n-1}(x-s)\, ds \quad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (2.4)$$

Так как $|\Phi(x)| \leqslant M$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$, то из (2.4) следует оценка:

$$|\varphi_n(x)| \leqslant \frac{M^{2^n}}{|\gamma|^n} \frac{x^{2^n - 1}}{(2^n - 1)!}. \qquad (2.5)$$

Из неравенства (2.5) вытекает, что ряд (2.3) сходится равномерно и является решением уравнения (2.2). Докажем, что уравнение (2.2) имеет только одно решение. Допустим, что $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ являются решениями уравнения (2.2), причем $\psi_1(x)$, $\psi_2(x) \in L^2[0, l]$. Тогда

$$\gamma[\psi_1(x) - \psi_2(x)] = -\int_0^x \psi_1(s)\, \psi_1(x-s)\, ds + \int_0^x \psi_2(s)\, \psi_2(x-s)\, ds,$$

т. е.

$$\gamma[\psi_1(x) - \psi_2(x)] = -\int_0^x [\psi_1(s) - \psi_2(s)] \cdot [\psi_1(x-s) + \psi_2(x-s)]\, ds. \qquad (2.6)$$

Так как вольтерровский оператор

$$Tf = -\int_0^x f(s)[\psi_1(x-s) + \psi_2(x-s)]\, ds$$

не имеет собственных чисел, отличных от нуля, то из (2.6) следует равенство

$$\psi_1(x) \equiv \psi_2(x).$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть ограничена производная* $k''(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant l)$, *причем*

$$k(0) = 0, \quad k'(0) = \alpha \quad (\alpha \neq 0).$$

Тогда существует такой оператор

$$Hf = \int_0^x f(t)\, h(x-t)\, dt, \quad f(t) \in L^2[0, l], \tag{2.7}$$

что $H^2 = K$, *причем* $h(0) = \beta\ (\beta^2 = \alpha)$ *и ограничена функция* $h'(t)$.

Доказательство. Положим в уравнении (2.2) $\Phi(x) = k''(x)$, $\gamma = 2\beta\ (\beta^2 = \alpha)$. Пусть $\psi(x)$ — решение уравнения

$$k''(x) = 2\beta\psi(x) + \int_0^x \psi(s)\,\psi(x-s)\, ds. \tag{2.8}$$

Обозначим

$$h(x) = \int_0^x \psi(s)\, ds + \beta \tag{2.9}$$

и проинтегрируем от 0 до x равенство (2.8):

$$k'(x) = \beta h(x) + \int_0^x h'(s)\, h(x-s)\, ds.$$

Отсюда выводим:

$$k(x) = \int_0^x h(s)\, h(x-s)\, ds,$$

или

$$k(x-t) = \int_0^x h(s-t)\, h(x-s)\, ds. \tag{2.10}$$

Из равенства (2.10) следует, что оператор

$$Hf = \int_0^x f(t)\, h(x-t)\, dt, \tag{2.11}$$

где

$$h(x) = \int_0^x \psi(s)\, ds + \beta,$$

удовлетворяет условию $H^2 = K$.

Таким образом, теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Если операторы*

$$H_1 f = \int_0^x f(t)\, h_1(x-t)\, dt \quad и \quad H_2 f = \int_0^x f(t)\, h_2(x-t)\, dt, \quad h_1(t),\, h_2(t) \in L^2\,[0, l],$$

удовлетворяют условиям: $H_1^2 = H_2^2 = K$, *то либо* $H_1 = H_2$, *либо* $H_1 = -H_2$.

Доказательство. Из условия $H_1^2 = H_2^2$ вытекает:

$$\int_0^x h_1(x-s)\, h_1(s)\, ds = \int_0^x h_2(x-s)\, h_2(s)\, ds,$$

т. е.

$$\int_0^x [h_1(s) - h_2(s)]\,[h_1(x-s) + h_2(x-s)]\, ds = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Согласно теореме Титчмарша [см. (2)],

$$h_1(s) - h_2(s) \equiv 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant \alpha, \tag{2.12}$$

$$h_1(s) + h_2(s) \equiv 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant \beta, \tag{2.13}$$

причем $\alpha + \beta \geqslant l$. Из равенств (2.12) и (2.13) вытекает справедливость одного из соотношений:

$$1)\quad h_1(s) \equiv h_2(s),$$

$$2)\quad h_1(s) \equiv -h_2(s) \quad (0 \leqslant s \leqslant l),$$

откуда вытекает утверждение теоремы.

Следствие 1. *Если ядро* $k(x)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1 *и, кроме того, ограничена* n*-я производная* $(n \geqslant 2)$ *функции* $k(x)$, *то ядро* $h(x)$ *соответствующего оператора* H *имеет ограниченную производную* $(n-1)$*-го порядка.*

Из теоремы 1 вытекает, что первая производная $\psi(x)$ от функции $h(x)$ является решением уравнения

$$k''(x) = 2\beta\psi(x) + \int_0^x \psi(s)\, \psi(x-s)\, ds.$$

Докажем, что ряд (2.3) можно почленно дифференцировать столько раз, сколько ограниченных производных имеет функция $\Phi(x) = k''(x)$, т. е.

$$\psi^{(n-2)}(x) = \varphi_0^{(n-2)}(x) + \varphi_1^{(n-2)}(x) + \cdots, \tag{2.14}$$

где

$$\varphi_m^{(n-2)}(x) = \int_0^x \varphi_{m-1}(s)\, \varphi_{m-1}^{(n-2)}(x-s)\, ds, \quad m > n-2. \tag{2.15}$$

Очевидно, при некотором M справедливо равенство:

$$|\varphi_m^{(k-2)}(x)| \leqslant M, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant m \leqslant n-2, \quad 2 \leqslant k \leqslant n. \tag{2.16}$$

Из соотношений (2.15) и (2.16) следуют оценки:

$$|\varphi_m^{(n-2)}(x)| \leqslant \frac{M^{2^{m-n+2}}}{|(2\beta)|^{m-n+2}} \cdot \frac{x^{2^{m-n+2}-1}}{(2^{m-n+2}-1)!}, \quad m > n-2. \tag{2.17}$$

Согласно оценкам (2.16) и (2.17), ряд (2.14) сходится равномерно, следовательно, $h(t)$ действительно имеет ограниченную производную $(n-1)$-го порядка.

Следствие 2. *Если ядро $k(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и, кроме того, ограничена функция $k'''(x)$, то оператор*

$$Kf = \int_0^x f(t)\, k(x-t)\, dt \quad (0 \leqslant x \leqslant l)$$

линейно эквивалентен оператору

$$\alpha I^2 f = \alpha \int_0^x f(t)\,(x-t)\, dt \quad (0 \leqslant x \leqslant l)$$

Пусть

$$Hf = \int_0^x f(t)\, h(x-t)\, dt$$

является корнем квадратным из оператора K. Согласно следствию 1, функция $h''(t)$ ограничена. Но тогда из теоремы 1 § 1 вытекает, что оператор H линейно эквивалентен оператору

$$\beta I f = \beta \int_0^x f(t)\, dt \quad (0 \leqslant x \leqslant l).$$

Следовательно, оператор K линейно эквивалентен оператору

$$\alpha I^2 f = \alpha \int_0^x f(t)\,(x-t)\, dt \quad (0 \leqslant x \leqslant l).$$

Естественно возникает вопрос о корнях квадратных из оператора

$$Kf = \int_0^x f(t)\, k(x-t)\, dt, \tag{2.18}$$

не имеющих вида (2.18). При достаточно широких предположениях мы докажем, что других корней оператор K не имеет в классе

$$Hf = \int_0^x f(t)\, H(x, t)\, dt, \quad \text{где} \quad \int_0^l \int_0^l |H(x, t)|^2\, dx dt < \infty. \tag{2.19}$$

ТЕОРЕМА 3. *Если $k(x)$ удовлетворяет условиям следствия 2 и оператор*

$$Hf = \int_0^x f(t)\, H(x, t)\, dt, \quad \int_0^l \int_0^l |H(x, t)|^2\, dt\, dx < \infty,$$

является корнем квадратным из оператора K, то оператор H задается формулой

$$Hf = \int_0^x f(t)\, h(x-t)\, dt.$$

Доказательство. Оператор H перестановочен с K, а также с любой целой степенью оператора K, т. е. выполняются равенства:

$$\int_t^x H(x, y) k_n(y-t)\,dy = \int_t^x k_n(x-y) H(y, t)\,dy \quad (n = 1, 2, \ldots), \quad (2.20)$$

где

$$k_1(t) = k(t), \quad k_n(t) = \int_0^t k_{n-1}(s) k_{n-1}(t-s)\,ds \quad (n = 2, 3 \ldots). \quad (2.21)$$

Из (2.20) при $t = 0$ получаем:

$$\int_0^x k_n(y)\,[H(x, y) - H(x-y, 0)]\,dy = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots). \quad (2.22)$$

Докажем, что последовательность $k_n(y)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ образует полный базис в $L^2[0, l]$. Каждый член последовательности представляется следующим образом:

$$k_n(x) = K^{n-1} k(t), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Таким образом, мы должны доказать, что функция $k(t)$ является порождающей для оператора K.

В работе ([1]) приведено доказательство следующего предложения:

Функция $f(x)$ является порождающей для оператора $If = \int_0^x f(t)\,dt$ в том и только в том случае, если при любом $\gamma\,(\gamma > 0)$ в сегменте $[0, \gamma]$ существует множество точек x положительной меры, на котором $f(x) \neq 0$ *.

Дословно повторяя приведенные в работе ([1]) рассуждения, можно убедиться в том, что предложение справедливо для любой целой степени оператора I, в частности, для I^2. Согласно следствию 2, оператор K линейно эквивалентен оператору

$$\alpha I^2 f = \alpha \int_0^x f(t)(x-t)\,dt.$$

Отсюда, используя треугольный вид приводящего оператора (см. § 1), получаем предложение:

Функция $f(x)$ является порождающей для оператора

$$Kf = \int_0^x k(x-t) f(t)\,dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

---

* Это предложение принадлежит М. С. Бродскому. Однако его доказательство отлично от нашего.

где $k(x)$ удовлетворяет условиям следствия 2, в том и только в том случае, если при любом $\gamma\,(\gamma > 0)$ в сегменте $[0, \gamma]$ существует множество точек положительной меры, на котором $f(x) \neq 0$.

Следовательно, функция $k_1'(x)$ является порождающей для оператора K. Из (2.22) вытекает:

$$H(x, y) = H(x - y, 0).$$

Теорема полностью доказана.

§ 3

Доказательства теорем § 2 для случая $n > 2$ мало отличаются от соответствующих доказательств для $n = 2$. Большинство рассуждений для $n = 2$ дословно переносятся на случай $n > 2$. Поэтому мы здесь ограничимся лишь формулировкой результатов для случая $n > 2$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть ограничена производная $k^{(n)}(t)\,(0 \leqslant t \leqslant l)$, причем*

$$k(0) = k'(0) = \cdots = k^{(n-2)}(0) = 0, \quad k^{(n-1)}(0) = \alpha \quad (\alpha \neq 0).$$

Тогда существует такой оператор

$$Hf = \int_0^x f(t)\, h(x - t)\, dt, \quad f(t) \in L^2[0, l], \tag{3.1}$$

что $H^n = K$, причем $h(0) = \beta\,(\beta^n = \alpha)$ и ограничена функция $h'(t)\,(0 \leqslant t \leqslant l)$.

ТЕОРЕМА 2. *Если ядро $k(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и, кроме того, ограничена функция $k^{(n+1)}(t)\,(0 \leqslant t \leqslant l)$, то оператор*

$$Kf = \int_0^x f(t)\, k(x - t)\, dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

линейно эквивалентен оператору

$$\alpha I^n f = \alpha \int_0^x f(t)\, \frac{(x - t)^{(n-1)}}{(n-1)!}\, dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

ТЕОРЕМА 3. *Если $k(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и операторы*

$$H_1 f = \int_0^x f(t)\, H_1(x, t)\, dt, \quad H_2 f = \int_0^x f(t)\, H_2(x, t)\, dt$$

$$\left(\int_0^l \int_0^l |H_k(x, t)|^2\, dx\, dt < \infty, \quad k = 1, 2\right)$$

являются корнями n-й степени из оператора K, то выполняется равенство $H_1 = \varepsilon H_2$, где ε — постоянное число ($\varepsilon^n = 1$).

Отметим, что роль уравнения (2.2) при $n > 2$ играет следующее нелинейное уравнение:

$$k^{(n)}(x) = \sum_{m=1}^{n} C_n^m \beta^{n-m} \int_0^x \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{m-1}} \psi(x-s_1)\psi(s_1-s_2)\dots\psi(s_m)\,ds_m\,ds_{m-1}\dots ds_1 + n\beta^{n-1}\psi(x), \tag{3.2}$$

где $\beta^n = \alpha$.

Ядро оператора (3.1) связано с решением уравнения (3.2) формулой:

$$h(x) = \int_0^x \psi(s)\,ds + \beta.$$

Отметим также, что при доказательстве теоремы 3 мы пользовались равенством:

$$\int_0^x \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{n-2}} [k(x-s_1)\,k(s_1-s_2)\dots k(s_{n-2}-s_{n-1})\,k(s_{n-1}) -$$
$$- h(x-s_1)\,h(s_1-s_2)\dots h(s_{n-2}-s_{n-1})\,h(s_{n-1})]\,ds_{n-1}\dots ds_1 =$$
$$= \int_0^x \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{n-2}} [k(x-s_1)+\varepsilon_1 h(x-s_1)]\cdot[k(s_1-s_2)+\varepsilon_2 h(s_1-s_2)]\dots$$
$$\dots [k(s_{n-1})+\varepsilon_n h(s_{n-1})]\,ds_{n-1}\dots ds_1,$$

где ε_i — различные корни уравнения $x^n = (-1)^n$.

Поступило
17. XI. 1956

ЛИТЕРАТУРА

1 Сахнович Л. А., О приведении вольтерровских операторов к простейшему виду и обратных задачах, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 21 (1957), 235—262.
2 Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М., 1948.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая

22 (1958), 309—320

А. Л. БРУДНО

ПРИМЕР ДВУХ МАТРИЦ ТЁПЛИЦА, ОГРАНИЧЕННО НЕ ПРОТИВОРЕЧИВЫХ И ОГРАНИЧЕННО НЕ ПОКРЫВАЕМЫХ

(*Представлено академиком* **И. Г. Петровским**)

В статье построен пример двух матриц Тёплица.

Пример. *Существуют матрицы Тёплица A и B такие, что*

1) *ни одна ограниченная последовательность не суммируется матрицами A и B к неравным пределам,*

2) *не существует матрицы Тёплица C, суммирующей все ограниченные последовательности, каждая из которых суммируется хотя бы одной матрицей A или B.*

Фактически условие 2) будет иметь место в более сильной форме:

3) *Не ограничена норма функционала f, заданного равенством*

$$f(x)=\begin{cases}A^{\infty}(x) \text{ при } x\in\mathfrak{A},\\ B^{\infty}(x) \text{ при } x\in\mathfrak{B}\end{cases}$$

и продолженного по аддитивности на линейную оболочку $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ в R_1.

В формулировке пункта 3) использованы следующие обозначения, употребляемые и в дальнейшем:

1^0. Через $R_1=\{x\}$ обозначено пространство ограниченных последовательностей $x=\{x^1, x^2, \ldots\}$ с почленным сложением и умножением на константу (верхний значок изображает индекс, а не степень). Норма в R_1 введена равенством $|x|=\sup|x^k|$. Через $\mathfrak{A}$ обозначено множество ограниченных последовательностей, суммируемых матрицей A; через $A^{\infty}(x)$ — пределы суммирования для $x\in\mathfrak{A}$. Аналогичные обозначения употребляются для матрицы B и других матриц.

Построению примера предпошлем ряд обозначений и лемм.

2^0. Рассмотрим n-мерное линейное пространство $R^n=\{\mathbf{x}\}$ векторов $\mathbf{x}=\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$. Норма вектора введена равенством

$$|\mathbf{x}|=\sup|x^k|.$$

3^0. Через $\mathbf{e}$ обозначен вектор $\mathbf{e}=\{1, 1, \ldots, 1\}$.

4^0. Пусть в R^n через начало координат проходит $(n-1)$-мерная гиперплоскость Γ. Тогда через $\Gamma(\mathbf{x}_1)$ обозначаем гиперплоскость, параллельную Γ и проходящую через точку $\mathbf{x}_1$, а через $\Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ обозначаем *замкнутое* множество всех точек $\mathbf{x}$, лежащих между $\Gamma(\mathbf{x}_1)$ и $\Gamma(\mathbf{x}_2)$. Подробнее:

$$\Gamma(\mathbf{x}_1)=\Gamma+\mathbf{x}_1 \qquad \text{(если } \mathbf{x}\in\Gamma, \text{ то } \mathbf{x}+\mathbf{x}_1\in\Gamma(\mathbf{x}_1) \text{ и наоборот)}$$

$$\Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)=\Gamma+\{\lambda^1\mathbf{x}_1+\lambda^2\mathbf{x}_2\} \quad \begin{cases}\text{где } \lambda^1, \lambda^2 \text{ пробегают все значения,}\\ \text{для которых } \lambda^1\geqslant 0,\ \lambda^2\geqslant 0,\ \lambda^1+\lambda^2=1.\end{cases}$$

5^0. Под кубом E_ε радиуса ε понимается множество точек $\mathbf{x}$, для которых $|\mathbf{x}| \leqslant \varepsilon$:

$$E_\varepsilon = \{ |\mathbf{x}| \leqslant \varepsilon \}.$$

Под единичным кубом понимается E_1 (E_ε при $\varepsilon = 1$). Наконец, под кубом радиуса ε, описанным вокруг точки $\mathbf{x}_1$, понимается

$$E_\varepsilon(\mathbf{x}_1) = E_\varepsilon + \mathbf{x}_1 = \{ |\mathbf{x} - \mathbf{x}_1| \leqslant \varepsilon \}.$$

ЛЕММА 1. *Пусть в R^n лежит s-мерное ($s < n - 1$) линейное подпространство L, не содержащее внутренних точек $E_1(\mathbf{e})$; кроме того, фиксирован куб $E_{1-\varepsilon}(\mathbf{e})$ ($0 < \varepsilon < 1$). Тогда через начало координат $\mathbf{O}$ можно провести такие $(n-1)$-мерные гиперплоскости $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{\nu_n}$, что:*

а) *ни одна гиперплоскость Γ_k не будет содержать внутренних точек $E_{1-\varepsilon}(\mathbf{e})$;*

б) *теоретико-множественное пересечение $\bigcap\limits_{k=1}^{\nu_n} \Gamma_k(-\varepsilon\mathbf{e}, +\varepsilon\mathbf{e})$ не будет содержать точек, отстоящих от L на расстояние, большее 4;*

в) *число ν_n гиперплоскостей Γ_k конечно и зависит только от n (не зависит ни от L, ни от ε).*

Доказательство. Проведем все $(n-1)$-мерные гиперплоскости Γ_k, каждая из которых содержит s-мерную гиперплоскость L и хоть одну $(n-s-2)$-мерную грань куба $E_{1-\varepsilon}(\mathbf{e})$ и не имеет точек внутри него. Таких гиперплоскостей Γ_k не больше чем $(n-s-2)$-мерных граней у n-мерного куба. Повторив несколько раз одну из гиперплоскостей Γ_k, мы доведем их число ν_n до общего числа всевозможных граней n-мерного куба.

Таким образом, выполнены условия а) и в). Покажем, что имеет место и условие б). Образуем линейное $(n-s)$-мерное фактор-пространство $H = (R^n/L)$ с естественной нормировкой. Отметим некоторые свойства пространства $H = \{\mathbf{x}^H\}$ и естественного отображения $R^n \to H$, при котором $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^H$:

1. Множеству L соответствует $\mathbf{O}^H$ — нуль пространства H.

2. Расстояние от точки $\mathbf{x}_1 \in R^n$ до L равно $\min\limits_{\mathbf{l} \in L} |\mathbf{x}_1 - \mathbf{l}| = |\mathbf{x}_1^H|$.

3. При отображении $R^n \to H$ сохраняются линейные соотношения, поэтому гиперплоскости R^n переходят в гиперплоскости H.

В частности, единичный куб E_1 переходит в замкнутый выпуклый центрально симметрический многогранник E_1^H, являющийся единичной сферой H. Многогранник E_1^H является телом и не содержит бесконечных прямых.

4. $|\mathbf{e}^H| = \min\limits_{\mathbf{l} \in L} |\mathbf{e} - \mathbf{l}| = 1 = |\mathbf{e}|$, ибо, по условию настоящей леммы, все точки L находятся от $\mathbf{e}$ на расстоянии $\geqslant 1$. Следовательно, при отображении $R^n \to H$ нормы точек прямой $\{\lambda\mathbf{e}\}$ ($-\infty < \lambda < +\infty$) не изменяются.

5. Таким образом, множества

$$E_1(\mathbf{e}),\quad E_{1-\varepsilon}(\mathbf{e}),\quad \Gamma_k,\quad \Gamma_k(\varepsilon\mathbf{e}),\quad \Gamma_k(-\varepsilon\mathbf{e},\ \varepsilon\mathbf{e})$$

при отображении $R^n \to H$ переходят соответственно:

$E_1(\mathbf{e})$ и $E_{1-\varepsilon}(\mathbf{e})$ — в подобные многогранные сферы $E_1^H(\mathbf{e}^H)$ и $E_{1-\varepsilon}^H(\mathbf{e}^H)$ радиуса 1 и $1-\varepsilon$, описанные вокруг точки $\mathbf{e}^H$ с нормой 1;

Γ_k — в $(n-s-1)$-мерную гиперплоскость Γ_H^k, проходящую через точку $\mathbf{O}^H$ и не имеющую точек внутри $E_{1-\varepsilon}^H(\mathbf{e}^H)$;

$\Gamma_k(\varepsilon\mathbf{e})$ — в $\Gamma_k^H(\varepsilon\mathbf{e}^H) = \Gamma_k^H + \varepsilon\mathbf{e}^H$;

$\Gamma_k(-\varepsilon\mathbf{e}, +\varepsilon\mathbf{e})$ — в замкнутое множество $\Gamma_k^H(-\varepsilon\mathbf{e}^H, +\varepsilon\mathbf{e}^H)$ точек между $\Gamma_k^H(-\varepsilon\mathbf{e}^H)$ и $\Gamma_k^H(\varepsilon\mathbf{e}^H)$.

6. Пусть Γ^H есть любая $(n-s-1)$-мерная гиперплоскость пространства H, проходящая через O^H, содержащая какую-нибудь $(n-s-2)$-мерную грань T^H сферы $E_{1-\varepsilon}^H(\mathbf{e}^H)$ и не имеющая точек внутри этой сферы. Покажем, что Γ^H содержится среди $\Gamma_1^H, \Gamma_2^H, \ldots, \Gamma_{\nu_n}^H$. Действительно, пусть Γ — полный прообраз Γ^H при отображении $R^n \to H$. Тогда Γ имеет размерность $n-1$, содержит L, не содержит внутренних точек $E_{1-\varepsilon}(\mathbf{e})$ и содержит какую-нибудь грань T куба $E_{1-\varepsilon}(\mathbf{e})$ (отобразившуюся в T^H) с размерностью $\geqslant n-s-2$. Значит, Γ содержит и какую-нибудь $(n-s-2)$-мерную грань $T' \subseteq T$. Таким образом, Γ содержится среди $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{\nu_n}$ и, следовательно, Γ^H содержится среди $\Gamma_1^H, \Gamma_2^H, \ldots, \Gamma_{\nu_n}^H$.

Для завершения доказательства леммы нужно показать, что ни одна точка множества

$$\varphi = \bigcap_{k=1}^{\nu_n} \Gamma_k^H(-\varepsilon\mathbf{e}^H, +\varepsilon\mathbf{e}^H)$$

не имеет нормы, превосходящей 4. Для этого достаточно показать, что все точки множества

$$\psi = \bigcap_{k=1}^{\nu_n} \Gamma_k^H(\mathbf{O}^H, \varepsilon\mathbf{e}^H)$$

имеют норму $\leqslant 2$. Действительно, ψ есть центрально симметрическое множество. Если норма всякой его точки (т. е. расстояние от любой его точки до $\mathbf{O}^H$ в метрике H) не превосходит 2, то и подавно расстояние от его центра симметрии до любой другой его точки $\leqslant 2$. Но φ получается из ψ подобным увеличением в два раза (около точки $\varepsilon\mathbf{e}^H$, как центра подобия). Следовательно, расстояние от центра симметрии φ до любой его точки не превосходит $2\cdot 2 = 4$. Центром симметрии φ является точка $\mathbf{O}^H$, таким образом, норма любой точки φ не превосходит 4.

Пусть теперь, вопреки доказываемому, существует точка $\mathbf{y} \in \psi$, для которой $|\mathbf{y}|_H > 2$. Проведем через $\mathbf{y}$ и прямую $\{\lambda\mathbf{e}^H\}(-\infty < \lambda < \infty)$ двумерную плоскость α (см. рис. 1). Отметим на ней горизонтальную

прямую $\{\lambda e^H\}$, направленную слева направо, точки O^H, εe^H, e^H и пересечения

$$G_1 = E_1^H(e^H) \cap \alpha, \quad G_{1-\varepsilon} = E_{1-\varepsilon}^H(e^H) \cap \alpha$$

— замкнутые выпуклые многоугольники с центром симметрии e^H. На плоскости α проведем из O^H две прямые A_1 и A_2, опорные к $G_{1-\varepsilon}$. Пусть, для определенности, A_1 прикасается к $G_{1-\varepsilon}$ выше прямой $\{\lambda e^H\}$, а A_2 — ниже.

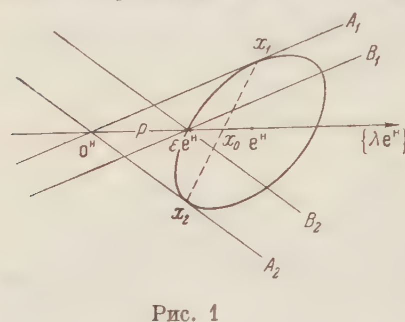


Рис. 1

Так как $G_{1-\varepsilon}$, вслед за G_1 и $E_1^H(e^H)$, является ограниченным телом, то $G_{1-\varepsilon}$ не вырождается в отрезок прямой или бесконечную полосу. Поэтому угол между A_1 и A_2, заключающий $G_{1-\varepsilon}$, больше нуля, но меньше развернутого. Через точку εe^H проведем прямые B_1 и B_2, параллельные A_1 и A_2, и обозначим через P параллелограмм $A_1A_2B_1B_2$. Наконец, отметим на прямых A_1, A_2 по одной точке x_1 и x_2, каждая из которых принадлежит $G_{1-\varepsilon}$.

Мы покажем, что все точки треугольника $O^H x_1 x_2$ имеют нормы $\leqslant 2$ (в метрике H), что этот треугольник содержит параллелограмм P и что параллелограмм P содержит пересечение $\psi \cap \alpha$. Тем самым будет показано, что все точки $\psi \cap \alpha$ имеют норму $\leqslant 2$ (в метрике H), вопреки допущению существования точки y, у которой

$$|y|_H > 2, \quad y \in \psi, \quad y \in \alpha.$$

Установим, что точки треугольника Ox_1x_2 имеют нормы $\leqslant 2$. Для этого рассмотрим многоугольник G_1. Он содержит $G_{1-\varepsilon}$ и, следовательно, точки x_1 и x_2. Кроме того, G_1 содержит O^H. Следовательно, треугольник $O^H x_1 x_2$ содержится в G_1. Но

$$G_1 = E_1^H(e^H) \cap \alpha,$$

а для всех точек $x \in E_1^H(e^H)$ имеем:

$$|x|_H = |x - e^H + e^H| \leqslant |x - e^H|_H + |e^H|_H \leqslant 2.$$

Покажем, что $\psi \cap \alpha \subseteq P$. Прямая A_1 прикасается к $(n-s)$-мерному многограннику $E_{1-\varepsilon}^H(e^H)$. Следовательно, A_1 пересекается с некоторой $(n-s-2)$-мерной гранью T_1 многогранника $E_{1-\varepsilon}^H(e^H)$. Через A_1 и T_1 можно провести $(n-s-1)$-мерную гиперплоскость Γ^H, которая, согласно пункту 6, находится среди гиперплоскостей $\Gamma_1^H, \Gamma_2^H, \ldots, \Gamma_{\nu_n}^H$. Пусть, для определенности, $\Gamma^H = \Gamma_1^H$. Замкнутое множество Φ_1 точек α, расположенных между A_1 и B_1, совпадает с пересечением $\Gamma_1^H(O^H, \varepsilon e^H) \cap \alpha$.

Проведя аналогичное рассуждение для A_2, B_2 и Γ_2, получим:

$$\Phi_2 = \Gamma_2^H(O^H, \varepsilon e^H).$$

Значит,

$$P = \Phi_1 \cap \Phi_2 = [\Gamma_1^H(\mathbf{O}^H, \varepsilon\mathbf{e}^H) \cap \alpha] \cap [\Gamma_2^H(\mathbf{O}^H, \varepsilon\mathbf{e}^H) \cap \alpha] \supseteq \psi \cap \alpha.$$

Докажем, что параллелограмм P содержится в треугольнике $\mathbf{O}^H\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$. Для этого, очевидно, достаточно показать, что точка $\varepsilon\mathbf{e}^H$ принадлежит треугольнику $\mathbf{O}^H\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$. Точка $\varepsilon\mathbf{e}^H$ лежит на прямой $\{\lambda\mathbf{e}^H\}$ правее точки $\boldsymbol{O}^H$. Рассмотрим отрезок $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$, соединяющий точки $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, лежащие по разные стороны прямой $\{\lambda\mathbf{e}^H\}$. Отрезок $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ пересекает прямую $\{\lambda\mathbf{e}^H\}$ в некоторой точке $\mathbf{x}_0$. Точка $\mathbf{x}_0$ принадлежит выпуклому многоугольнику $G_{1-\varepsilon}$ и не может лежать левее $\varepsilon\mathbf{e}^H$, так как $\varepsilon\mathbf{e}^H$ — самая левая граничная точка $G_{1-\varepsilon}$ на прямой $\{\lambda\mathbf{e}^H\}$. Лемма доказана.

Для дальнейшего введем дополнительно следующие обозначения.

6⁰. В $3n$-мерном пространстве R^{3n} возьмем два комплекта:

$$\{\mathbf{u}_{1n}, \mathbf{u}_{2n}, \ldots, \mathbf{u}_{nn}\} \text{ и } \{\mathbf{v}_{1n}, \mathbf{v}_{2n}, \ldots, \mathbf{v}_{nn}\}$$

по n векторов. Компоненты векторов

$$\mathbf{u}_{kn} = \{u_{kn}^1, u_{kn}^2, \ldots, u_{kn}^{3n}\} \text{ и } \mathbf{v}_{kn} = \{v_{kn}^1, v_{kn}^2, \ldots, v_{kn}^{3n}\}$$

зададим равенствами

$$\left.\begin{aligned} u_{kn}^{\varkappa} &= \begin{cases} 1 \pm \delta_k & \text{при } \varkappa = 1 + 3(k-1), \\ -1 \pm \delta_k & \text{при } \varkappa = 2 + 3(k-1), \end{cases} \\ v_{kn}^{\varkappa} &= \begin{cases} \pm \delta_k\varepsilon_k \pm \delta_k & \text{при } \varkappa = 3 + 3(k-1), \\ \pm \delta_k & \text{в остальных случаях при } 1 \leqslant \varkappa \leqslant 3n. \end{cases}\end{aligned}\right.$$

Здесь верхние знаки относятся к $u_{kn}^{\varkappa}$, а нижние — к $v_{kn}^{\varkappa}$; числа ε_k, δ_k ($k = 1,2, \ldots$) не зависят от n и фиксированы до конца работы. Они подчинены условиям:

$$1 > \varepsilon_k \searrow 0, \quad \delta_k \searrow 0, \quad \Delta = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < 1.$$

7⁰. Обозначим через α_n (β_n) линейное многообразие, порожденное в R^{3n} векторами $\{\mathbf{u}_{kn}\}$ (соответственно $\{\mathbf{v}_{kn}\}$). Векторы $\mathbf{u} \in \alpha_n$ и $\mathbf{v} \in \beta_n$ представляются в форме:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_n^i \mathbf{u}_{in}, \quad \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \mu_n^i \mathbf{v}_{in}.$$

Для компонент вектора $\mathbf{u} = \{u^1, u^2, \ldots, u^{3n}\}$ имеем:

$$u^{1+3(k-1)} = \lambda_n^k + \sum_{i=1}^{n} \lambda_n^i \delta_i, \tag{1}$$

$$u^{2+3(k-1)} = -\lambda_n^k + \sum_{i=1}^{n} \lambda_n^i \delta_i, \tag{2}$$

$$u^{3+3(k-1)} = \lambda_n^k \varepsilon_k \delta_k + \sum_{i=1}^{n} \lambda_n^i \delta_i, \tag{3}$$

где $k = 1,2, \ldots, n$. Аналогичные формулы имеют место для $\mathbf{v}$.

ЛЕММА 2. *При любом натуральном n для векторов* $\mathbf{u} \in \alpha_n$ *и* $\mathbf{v} \in \beta_u$ *из* R^{3n} *имеем*:

$$|\mathbf{u}| \geqslant \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |\lambda_n^k|, \quad |\mathbf{v}| \geqslant \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |\mu_n^k|.$$

Доказательство достаточно провести для векторов $\mathbf{u}$. При фиксированном k из двух чисел (1) и (2) наибольшее по модулю не может быть меньше $|\lambda_n^k|$. Поэтому

$$|\mathbf{u}| \geqslant \sup_{1 \leqslant \varkappa \leqslant 3n} |u^\varkappa| \geqslant \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |\lambda_n^k|.$$

ЛЕММА 3. *Линейные многообразия* α_n *и* β_n *не содержат точек внутри куба* $E_1(\mathbf{e}) = \{|\mathbf{x} - \mathbf{e}| \leqslant 1\}$.

Доказательство достаточно провести для α_n. Если, вопреки доказываемому, $\mathbf{u} \in \alpha_n$ и $|\mathbf{u} - \mathbf{e}| < 1$, то $|u^\varkappa - 1| < 1$ при всех $\varkappa = 1, 2, \ldots, 3n$. Следовательно [см. (1) и (2)],

$$\left|\lambda_n^k + \sum_{i=1}^{n} \lambda_n^i \delta_i - 1\right| < 1, \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n)$$
$$\left|-\lambda_n^k + \sum_{i=1}^{n} \lambda_n^i \delta_i - 1\right| < 1,$$

откуда

$$|\lambda_n^k| < \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_n^i \delta_i\right| \text{ при всех } k = 1, 2, \ldots, n.$$

В частности,

$$\max_k |\lambda_n^k| < \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_n^i \delta_i\right| \leqslant \max_k |\lambda_n^k| \sum_{i=1}^{n} |\delta_i| < \Delta \max_k |\lambda_n^k|,$$

откуда $\Delta > 1$, вопреки выбору $\Delta < 1$.

ЛЕММА 4. *Каково бы ни было* N, *найдется такое* $\delta > 0$, *что для всякой пары точек* $\mathbf{u} \in \alpha_n$ *и* $\mathbf{v} \in \beta_n$ *неравенство* $|\mathbf{e} + \mathbf{v} - \mathbf{u}| < \delta$ *влечет за собой* $|\mathbf{u}| > N$, $|\mathbf{v}| > N$ (*независимо от* n).

Доказательство. Расстояние между точками $\mathbf{u}$ и $\mathbf{e} + \mathbf{v}$ (по определению) равняется максимальной из $3n$ разностей [см. (1) — (3)]:

$$\left|1 + \mu_n^k - \lambda_n - \sum_{i=1}^{n} \mu_n^i \delta_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_n^i \delta_i\right| \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

$$\left|1 - \mu_n^k + \lambda_n^k - \sum_{i=1}^{n} \mu_n^i \delta_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_n^i \delta_i\right| \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

$$\left|1 - \mu_n^k \delta_k \varepsilon_k - \lambda_n^k \delta_k \varepsilon_k - \sum_{i=1}^{n} \mu_n^i \delta_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_n^i \delta_i\right| \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Если $|\mathbf{e}+\mathbf{v}-\mathbf{u}|<\delta$, то все эти числа $<\delta$. Следовательно,

$$|\mu_n^k-\lambda_n^k|<\delta \quad (k=1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

$$\left|1-\sum_{i=1}^{n}(\mu_n^i+\lambda_n^i)\,\delta_i\right|<\delta, \tag{8}$$

$$|(\mu_n^k+\lambda_n^k)\,\varepsilon_k\delta_k|<2\delta \quad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{9}$$

Из условия (8) следует:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(\mu_n^i+\lambda_n^i)\,\delta_i\right|\geqslant 1-\delta. \tag{10}$$

Далее, из (9) вытекает, что

$$|(\mu_n^k+\lambda_n^k)\,\delta_k|<2\delta:\varepsilon_k \quad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{11}$$

Суммируя (11) по всем k от 1 до n, получаем:

$$2\delta\sum_{i=1}^{n}1:\varepsilon_i>\left|\sum_{i=1}^{n}(\mu_n^i+\lambda_n^i)\,\delta_i\right|. \tag{12}$$

Собирая (10) и (12), находим:

$$\sum_{i=1}^{n}1:\varepsilon_i>(1-\delta)\,/\,2\delta. \tag{13}$$

Пусть теперь задано $N>1$. Фиксируем m столь большим, чтобы

$$\sum_{i=m+1}^{\infty}\delta_i<1:(16N), \tag{14}$$

а затем $\delta>0$ — столь малым, чтобы

$$\sum_{i=1}^{m}1:\varepsilon_i<(1-\delta):(4\delta) \text{ и } \delta<1:2, \tag{15}$$

и покажем, что такое δ удовлетворяет условиям настоящей леммы. Действительно, сравнивая (13) с (15), заключаем, что

$$m<n. \tag{16}$$

Далее, суммируя (11) по k от 1 до m, в силу (15) получаем:

$$\left|\sum_{i=1}^{m}(\mu_n+\lambda_n^i)\,\delta_i\right|<2\delta\sum_{i=1}^{m}1:\varepsilon_i<(1-\delta):2. \tag{17}$$

Из (17) и (10) следует:

$$\left|\sum_{i=m+1}^{m}(\mu_n^i+\lambda_n^i)\,\delta_i\right|>(1-\delta):2, \tag{18}$$

что, на основании (14), дает:

$$\max_{m+1\leqslant k\leqslant n}|\mu_n^k+\lambda_n^k|>8N(1-\delta)>4N. \tag{19}$$

Отсюда, в силу (7) и того, что $N>\delta$, получаем:

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\lambda_n^k|>N, \quad \max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mu_n^k|>N. \tag{20}$$

По лемме 2, из последних неравенств следует: $|\mathbf{u}| > N$ и $|\mathbf{v}| > N$ что и требовалось доказать.

Введем еще несколько обозначений.

8^0. Через e обозначим последовательность $e = \{1, 1, \ldots\}$.

9^0. Рассмотрим матрицу Тёплица $A = \{a_k^n\}$, где верхний индекс есть номер строки, а нижний—столбца. n-я строка $A^n = \{a_1^n, a_2^n, \ldots\}$ матрицы Тёплица A определяет в R_1 линейный функционал

$$A^n(x) = a_1^n x^1 + a_2^n x^2 + \cdots$$

Вся матрица Тёплица A вводит в R_1 линейный оператор

$$A(x) = \{A^1(x), A^2(x), \ldots\}.$$

Нормы упомянутого функционала и оператора, очевидно, равны:

$$|A^n| = |a_1^n| + |a_2^n| + \cdots, \quad |A| = \sup |A^n|.$$

10^0. Рассмотрим множество $\mathfrak{A}$ ограниченных последовательностей, суммируемых матрицей Тёплица A. На множестве $\mathfrak{A}$ матрица A задает линейный функционал

$$A^\infty(x) = \lim A^n(x) \quad (x \in \mathfrak{A}).$$

Очевидно, норма функционала $|A^\infty| \leqslant |A|$. Аналогичные обозначения употребляются и для других матриц.

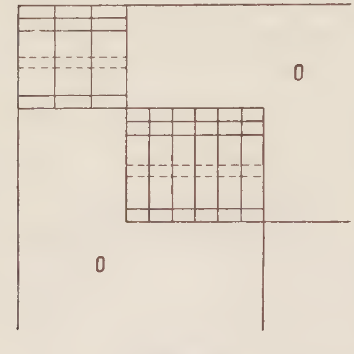


Рис. 2

Построение примера. Фиксируем $0 < \varepsilon < 1$. Матрицы A и B будут состоять из ящиков, примыкающих углами друг к другу. Элементы вне ящиков равны 0. n-й ящик состоит из $3n$ столбцов и некоторого, зависящего от n, числа ν_n строк. Построим n-й ящик матрицы A $(n = 1, 2, \ldots)$. Возьмем $3n$-мерное линейное пространство R^{3n} и в нем — линейное многообразие α_n (см. 6^0 и 7^0). Согласно лемме 3, многообразие α_n удовлетворяет условиям леммы 1. По лемме 1, для данного ε и многообразия $L = \alpha_n$, строим $(3n-1)$-мерные гиперплоскости $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{\nu_n}$, которые теперь будут обозначаться через $\Gamma_{1n}, \Gamma_{2n}, \ldots, \Gamma_{\nu_n n}$. Так как гиперплоскости Γ_{kn} проходят через начало координат и не проходят через точку $\mathbf{e} = \{1, 1, \ldots, 1\}$, то их уравнения можно записать в виде:

$$a_{1n}^k x^1 + a_n^{2k} x^2 + \cdots + a_{3n,\,n}^k x^{3n} = 0, \tag{21}$$

где $\sum_{s=1}^{3n} a_{sn}^k = 1$. При этом

$$\sum_{s=1}^{3n} |a_{sn}^k| = 1 : (1 - \varepsilon).$$

Действительно, в пространстве R^{3n} гиперплоскости Γ_{kn} касаются куба

$$E_{1-\varepsilon}(\mathbf{e}) = \{ |\mathbf{x} - \mathbf{e}| \leqslant 1 - \varepsilon \}.$$

Для точки касания $\mathbf{x}_1$ имеем:

$$|\mathbf{x}_1 - \mathbf{e}| = 1 - \varepsilon \text{ и } \sum_{s=1}^{3n} a_{sn}^k x_1^s = 0,$$

так что

$$\sum_{s=1}^{3n} a_{sn}^k (x_1^s - 1) = -1.$$

Следовательно,

$$\sum_{s=1}^{3n} |a_{sn}^k| \geqslant 1 : (1 - \varepsilon).$$

С другой стороны, если при каком-нибудь $k = k_1$ имеет место

$$\sum_{s=1}^{3n} |a_{sn}^{k_1}| > 1 : (1 - \varepsilon),$$

то для точки $\mathbf{x}_2 \in R^{3n}$ с координатами

$$x_2^s = 1 - \operatorname{sing} a_{sn}^{k_1} : \sum_{s=1}^{3n} |a_{sn}^{k_1}|$$

мы будем иметь:

$$|\mathbf{x}_2 - \mathbf{e}| < 1 - \varepsilon \text{ и } \sum_{s=1}^{3n} a_{sn}^{k_1} \cdot x_2^s = 0.$$

Таким образом, $\Gamma_{k,n}$ проходит через точку $\mathbf{x}_2$, находящуюся внутри $E_{1-\varepsilon}(\mathbf{e})$, что противоречит построению гиперплоскостей Γ_{kn}.

Пусть элементами k-й строки n-го ящика матрицы A будут коэффициенты $a_{1,n}^k$, $a_{2,n}^k$, ..., $a_{3n,n}^k$ уравнения (21) гиперплоскости $\Gamma_{k,n}$. Матрица B строится аналогичным образом по многообразиям β_n ($k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, \nu_n$; $n = 1, 2, \ldots$).

Докажем, что построенные матрицы A и B обладают свойствами 1)—3), сформулированными в начале работы.

Сначала проверим, что матрицы A и B теплицевы: (I) предел последовательности элементов фиксированного столбца равен нулю; (II) сумма элементов всякой строки равна единице; (III) сумма модулей элементов всякой строки равна $1 : (1 - \varepsilon) < \infty$. Следовательно, условия Тёплица выполнены.

Прежде чем проверять условие 2), покажем, что оно вытекает из условия 3). Действительно, если, вопреки условию 2), существует матрица Тёплица C, для которой

$$\mathfrak{C} \supseteq \mathfrak{A} \text{ и } \mathfrak{C} \supseteq \mathfrak{B},$$

то $\mathfrak{C}$, будучи линейным подпространством R_1, содержит линейную обо-

лочку $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Кроме того, по теореме Мазура — Орлича [см. ([2])],

$$C^\infty(x) = \begin{cases} A^\infty(x) \text{ при } x \in \mathfrak{A}, \\ B^\infty(x) \text{ при } x \in \mathfrak{B}. \end{cases}$$

Существование линейного функционала C^∞ с такими свойствами противоречит условию 3).

Перейдем к проверке условия 3). n-й ящик матрицы A имеет $3n$ столбцов и ν_n строк. Введем числа

$$\begin{aligned} &t_1 = 0, \quad t_n = 3 + 6 + \cdots + 3(n-1), \\ &s_1 = 0, \quad s_n = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_{n-1}. \end{aligned} \tag{22}$$

Строка A^τ матрицы A при $\tau = s_n + k$ и $1 \leqslant k \leqslant \nu_n$ имеет вид:

$$A^{s_n+k} = \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{t_n \text{ раз}}, a_{1n}^k, a_{2n}^k, \ldots, a_{3n,n}^k, 0, 0, \ldots. \tag{23}$$

Ее члены от (t_n+1)-го до $t_n + 3n$ являются коэффициентами k-й строки n-го ящика матрицы A. Скалярное произведение A^τ на последовательность $x = \{x^1, x^2, \ldots\}$ равно

$$A^{s_n+k}(x) = a_{1n}^k x^{t_n+1} + a_{2n}^k x^{t_n+2} + \cdots + a_{3n,n}^k x^{t_n+3n}. \tag{24}$$

Если числа $x^{t_n+1}, x^{t_n+2}, \ldots, x^{t_n+3n}$, рассматриваемые как координаты вектора $\mathbf{x}_n \in R^{3n}$, определяют вектор $\mathbf{x}_n \in \alpha_n$, то $A^{s_n+k}(x) = 0$, ибо гиперплоскость $\Gamma_{kn} \subseteq \alpha_n$. Таким образом,

$$A^\tau(x) = 0, \text{ если } s_n < \tau \leqslant s_{n+1} \text{ и } \{x^{t_n+1}, x^{t_n+2}, \ldots, x^{t_n+3n}\} \in \alpha_n. \tag{25}$$

Аналогичные условия имеют место для B^τ и β_n.

Далее, построим две последовательности:

$$x_{ak} = \{\underbrace{\delta_k, \delta_k, \ldots, \delta_k}_{t_k \text{ раз}}, [\mathbf{u}_{kk}], [\mathbf{u}_{k,k+1}], \ldots\},$$

$$x_{bk} = \{\overbrace{-\delta_k, -\delta_k, \ldots, -\delta_k}, [\mathbf{v}_{kk}], [\mathbf{v}_{k,k+1}], \ldots\},$$

где $[\mathbf{u}_{kn}]$ обозначает $3n$ чисел $u_{kn}^1, u_{kn}^2, \ldots, u_{kn}^{3n}$ — координат вектора $\mathbf{u}_{kn}$, построенного в п. 6° для $3n$-мерного пространства R^{3n}. Последовательности x_{ak} и x_{bk} ограничены:

$$|x_{ak}| < 1 + \Delta, \qquad |x_{bk}| < 1 + \Delta.$$

Применяя к x_{ak} матрицу A, получаем, в силу (25):

$$A^\tau(x_{ak}) = 0 \text{ при всех } \tau > s_k.$$

Следовательно, при любом k последовательность x_{ak} суммируется матрицей A к пределу, равному нулю. Аналогично доказывается, что последовательности x_{bk} суммируются к нулю матрицей B.

Пусть теперь, вопреки условию 3), найдется линейный функционал f, определенный на линейной оболочке $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ и удовлетворяющий условию

$$f(x) = \begin{cases} A^\infty(x) \text{ при } x \in \mathfrak{A}, \\ B^\infty(x) \text{ при } x \in \mathfrak{B}, \end{cases}$$

Тогда

$$f(x_{ak}) = f(x_{bk}) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Для линейной комбинации

$$x_k = (x_{ak} - x_{bk}) : (2\delta_k) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

последовательностей x_{ak} и x_{bk} также имеем $f(x_k) = 0$. Следовательно, $f(x_k - e) = -1$. Но последовательность $x_k - e$ равна (см. п. 6⁰)

$$x_k - e = \{\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{t_k \text{ раз}}, [\mathbf{y}_{kk}], [\mathbf{y}_{k,\ k+1}], \ldots\},$$

где $[\mathbf{y}_{kn}]$ обозначает $3n$ чисел

$$[\mathbf{y}_{kn}] = \{\overbrace{\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{3(k-1)+2 \text{ раза}}, \varepsilon_k, 0, \ldots, 0}^{3n \text{ раз}}\}.$$

Таким образом, функционал f должен равняться -1 на последовательности $x_k - e$ с нормой ε_k. Значит, $|f| \geqslant 1 : \varepsilon_k$. Но k — любое натуральное число и $\varepsilon_k \to 0$. Следовательно, $|f| = \infty$. Условие 3) доказано.

Остается доказать условие 1), а именно, что матрицы A и B не могут суммировать ограниченную последовательность к неравным пределам. Пусть, вопреки доказываемому, ограниченная последовательность y суммируется матрицами A и B к неравным пределам $A^\infty(y) \neq B^\infty(y)$. Тогда ограниченная последовательность

$$x = \frac{y - A^\infty(y)}{B^\infty(y) - A^\infty(y)}$$

суммируется матрицами A и B к пределам 0 и 1 соответственно. Это значит: каково бы ни было $\varepsilon_* > 0$, найдется такое $n = n(\varepsilon_*)$, что

$$|A^\tau(x)| < \varepsilon_* \text{ и } |B^\tau(x) - 1| < \varepsilon_* \text{ при всех } \tau > s_n \tag{26}$$

(числа s_n введены в (22)). Пусть, как обычно, члены последовательности x обозначены через $x = \{x^1, x^2, \ldots\}$. Введем вектор $\mathbf{x}_n \in R^{3n}$ с координатами

$$\mathbf{x}_n \equiv \{x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^{3n}\} = \{x^{t_n+1}, x^{t_n+2}, \ldots, x^{t_n+3n}\}. \tag{27}$$

Тогда, согласно (24), из условия (26) вытекает:

$$\left|\sum_{s=1}^{3n} a_{sn}^k x_n^s\right| < \varepsilon_* \text{ и } \left|\sum_{s=1}^{3n} b_{sn}^k (x_n^s - 1)\right| < \varepsilon_* \text{ при всех } 1 \leqslant k \leqslant \nu_n,$$

или

$$\left|\sum_{s=1}^{3n} a_{sn}^k \frac{\varepsilon}{\varepsilon_*} x_n^s\right| < \varepsilon \text{ и } \left|\sum_{s=1}^{3n} b_{sn}^k \frac{\varepsilon}{\varepsilon_*} (x_n^s - 1)\right| < \varepsilon \text{ при всех } 1 \leqslant k \leqslant \nu_n. \tag{28}$$

Переведем эти условия на геометрический язык леммы 1. Гиперплоскость Γ_{kn} задается уравнением (21). Сумма коэффициентов уравнения (21) равна 1. Поэтому гиперплоскость $\Gamma_{kn}(\varepsilon\mathbf{e})$ описывается уравнением (обо-

значения Г, Г(εe), Г(— εe, εe) введены в п. 4⁰)

$$\sum_{s=1}^{3n} a_{sn}^{k} x_{n}^{s} = \varepsilon, \tag{29}$$

в силу которого первое условие (28) можно записать в виде:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_*} \mathbf{x}_n \in \bigcap_{k=1}^{\nu_n} \Gamma_{kn}(-\varepsilon \mathbf{e}, \varepsilon \mathbf{e}). \tag{30}$$

Из условия (30), по лемме 1, вытекает, что расстояние от точки $(\varepsilon : \varepsilon_*)\mathbf{x}_n$ до α_n меньше 4 и, значит, расстояние от $\mathbf{x}_n$ до α_n меньше $4\varepsilon_* : \varepsilon$.

Аналогично, из второго условия (28) следует, что расстояние от $(\varepsilon : \varepsilon_*)(\mathbf{x}_n - \mathbf{e})$ до β_n меньше 4. Значит, расстояние от $\mathbf{x}_n$ до $\beta_n + \mathbf{e}$ меньше $4\varepsilon_* : \varepsilon$. Пусть $\mathbf{u}_n'$ — ближайшая к $\mathbf{x}_n$ точка α_n и $\mathbf{v}_n' + \mathbf{e}$ — ближайшая к $\mathbf{x}_n$ точка $\beta_n + \mathbf{e}$. Тогда

$$|\mathbf{x}_n - \mathbf{u}_n'| < 4\varepsilon_* : \varepsilon, \; |\mathbf{x}_n - (\mathbf{v}_n' + \mathbf{e})| < 4\varepsilon_* : \varepsilon, \quad |\mathbf{e} + \mathbf{v} - \mathbf{u}_n'| < 8\varepsilon_* : \varepsilon,$$

где $n = n(\varepsilon_*)$ является функцией ε_*. Так как ε_* произвольно мало, то, по лемме 4 и последнему неравенству, векторы $\mathbf{u}_n'$ и $\mathbf{v}_n' + \mathbf{e}$ произвольно велики. Но тогда произвольно велик и вектор $\mathbf{x}_n$. Таким образом, последовательность x, частью которой является вектор $\mathbf{x}_n$, не ограничена.

Лаборатория управляющих
машин Ак. наук СССР

Поступило
22.XI.1956

ЛИТЕРАТУРА

1 Toeplitz O., Über allgemeine lineare Mittelbildungen, Prace Matem. — Fiz., 22 (1911), 113—119.

2 Mazur S., Orlicz W., Sur les méthodes linéaires de sommation, C. R. Acad. Sci., Paris, 196 (1933), 32—34.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 321—336

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

ТЕОРЕМА ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ, РАССМАТРИВАЕМЫМИ В РАЗЛИЧНЫХ МЕТРИКАХ

(*Представлено академиком* **С. Л. Соболевым**)

В работе теорема вложения распространяется на более общий класс функций многих переменных, частные производные которых по разным переменным рассматриваются в разных метриках.

§ 1

1.1. В наших работах ([10]), ([11]), ([12]) получено обобщение теорем вложения С. Л. Соболева ([16]), ([17]) и теорем вложения В. И. Кондрашова ([9]), ([17]) для рассмотренных нами классов функций $H_p^{(r_1, \ldots, r_n)}$. Функция класса $H_p^{(r_1, \ldots, r_n)}$ может иметь несмешанные частные производные разных порядков по отдельным переменным $x_1, \ldots, x_n$. Но все частные производные и условия Гёльдера, которым они должны были удовлетворять, рассматривались в одной и той же метрике L_p. Однако иногда появляется необходимость иметь дело с функциями f многих переменных, частные производные которых по разным переменным рассматриваются в различных метриках. Например, мы могли бы говорить о функциях $f(x_1, \ldots, x_n)$, интегрируемых (непрерывных) на области G и таких, что для них имеет смысл интеграл:

$$I(f) = \int\limits_G \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial^{r_i} f}{\partial x_i^{r_i}} \right|^{p_i} dG < M < \infty, \tag{1}$$

где r_i — заданные натуральные числа, а $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$ $(i = 1, \ldots, n)$, и ставить вопрос: какие из частных производных функций f будут интегрируемы в метрике L_q, где $p_i \leqslant q \leqslant \infty$, или будут удовлетворять условию Гёльдера в метрике L_q. В частности, появляется необходимость в выяснении вопроса о том, будут ли функции f удовлетворять условиям Липшица той или иной степени (в метрике C). Положительное решение этого вопроса дает критерий равностепенной непрерывности ограниченного класса функций, для которых имеет место соотношение (1).

1.2. В этой работе мы вводим в рассмотрение новый класс функций многих переменных $H_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}(G;\ M)$, задаваемый, вообще говоря, различ-

ными числами $r_i > 0$ и p_i, где $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$. Он определяется как пересечение классов * $H^{(r_i)}_{p_i x_i}(G;\ M)$, $i = 1, \ldots, n$.

Таким образом, для функции $f \in H^{(r_1, \ldots, r_n)}_{p_1, \ldots, p_n}$ частные производные по отдельным переменным x_i рассматриваются в различных метриках L_{p_i}.

В § 2 мы доказываем одну теорему вложения (п. 2.4) для класса $H^{(r_1, \ldots, r_n)}_{p_1, \ldots, p_n}$ в случае, когда $G = R_n$ есть все n-мерное пространство. Доказательство ведется на основе приближений функций f целыми функциями конечной степени (экспоненциального вида). При этом появляется необходимость обобщить теорему Джексона применительно к классам $H^{(r_1, \ldots, r_n)}_{p_1, \ldots, p_n}$. Существенным аппаратом при доказательстве являются два неравенства для целых функций $g = g_{\nu_1, \ldots, \nu_n}$ степеней $\nu_1, \ldots, \nu_n$ соответственно по переменным $x_1, \ldots, x_n$ **:

$$\|g\|_{L^{(n)}_{p'}} \leqslant 2^n \left(\prod_1^n \nu_i\right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} \|g\|_{L^{(n)}_p} \quad (1 \leqslant p < p' \leqslant \infty), \tag{1}$$

$$\|g\|_{L^{(m)}_p} \leqslant 2^n \left(\prod_{m+1}^n \nu_i\right)^{\frac{1}{p}} \|g\|_{L^{(n)}_p} \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty, \quad 1 \leqslant m < n), \tag{2}$$

где

$$\|f\|_{L^{(m)}_p} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)|^p dx_1 \ldots dx_m\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Эти и аналогичные им неравенства для тригонометрических полиномов получены нами в работах ([10]), ([11]). Неравенство (1) в случае тригонометрических полиномов обращается при $n = 1$ и $p' = \infty$ в неравенство, полученное Джексоном ([6]).

В п. 2.6 приводится пример, показывающий при известных ограничениях [см. п. 2.6, условия (1)], которые на самом деле надо полагать

---

* Классы $H^{(r)}_{px_i}$ были введены в наших работах ([11]), ([12]). Пусть $r > 0$, $r = \bar{r} + \alpha$, где $\bar{r}$ — целое и $0 < \alpha \leqslant 1$. Функция $f(P)$, определенная на G, принадлежит к классу $H^{(r)}_{px_i\,(G)}(M)$, если она и ее частные производные до порядка $\bar{r}$ интегрируемы в p-й степени на G, а частная производная $f^{(\bar{r})}_{x_i}$ удовлетворяет неравенству:

$$\| f^{(\bar{r})}_{x_i}(\bar{P} + \bar{h}) - f^{(\bar{r})}_{x_i}(\bar{P})\|_{L_p\,(G')} \leqslant M\,|\bar{h}|^{\alpha},$$

если $0 < \alpha < 1$, и неравенству

$$\| f^{(\bar{r})}_{x_i}(\bar{P} + \bar{h}) - 2 f^{(\bar{r})}_{x_i}(P) + f^{(\bar{r})}_{x_i}(P - \bar{h})\|_{L_p\,(G')} \leqslant M\,|\bar{h}|,$$

если $\alpha = 1$ для всех областей $G' \subset G$ и векторов $\bar{h}$, направленных параллельно оси x_1, таких, что векторы $\pm \bar{h}$ сдвигают G' в пределах G. Если $G = R_n$, то в этом определении можно считать $G' = R_n$. В этом случае для краткости полагаем $H^{(r)}_{px_1\,(G)} = H^{(r)}_{px_1}$.

** Константа 2^n может быть улучшена, но точное значение константы в общем случае пока неизвестно [см. работы Н. К. Бари ([3]) и И. И. Ибрагимова ([8]), содержащие результаты, относящиеся к этому вопросу].

несущественными, что доказанная теорема не может быть усилена по крайней мере в терминах, которые здесь употребляются.

В § 3 формулируется теорема о компактности классов $H^{(r_1, \ldots, r_n)}_{p_1, \ldots, p_n}$ по аналогии с соответствующей теоремой для класса $H^{(r_1, \ldots, r_n)}_p$ [см. ([14])].

В § 4 показывается, как из теоремы 2.4 с помощью теорем о продолжении функций или по аналогии, как следствие, можно получить аналогичные теоремы вложения для других случаев (некоторые другие области G, периодический случай).

В частности, из этих результатов следует (см. п. 4.2), что совокупность ограниченных данной константой функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, определенных на области G, представляющей собой параллелепипед $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$, для которых выполняется неравенство п. 1.1, будет равностепенно непрерывна при условии, что

$$1 - \sum_1^n \frac{1}{p_i r_i} > 0.$$

Это утверждение для указанной области G содержит в себе результаты E. Gagliardo [см. ([7]), теоремы [1.I], [1.II], [1.III]].

В заключение я хочу отметить, что настоящая работа в какой-то мере дает ответ на вопрос, поставленный С. Л. Соболевым: можно ли методами, которые разрабатываются в моих работах по теории дифференцируемых функций многих переменных, получать теоремы вложения, учитывающие, что разные частные производные функций рассматриваются соответственно в разных метриках?

§ 2

2.1. Зададим числа r_i, p_i, M_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, удовлетворяющие неравенствам:

$$r_i > 0, \quad 1 \leqslant p_i \leqslant \infty.$$

Таким образом, в частности, некоторые p_i могут равняться $+\infty$.

По определению, функция n переменных $f = f(x_1, \ldots, x_n)$, определенная на n-мерном пространстве R_n точек $(x_1, \ldots, x_n)$, принадлежит к классу $H^{(r_1, \ldots, r_n)}_{p_1, \ldots, p_n}(M_1, \ldots, M_n)$, если она по каждой из переменных x_i принадлежит к $H^{(r_i)}_{p_i x_i}(M_i)$. Если $M_1 = \ldots = M_n = M$, то будем писать короче: $H^{(r_1, \ldots, r_n)}_{p_1, \ldots, p_n}(M)$.

Условимся, что $g_{\nu_1, \ldots, \nu_n} = g_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x_1, \ldots, x_n)$ обозначает целую функцию степеней $\nu_1, \ldots, \nu_n$, соответственно по переменным $x_1, \ldots, x_n$. Это определение имеет смысл, когда все ν_i $(i = 1, \ldots, n)$ суть неотрицательные конечные числа. Расширим это определение на случай, когда некоторые из ν_i (не все) равны ∞. Именно, если

$$\nu_{n_1} = \nu_{n_2} = \ldots = \nu_{n_m} = \infty \quad (m < n),$$

а остальные $\nu_k < \infty$, то это будет означать [см. ([5])], что функция $g_{\nu_1, \ldots, \nu_n}$ почти для всех $(x_{n_1}, \ldots, x_{n_m})$ из соответствующего m-мерного координатного подпространства является целой функцией по каждому из

остальных переменных соответствующих степеней. Например, $g_{\nu_1, \nu_2, \infty, \ldots, \infty}$ обозначает, что эта функция почти для всех $(x_3, \ldots, x_n)$ в смысле $n-2$-мерной меры есть относительно x_1, x_2 целая функция соответственно степеней ν_1, ν_2.

2.2. ТЕОРЕМА (обобщение неравенства Джексона). *Существует константа c, зависящая от r_i и p_i $(i=1, \ldots, n)$ такая, что, какова бы ни была функция $f \in H_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}(M_1, \ldots, M_n)$, для нее найдется система функций:*

$$g_{\nu_1, \ldots, \nu_n} \quad (1 \leqslant \nu_i \leqslant \infty, \quad i=1, \ldots, n), \tag{1}$$

для которой выполняются неравенства:

$$\left.\begin{aligned} &\| f - g_{\nu_1, \infty, \ldots, \infty} \|_{L_{p_1}^{(n)}} < \frac{cM_1}{\nu_1^{r_1}}, \\ &\| g_{\nu_1, \infty, \ldots, \infty} - g_{\nu_1, \nu_2, \infty, \ldots, \infty} \|_{L_{p_2}^{(n)}} < \frac{cM_2}{\nu_2^{r_2}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\| g_{\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}, \infty} - g_{\nu_1, \ldots, \nu_n} \|_{L_{p_n}^{(n)}} < \frac{cM_n}{\nu_n^{r_n}} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

и другие подобные неравенства, которые можно получить переставив местами переменные $x_1, \ldots, x_n$ (и соответственно $\nu_1, \ldots, \nu_n$). В неравенствах (2) буквы ν_i обозначают конечные числа ($\geqslant 1$).

Кроме того, имеет место соотношение:

$$\| g_{\nu_1, \ldots, \nu_n} \|_{L_{p_i}^{(n)}} \leqslant c \| f \|_{L_{p_i}^{(n)}}. \tag{3}$$

Константа c всюду не зависит от $\nu_i \geqslant 1$ $(i=1, \ldots, n)$.

Замечание. При $p_1 = \ldots = p_n = p$ неравенства (2) влекут за собой известные неравенства

$$\| f - g_{\nu_1, \ldots, \nu_n} \|_{L_p} < c \sum_1^n \frac{M_k}{\nu_k^{r_k}} \tag{4}$$

[см. ([11]), стр. 258; при $p=\infty$ и при $n=1$ см. ([4])], представляющие собой обобщение неравенства Джексона.

Доказательство теоремы близко доказательству неравенства (4) [см. ([11]); при $p=\infty$ см. ([4])]. Именно, вводятся в рассмотрение целые функции $K_\nu^{(r)}(u)$ степени ν $(1 \leqslant \nu < \infty, \ r > 0)$, обладающие тем свойством, что для них

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_\nu^{(r)}(u)\, du = 1, \tag{5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} | K_\nu^{(r)}(u) |\, du = a_r < \infty, \tag{6}$$

$$\left\| f - \int_{-\infty}^{\infty} K_\nu^{(r)}(u - x_1) f(u, x_2, \ldots, x_n) \right\|_{L_p} < \frac{b_r M}{\nu^r} \quad (\nu \geqslant 1, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty) \tag{7}$$

для всех $f \in H_{px_1}^{(r)}(M)$ (здесь b_r не зависит от p).

Возьмем, например, $n = 3$; тогда полагаем:

$$\left.\begin{aligned} g_{\nu_1, \infty, \infty} &= \int_{-\infty}^{\infty} K_{\nu_1}^{(r_1)}(u) f(x_1 + u, x_2, x_3)\, du, \\ g_{\nu_1, \nu_2, \infty} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_{\nu_1}^{(r_1)}(u_1) K_{\nu_2}^{(r_2)}(u_2) f(x_1 + u_1, x_2 + u_2, x_3)\, du_1\, du_2, \\ g_{\nu_1, \nu_2, \nu_3} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_{\nu_1}^{(r_1)}(u_1) K_{\nu_2}^{(r_2)}(u_2) K_{\nu_3}^{(r_3)}(u_3) \cdot \\ &\quad \cdot f(x_1 + u_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3)\, du_1 du_2\, du_3. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Неравенства (2) являются простыми следствиями свойств (5), (6), (7) ядер $K_\nu^{(r)}$. Например, третье из них обнаруживается из следующих выкладок:

$$\begin{gathered} (g_{\nu_1, \nu_2, \infty} - g_{\nu_1, \nu_2, \nu_3})(x_1, x_2, x_3) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_{\nu_1}^{(r_1)}(u_1) K_{\nu_2}^{(r_2)}(u_2)\, h(x_1 + u_1, x_2 + u_2, x_3)\, du_1 du_2, \end{gathered} \tag{9}$$

где

$$h(v_1, v_2, v_3) = f(v_1, v_2, v_3) - \int_{-\infty}^{\infty} K_{\nu_3}^{(r_3)}(u) f(v_1, v_2, v_3 + u)\, du.$$

Поэтому, применяя к (9) обобщенное неравенство Минковского, а также соотношения (5) и (7), получим:

$$\| g_{\nu_1, \nu_2, \infty} - g_{\nu_1, \nu_2, \nu_3} \|_{L_{p_3}^{(n)}} \leqslant a_{r_1} a_{r_2} \| h \|_{L_{p_3}^{(n)}} \leqslant \frac{a_{r_1} a_{r_2} b_{r_3}}{\nu_3^{r_3}} \quad (\nu \geqslant 1).$$

Покажем, наконец, на случае $n = 3$, как доказывается неравенство (3). Для этого достаточно к интегралу (8) применить обобщенное неравенство Минковского, что дает:

$$\| g_{\nu_1, \nu_2, \nu_3} \|_{L_{p_i}^{(n)}} \leqslant a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3} \| f \|_{L_{p_i}^{(n)}} \quad (i = 1, 2, 3),$$

т. е. мы получили неравенство (3) при $n = 3$.

В дальнейших рассуждениях будет использована следующая лемма, обобщающая обратную теорему приближения Бернштейна.

2.3. ЛЕММА. *Пусть* $r > 0$, $f \in L_p^{(n)}$ *и для некоторой последовательности* $g_{\nu, \infty, \ldots, \infty}$ *для всех* ν, *пробегающих геометрическую прогрессию* $\nu = a^s$ $(s = 0, 1, \ldots; a > 1)$, *имеет место неравенство*:

$$\| f - g_{\nu_1, \infty, \ldots, \infty} \|_{L_p^{(n)}} < \frac{K}{\nu^r}.$$

Тогда $f \in H^{(r)}_{px_1}(M)$, *где*

$$M < c\left(\|f\|_{L_p^{(n)}} + K\right)$$

и константа с не зависит от рядом стоящего множителя.

Доказательство см. в работе (11), теорема 8 (формулировка и замечание на стр. 264 в конце доказательства теоремы).

2.4. ТЕОРЕМА. *Пусть для рассматриваемых ниже чисел выполняются неравенства* $r_i > 0$, $1 \leqslant p_i \leqslant q \leqslant \infty$, n *и* m — *натуральные числа, для которых* $1 \leqslant m \leqslant n$,

$$\rho_i = \frac{r_i \varkappa}{\varkappa_i} > 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

где

$$\varkappa = \begin{vmatrix} 1 - \sum_{1}^{n} \dfrac{\frac{1}{p_l} - \frac{1}{q}}{r_l} & -\dfrac{1}{q}\sum_{1}^{n}\dfrac{1}{r_l} \\ -\sum_{m+1}^{n} \dfrac{\frac{1}{p_l} - \frac{1}{q}}{r_l} & 1 - \dfrac{1}{q}\sum_{m+1}^{n}\dfrac{1}{r_l} \end{vmatrix} \tag{2}$$

и

$$\varkappa_i = 1 - \sum_{l=1}^{n} \frac{\frac{1}{p_l} - \frac{1}{p_i}}{r_l} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Пусть, далее, определенная в n*-мерном пространстве* R_n *функция* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *принадлежит классу* $H^{(r_1, \ldots, r_n)}_{p_1, \ldots, p_n}(M)$. *Тогда при любых фиксированных* $(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ *функция* f, *как функция от* $x_1, \ldots, x_m$, *принадлежит классу* $H^{(\rho_1, \ldots, \rho_m)}_{q}(\overline{M})$. *При этом выполняется неравенство*:

$$\|f\|_{L_q^{(m)}} + \overline{M} < c\left(\min_{1 \leqslant i \leqslant n} \|f\|_{L_{p_i}^{(n)}} + M\right),$$

где константа с не зависит от рядом стоящего множителя.

Примечание. Если положить $p = p_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, то получится теорема 12 работы автора (11) [см. (11), стр. 287].

Доказательство. Пусть задана функция $f \in H^{(r_1, \ldots, r_n)}_{p_1, \ldots, p_n}(M)$. Тогда на основании теоремы п. 2.2 ей можно привести в соответствие систему функций $g_{\nu_1, \ldots, \nu_n}$ $(1 \leqslant \nu_i \leqslant \infty;\ i = 1, \ldots, n)$, для которой выполняются неравенства (2) п. 2.2 и подобные неравенства, получаемые после любой перестановки $x_1, \ldots, x_n$. Ограничимся рассмотрением ν_k, зависящих от целочисленного параметра s и определенных при помощи равенств:

$$\nu_k = \nu_k(s) = 2^{\frac{s}{\rho_k}} \quad (k = 1, \ldots, n,\ s = 0,\ 1, \ldots \text{ и } s = \infty), \tag{4}$$

где ρ_k — заданные положительные числа, точные значения которых будут определены ниже.

Положим

$$Q_0 = g_{\nu_1(0), \ldots, \nu_n(0)},$$

$$Q_s = g_{\nu_1(s), \ldots, \nu_n(s)} - g_{\nu_1(s-1), \ldots, \nu_n(s-1)} \quad (s = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Очевидно,

$$Q_s = \sum_{i=1}^{n} Q_s^{(i)} \quad (s = 1, 2, \ldots),$$

где

$$Q_s^{(i)} = g_{\nu_1(s), \ldots, \nu_i(s), \nu_{i+1}(s-1), \ldots, \nu_n(s-1)} - g_{\nu_1(s), \ldots, \nu_{i-1}(s), \nu_i(s-1), \ldots, \nu_n(s-1)}. \tag{6}$$

Пусть число q удовлетворяет неравенствам $p_i \leqslant q \leqslant \infty$ $(i = 1, \ldots, n)$ и натуральное число m — неравенствам $1 \leqslant m \leqslant n$.

Имеем:

$$\| Q_s \|_{L_q^{(m)}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \| Q_s^{(i)} \|_{L_q^{(m)}} \quad (s = 1, 2, \ldots),$$

где $\|\psi\|_{L_q^{(m)}}$ обозначает норму ψ, вычисленную по переменным $x_1, \ldots, x_m$ при фиксированных $x_{m+1}, \ldots, x_n$. Применим к каждому i-му слагаемому этой суммы неравенства (1) и (2) п. 1.2, дающие оценку нормы целой функции конечных степеней в метрике $L_q^{(m)}$, исчисленной по m-мерному пространству через ее норму в метрике $L_{p_i}^{(n)}$, исчисленную по n-мерному пространству. Тогда, приняв во внимание, что $Q_s^{(i)}$ имеет степени не выше $\nu_i(s)$ соответственно по x_i $(i = 1, \ldots, n)$, получим:

$$\| Q_s \|_{L_q^{(m)}} \leqslant 2^n \sum_{i=1}^{n} \Big(\prod_{l=m+1}^{n} \nu_l \Big)^{\frac{1}{q}} \| Q_s^{(i)} \|_{L_q^{(n)}} \leqslant$$

$$\leqslant 4^n \sum_{i=1}^{n} \Big(\prod_{l=m+1}^{n} \nu_l \Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\prod_{l=1}^{n} \nu_l \Big)^{\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q}} \| Q_s^{(i)} \|_{L_{p_i}^{(i)}}. \tag{7}$$

Заметим, что если $\nu_1, \ldots, \nu_n$ и ν_n' — произвольные конечные числа, где $\nu_n < \nu_n'$, то, в силу последнего неравенства формулы (2) п. 2.2, имеем:

$$\| g_{\nu_1, \ldots, \nu_n} - g_{\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}, \nu_n'} \|_{L_{p_n}^{(n)}} \leqslant \| g_{\nu_1, \ldots, \nu_n} - g_{\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}, \infty} \|_{L_{p_n}^{(n)}} +$$

$$+ \| {}_{\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}, \infty} - g_{\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}, \nu_n'} \|_{L_{p_n}^{(n)}} \leqslant \frac{2cM}{\nu_n^{r_n}} \quad (1 \leqslant \nu_l, \quad l = 1, 2, \ldots, n).$$

Аналогично, переставляя местами переменные, получим более общее неравенство:

$$\| g_{\nu_1, \ldots, \nu_n} - g_{\nu_1, \ldots, \nu_{i-1}, \nu_i', \nu_{i+1}, \ldots, \nu_n} \|_{L_{p_i}^{(n)}} \leqslant \frac{2cM}{\nu_i^{r_i}}$$

$$(1 \leqslant \nu_l < \infty, \quad \nu_i < \nu', \quad l = 1, \ldots, n).$$

Поэтому, учитывая (4) и (6), будем иметь:

$$\|Q_s^{(i)}\|_{L_{p_i}^{(n)}} \leqslant \frac{c_1M}{2^{s\rho_i}} \quad (i=1, \ldots, n, \quad s=1, 2, \ldots)$$

и, следовательно, из (7) вытекает следующее неравенство:

$$\|Q_s\|_{L_q^{(m)}} \leqslant c_2M \sum_{i=1}^{n} 2^{-s\left[\frac{r_i}{\rho_i}-\left(\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q}\right)\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\rho_l}-\frac{1}{q}\sum_{m+1}^{n}\frac{1}{\rho_l}\right]} \tag{8}$$
$$(s=1, 2, \ldots).$$

Естественно подобрать постоянные ρ_l таким образом, чтобы слагаемые, входящие в правую часть (8), имели одинаковый порядок. Соответствующие подсчеты показывают, что это будет иметь место лишь тогда, когда

$$\rho_i = \lambda r_i \frac{\varkappa}{\varkappa_i} \quad (i=1, \ldots, n), \tag{9}$$

где λ — произвольное число, которое мы примем равным единице, а $\varkappa$ и $\varkappa_i$ суть числа, определяемые равенствами (2) и (3) п. 2.4.

Выражения в квадратных скобках неравенства (8) при ρ_i, определяемых равенствами (9), все обращаются в единицу и, следовательно,

$$\|Q_s\|_{L_q^{(m)}} \leqslant nc_2M2^{-s} = c_3M2^{-s} \quad (s=1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Таким образом, все приведенные рассуждения будут корректны, если для чисел p_l, r_l, q, удовлетворяющих неравенствам $1 \leqslant p_l \leqslant q \leqslant \infty$, $r_l > 0$, выполняются одновременно неравенства:

$$\rho_i = \frac{r_i\varkappa}{\varkappa_i} > 0 \quad (i=1, \ldots, n).$$

Введем в рассмотрение ряд

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi = \sum_{s=0}^{\infty} Q_s = g_{\nu_1(0), \ldots, \nu_n(0)} +$$
$$+ \sum_{s=1}^{\infty} [g_{\nu_1(s), \ldots, \nu_n(s)} - g_{\nu_1(s-1), \ldots, \nu_n(s-1)}] = \lim_{s\to\infty} g_{\nu_1(s), \ldots, \nu_n(s)}, \tag{11}$$

который мы записываем пока чисто формально, не заботясь об обосновании сходимости.

На основании неравенств (2) п. 2.2, где надо считать $\nu_i = \nu_i(s)$ $(i=1, \ldots, n)$, можно подобрать подпоследовательность натуральных чисел $(s_1, s_2, \ldots)$ такую, что почти для всех $(x_1, \ldots, x_n)$ в смысле n-мерной меры имеет место равенство:

$$\lim_{k\to\infty} g_{\nu_1(s_k), \ldots, \nu_n(s_k)} = f. \tag{12}$$

Таким образом, равенство (12) выполняется на некотором множестве $E_1 \subset R_n$ таком, что n-мерная мера $R_n - E$ равна нулю.

С другой стороны, на основании неравенств (10), ряд (11) (при любых фиксированных $x_{m+1}, \ldots, x_n$) сходится в метрике $L_q^{(m)}$ к функции φ и, таким образом (в смысле n-мерной меры), почти для всякой точки $(x_1, \ldots, x_n)$ из последовательности $\{s_k\}$ можно выделить соответствующую подпоследовательность $\{s_k'\}$ такую, что в этой точке

$$\lim_{k\to\infty} g_{\nu_1(s_k'), \ldots, \nu_n(s_k')} = \varphi. \tag{13}$$

Пусть $E_2 \subset R_n$ есть множество, на котором имеет место равенство (13). Очевидно, на пересечении $E = E_1 E_2$ множеств E_1 и E_2

$$f = \varphi = \sum_{s=0}^{\infty} Q_s, \tag{14}$$

т. е. почти всюду в смысле n-мерной меры.

На основании (10), (11), (14),

$$\|f - g_{\nu_1(s), \ldots, \nu_n(s)}\|_{L_q^{(m)}} \leqslant \sum_{s+1}^{\infty} \|Q_s\|_{L_q^{(m)}} < \frac{c_4 M}{2^s} = \frac{c_4 M}{\left(2^{\frac{s}{\rho_i}}\right)^{\rho_i}}$$
$$(i = 1, \ldots, m),$$

какова бы ни была система значений $x_{m+1}, \ldots, x_n$, и так как $g_{\nu_1(s), \ldots, \nu_n(s)}$ при фиксированных $x_{m+1}, \ldots, x_n$ есть целая функция степени $2^{\frac{s}{\rho_i}}$ относительно x_i, то, на основании леммы п. 2.3, функция $f \in H_{qx_i}^{(\rho_i)}(\overline{M})$, где

$$\overline{M} < c_5 (\|f\|_{L_q^{(m)}} + M) \tag{15}$$

и c_5 — константа, не зависящая от рядом стоящего множителя.

Остается оценить $\|f\|_{L_q^{(m)}}$.

Из (14), в силу (10), следует:

$$\|f\|_{L_q^{(m)}} \leqslant \|Q_0\|_{L_q^{(m)}} + \sum_{1}^{\infty} \|Q_s\|_{L_q^{(m)}} < \|Q_0\|_{L_q^{(m)}} + c_5 M. \tag{16}$$

Далее, на основании неравенств (1) и (2) п. 1.2, учитывая, что Q_0 по всем переменным x_i $(i = 1, \ldots, n)$ имеет степень единица, выводим:

$$\|Q_0\|_{L_q^{(m)}} \leqslant 2^n \|Q_0\|_{L_{p_i}^{(n)}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{17}$$

Но, в силу неравенства (3) п. 2.1,

$$\|Q_0\|_{L_{p_i}^{(n)}} = \|g_{\nu_1(0), \ldots, \nu_n(0)}\|_{L_{p_i}^{(n)}} \leqslant c\|f\|_{L_{p_i}^{(n)}}. \tag{18}$$

Поэтому из (16), (17) и (18) следует, что

$$\|f\|_{L_q^{(m)}} \leqslant c_6 \left(\min_{1 \leqslant i \leqslant n} \|f\|_{L_{p_i}^{(n)}} + M \right). \tag{19}$$

Далее, из (15) следует, что

$$\overline{M} < c_7 \left(\min_{1 \leqslant i \leqslant n} \|f\|_{L_{p_i}^{(n)}} + M \right). \tag{20}$$

Таким образом доказано, что при $\rho_i > 0 \, (i = 1, \ldots, n)$ функция f, как функция от $x_1, \ldots, x_m$, принадлежит к классу $H_q^{(\rho_1, \ldots, \rho_m)}(\overline{M})$ и при этом выполняются неравенства (19) и (20), где константы c_6 и c_7 не зависят от рядом стоящих множителей.

2.5. Теорема 2.4 утверждает, в частности, при условиях, которые в ней оговорены, что если функция $f \in H_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}$ и $1 \leqslant m \leqslant n$, то $f \in H_q^{(\rho_1, \ldots, \rho_m)}$, где числа $\rho_i \, (i = 1, \ldots, m)$ определяются равенствами (1) п. 2.4.

Допустим теперь, что мы имеем еще пару чисел m_1 и q_1, где m_1 — натуральное число, для которого $1 \leqslant m_1 \leqslant m \leqslant n$ и $q \leqslant q_1 \leqslant \infty$, и при этом выполняется неравенство:

$$\mu = 1 - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_1} \right) \sum_{k=1}^{m_1} \frac{1}{\rho_k} - \frac{1}{q} \sum_{m_1+1}^{m} \frac{1}{\rho_k} > 0.$$

Тогда, в силу теоремы 12 работы автора ([11]), из того, что функция $f \in H_q^{(\rho_1, \ldots, \rho_m)}$, следует также, что $f \in H_{q_1}^{(\rho_1', \ldots, \rho_{m_1}')}$, где

$$\rho_i' = \mu \rho_i, \quad i = 1, \ldots, m_1.$$

Соответствующие подсчеты показывают, что если бы мы переходили от чисел n, r_i, $p_i \, (i = 1, \ldots, n)$ к числам m_1', ρ_1', $\ldots$, ρ_{m_1}', q_1, то мы пришли бы к тем же соотношениям (1) п. 2.4.

Таким образом, свойство, которое утверждается в теореме п. 2.4, так же как и в случае нашей прежней теоремы [см. ([11]), стр. 270], носит транзитивный характер.

2.6. Докажем, что при условиях

$$1 - \sum_{1}^{n} \frac{1}{p_l r_l} > 0, \quad 1 < p_i \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

теорема п. 2.4 не может быть улучшена (в терминах, которые здесь употребляются). Именно, для любого числа p', удовлетворяющего неравенствам $1 < p_i \leqslant p' \leqslant \infty$, и любого натурального m, для которого $1 \leqslant m \leqslant n$, можно указать функцию f, принадлежащую к классу $H_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}$, но не принадлежащую (ни при каких M) к классу $H_q^{(\rho_1, \ldots, \rho_{i-1}, \rho_i + \varepsilon, \rho_{i+1}, \ldots, \rho_m)}$, где числа $\rho_l \, (l = 1, \ldots, m)$ определяются равенствами (2) п. 2.4.

Легко видеть, что если нам удастся найти пример нужной функции f при $q=\infty$ и $m=1$, то, вследствие транзитивного свойства теоремы п. 2.4 (см. п. 2.5), эта функция может служить также нужным примером и при других m, где $1 \leqslant m \leqslant n$, и p', для которых $p_i \leqslant p' \leqslant \infty$.

Итак, пусть заданы числа $r_i > 0$ и p_i, удовлетворяющие неравенствам $1 < p_i \leqslant \infty$. Пусть, кроме того, имеет место неравенство (1).

Зададим функцию f в виде ряда

$$f = f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu, \tag{2}$$

где

$$\varphi_\nu = \varphi_\nu(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2^\nu} \prod_{i=1}^{n} \frac{\sin 2^{\nu\lambda_i} x_i}{x_i} \quad (\nu = 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

и числа λ_i определяются при помощи равенств:

$$\lambda_i = \frac{1}{r_i}\left(1 - \frac{1}{q_i} \frac{\sum\limits_{l=1}^{n} \frac{1}{r_l}}{1 + \sum\limits_{l=1}^{n} \frac{1}{q_l r_l}}\right) = \frac{1 - \sum\limits_{1}^{n} \frac{1}{r_l p_l} + \frac{1}{p_i} \sum\limits_{l=1}^{n} \frac{1}{r_l}}{r_i \left(1 - \sum\limits_{l=1}^{n} \frac{1}{r_l p_l} + \sum\limits_{1}^{n} \frac{1}{r_l}\right)},$$

$$\frac{1}{p_l} + \frac{1}{q_l} = 1 \quad (i, l = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

В силу (1), числа λ_i положительны.

На основании равенства

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin nx}{x}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{q}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{q}} A$$

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right),$$

имеет место соотношение

$$\left\| f - \sum_{1}^{\mu-1} \varphi_\nu \right\|_{L_{p_i}^{(n)}} \leqslant \sum_{\mu}^{\infty} \| \varphi_\nu \|_{L_{p_i}^{(n)}} = \sum_{\mu}^{\infty} \frac{A}{2^{\nu\left(1 - \sum\limits_{l=1}^{n} \frac{\lambda_l}{q_i}\right)}} =$$

$$= \sum_{\mu}^{\infty} \frac{A}{2^{\nu\lambda_i r_i}} < \frac{c}{2^{\mu\lambda_i r_i}} = \frac{c}{(2^{\mu\lambda_i})^{r_i}} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

и так как функция $\sum\limits_{1}^{\mu-1} \varphi_\nu$ есть целая функция степеней $2^{\nu\lambda_i}$ соответственно по x_i, то отсюда и из леммы п. 2.3 следует, что

$$f \in H_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}.$$

Условия теоремы п. 2.4 при $p' = \infty$ и $m = 1$ для рассматриваемых p_i и r_i соблюдены, так как в данном случае

$$\varkappa_1 = 1 - \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{p_l r_l} + \frac{1}{p_1} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{r_l} > 1 - \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{p_l r_l} = \varkappa > 0$$

и, следовательно,

$$\rho_1 = \frac{r_1 \varkappa}{\varkappa_1} > 0.$$

Таким образом, на основании теоремы п. 2.4,

$$\psi(x) = f(x, 0, \ldots, 0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu\left(1-\sum\limits_{1}^{n} \lambda_i\right)}} \frac{1}{x} \int_0^x \cos 2^{\nu\lambda_1} u \, du =$$

$$= \frac{1}{x} \int_2^x \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos 2^{\nu} u}{2^{\rho_1 \nu}} \, du = F_{\rho_1}(x) \in H_{\infty x_1}^{(\rho_1)}.$$

Но в нашей работе ([11]) (стр. 271) было доказано, что функция $F_{\rho_1}(x)$ не принадлежит к классу $H_{\infty x}^{(\rho_1+\varepsilon)}$ при любом $\varepsilon > 0$ и, таким образом, определенная при помощи равенства (2) функция f может служить примером, подтверждающим высказанное в начале п. 2.6 утверждение.

2.61. Приведенный в п. 2.6 пример охватывает только те случаи, предусмотренные теоремой п. 2.4, для которых дополнительно выполняются неравенства (1) п. 2.6. Более общий пример, охватывающий все случаи, можно построить также в виде ряда, подобного ряду (2), взяв в основу соответствующие результаты Т. И. Аманова ([1]), который в своей работе исчерпывающим образом дополнил недостающими примерами мою прежнюю, цитированную уже теорему 12 работы ([11]).

§ 3

3.1. Будем считать, что $H_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}$ обозначает совокупность функций f, каждая из которых принадлежит при некотором M к $H_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}(M)$, и пусть M_f обозначает наименьшую константу M, при которой это имеет место.

Введем для всякой функции $f \in H_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}$ норму *

$$\|f\|_{L_{p_1, \ldots, p_n}}^{(r_1, \ldots, r_n)} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|f\|_{L_{p_i}^{(n)}} + M_f.$$

Множество функций $H_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}$ с введенной нами нормой образует линейное нормированное полное пространство, т. е. пространство типа (B). Это утверждение можно доказать в общем аналогично тому, как это было сделано в нашей работе ([15]) (§ 4) для пространства $H_p^{(r_1, \ldots, r_n)}$.

* Подобным образом можно ввести пространство $H_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}(G)$ функций, определенных на области $G \subset R_n$, которое будет линейным нормированным пространством и для некоторых областей полным.

3.2. ТЕОРЕМА О КОМПАКТНОСТИ. *Пусть задана последовательность $\{f_m\}$ функций f_m, удовлетворяющая условиям:*

$$f_m \in H_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}, \quad \| f_m \|_{L_{p_1, \ldots, p_n}}^{(r_1, \ldots, r_n)} \leqslant K \quad (m = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

где K — заданная константа.

Тогда можно выделить подпоследовательность $\{f_{m_K}\}$ и такую функцию f, удовлетворяющую условиям (1), что, каковы бы ни были числа r_i', для которых $0 < r_i' < r_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, и какова бы ни была ограниченная область $G \subset R_n$, имеет место равенство:

$$\lim \| f_{m_K} - f \|_{L_{p_1, \ldots, p_n (G)}}^{(r_1', \ldots, r_n')} = 0. \tag{2}$$

Эта теорема может быть доказана аналогично нашей теореме о компактности классов $H_p^{(r_1, \ldots, r_n)}$ [см. ([14])].

§ 4

4.1. Чтобы применять теоремы, о которых выше шла речь, для функций, определенных на какой-либо области G, составляющей часть R_n, можно попытаться продолжить заданную на G функцию f на все пространство R_n так, чтобы продолженная функция оказалась принадлежащей к тому или иному классу $H_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}$.

Здесь мы только отметим следующий случай. Наряду с пространством R_n точек $(x_1, \ldots, x_m)$ определим еще его подпространство R' точек $(x_1, \ldots, x_n)$ и подпространство R'' точек $(x_{m+1}, \ldots, x_n)$. Пусть $G' \subset R'$ и $G'' \subset R''$ — области, ограниченные поверхностями, непрерывно дифференцируемыми соответственно ρ_1 и ρ_2 раз, и $G = G \times G'' \subset R$ есть топологическое произведение областей G' и G''. На G определим функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, обладающую тем свойством, что она вместе со своими обобщенными частными производными вида

$$\frac{\partial^{\rho'} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} \quad \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_K = \rho' \right)$$

интегрируема на G в степени p' и, кроме того, она вместе со своими обобщенными частными производными вида

$$\frac{\partial^{\rho''} f}{\partial x_m^{\alpha_{m+1}} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad \left(\sum_{m+1}^{m} \alpha_K = \rho'' \right)$$

интегрируема на G в степени p'' $(1 \leqslant p'' \leqslant \infty)$.

Условимся, что определенные выше функции f образуют класс $W_{p' (G'), \, p'' (G'')}^{(\rho', \rho'')}$ функций. Положим

$$\| f \|_{W_{p' (G'), \, p'' (G'')}^{(\rho', \rho'')}} = \max \{ \| f \|_{L_{p' (G)}}, \| f \|_{L_{p'' (G)}} \} +$$
$$+ \sum \| f^{(\rho')} \|_{L_{p' (G)}} + \sum \| f^{(\rho'')} \|_{L_{p'' (G'')}},$$

где суммы распространены соответственно на все частные производные порядка ρ' от f по переменным $x_1, \ldots, x_m$ и на все частные производные порядка ρ'' от f по переменным $x_{m+1}, \ldots, x_n$.

Функцию f, принадлежащую к классу $W^{(\rho', \rho'')}_{p' (G'), p'' (G'')}$, можно продолжить за G на R_n так, что продолженная функция $\bar{f}$ будет принадлежать к классу $W^{(\rho', \rho'')}_{p' (R_m), p'' (R_{n-m})}$, будет равна нулю вне некоторого n-мерного шара и будет выполняться неравенство:

$$\|\bar{f}\|^{(\rho', \rho'')}_{W_{p' (R_m), p'' (R_{n-m})}} < c \|f\|^{(\rho', \rho'')}_{W_{p' (G'), p'' (G'')}},$$

где c — константа, не зависящая от рядом стоящего множителя. При этом если функция f была ограничена на G константой K, то продолженная функция будет ограничена константой cK, где c не зависит от K.

Доказательства этого утверждения мы не будем приводить, так как оно представляет собой небольшое усложнение доказательства теоремы о продолжении классов $W^{(\rho)}_p (G)$ [см. ([13]), ([14]), ([15]), ([2])].

Нетрудно видеть, что

$$W^{(\rho', \rho'')}_{p' (R_m), p'' (R_{n-m})} \subset H^{(r_1, \ldots, r_n)}_{p_1, \ldots, p_n},$$

где

$$p' = p_1 = \cdots = p_m, \quad p'' = p_{m+1} = \cdots = p_n,$$

$$\rho' = r_1 = \cdots = r_m, \quad \rho'' = r_{m+1} = \cdots = r_n,$$

и при этом выполняется неравенство:

$$\|\bar{f}\|^{(r_1, \ldots, r_n)}_{L_{p_1, \ldots, p_n}} < c_1 \|\bar{f}\|^{(\rho', \rho'')}_{W_{p'(R_m), p''(R_{n-m})}},$$

где c_1 — константа, не зависящая от рядом стоящего множителя.

Подобные факты, конечно, имеют место в случае, когда область G есть топологическое произведение не двух, а нескольких областей.

4.2. Рассмотрим еще один простейший пример. Пусть множество $\mathscr{E}$ состоит из функций f, определенных на параллелепипеде $G = \{a_i \leqslant x_i \leqslant \leqslant b_i,\ i = 1, \ldots, n\}$, ограниченных на нем и таких, что для них выполняется неравенство (1) п. 1.1. Так как G есть топологическое произведение отрезков $[a_i, b_i]$, то на основании сказанного выше можно утверждать, что функции $f \in \mathscr{E}$ можно продолжить на R_n так, что продолженные функции $\bar{f}$ будут удовлетворять неравенству

$$\|\bar{f}\|_{L^{(n)}_{p_i}} + \int\limits_{R_n} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial^{r_i} \bar{f}}{\partial x_i^{r_i}} \right| dR_n < M_1, \tag{1}$$

где M_1 — константа. Легко видеть, что функции $\bar{f}$ будут принадлежать также пространству $H^{(r_1, \ldots, r_n)}_{p_1, \ldots, p_n}$ [см. ([11]), лемма 3], и их нормы, в смысле этого пространства, будут ограниченными:

$$\|\bar{f}\|^{(r_1, \ldots, r_n)}_{L_{p_1, \ldots, p_n}} \leqslant M_r.$$

Допустим теперь, что выполняется неравенство

$$1-\sum_{1}^{n}\frac{1}{p_l r_l}>0.$$

Применим теорему п. 2.4, полагая $q=\infty$. Имеем:

$$\varkappa=1-\sum_{1}^{n}\frac{1}{p_l r_l}>0,$$

$$\varkappa_i=\varkappa+\frac{1}{p_i}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{r_l}>0 \quad (i=1,\ldots,n).$$

Таким образом,

$$\rho_i=\frac{r_i\varkappa}{\varkappa_i}>0 \quad (i=1,\ldots,n),$$

и условия теоремы п. 2.4 соблюдаются. Поэтому можно утверждать, что функции $\bar{f}$, продолжающие функции f множества $\mathcal{E}$, принадлежат классу $H_{\infty}^{(\rho_1,\ldots,\rho_n)}$ и при этом

$$\|\bar{f}\|_{L_{\infty}^{(n)}}^{(\rho_1,\ldots,\rho_n)}<c\|\bar{f}\|_{L_{p_1,\ldots,p_n}^{(n)}}^{(r_1,\ldots,r_n)}\leqslant M_2.$$

Это означает, в частности, что $\mathcal{E}$ есть ограниченное и равностепенно непрерывное множество.

4.3. Отметим, наконец, что можно рассматривать классы $H_{p_1,\ldots,p_n}^{*(r_1,\ldots,r_n)}$ периодических (периода 2π) по каждой переменной x_i $(i=1,\ldots,n)$ функций, где нормы функции исчисляются по периоду. Для этих классов можно получить полную теорию, аналогичную изложенной нами для классов $H_{p_1,\ldots,p_n}^{(r_1,\ldots,r_n)}$. Роль целых функций конечной степени здесь будут играть тригонометрические полиномы $T_{\nu_1,\ldots,\nu_n}$ порядков ν_i соответственно по x_i $(i=1,\ldots,n)$. В частности, в теореме о компактности в равенстве (2) надо считать $G=\{0\leqslant x_i\leqslant 2\pi;\ i=1,\ldots,n\}$.

Поступило
17. VI. 1957

ЛИТЕРАТУРА

[1] Аманов Т. И., Граничные функции классов $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}$ и $H_{p^*}^{(r_1,\ldots,r_n)}$, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 19 (1955), 17—32.

[2] Бабич Б. М., К вопросу о распространении функций, Успехи матем. наук, VIII, вып. 2 (54) (1953), 111—113.

[3] Бари Н. К., Обобщение неравенств С. Н. Бернштейна и А. А. Маркова, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 18 (1954), 159—176.

[4] Бернштейн С. Н., О свойствах однородных функциональных классов, Доклады Ак. наук СССР, 57 (1947), 111—114.

[5] Бернштейн С. Н., О наилучшем приближении функций нескольких переменных посредством многочленов или тригонометрических сумм, Труды Матем. ин-та им. Стеклова Ак. наук СССР, XXXVIII (1951), 24—25.

[6] Jackson D., The theory of approximation, New York, 1930.

[7] Gagliardo E., Un criterio di equale continuita per funzioni di due variabili, Universita di Genova. Publicazioni dell Istituto di matematica, 28 (1956), 148—167.

[8] Ибрагимов И. И., Экстремальные задачи в классе целых функций экспоненциального типа, Успехи матем. наук, вып. 3(75) (1957), 323—328.

[9] Кондрашов В. И., О некоторых свойствах функций из пространств L_p, Доклады Ак. наук СССР, 48 (1945), 563—566.

[10] Никольский С. М., Некоторые неравенства для целых функций конечной степени многих переменных и их применение, Доклады Ак. наук СССР, 76 (1951), 785—788.

[11] Никольский С. М., Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных, Труды Матем. ин-та им. Стеклова Ак. наук СССР, XXVIII (1951), 244—278.

[12] Никольский С. М., Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях, Матем. сборн., 33(75):2(1953), 261—326.

[13] Никольский С. М., К вопросу о решении полигармонического уравнения вариационным методом, Доклады Ак. наук СССР, 88 (1953), 409—411.

[14] Никольский С. М., Компактность классов $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}$ функций многих переменных, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 20 (1956), 611—622.

[15] Никольский С. М., О продолжении функций многих переменных с сохранением дифференциальных свойств, Матем. сборн., 40 (82):2 (1956), 243—268.

[16] Соболев С. Л., Об одной теореме функционального анализа, Матем. сборн., 4(46):3 (1938), 471—497.

[17] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа, издание ЛГУ, 1950.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 337—354

В. К. ДЗЯДЫК

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ОБЫКНОВЕННЫМИ МНОГОЧЛЕНАМИ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

(*Представлено академиком* **М. А. Лаврентьевым**)

В работе вводятся в рассмотрение некоторые ядра $D_{nk}(x)$, при помощи которых указывается способ построения для каждой непрерывной функции, заданной на сегменте $[a, b]$, последовательностей многочленов, позволяющих осуществить дальнейшее исследование в направлении, впервые указанном С. М. Никольским (7) и затем развитом в работах А. Ф. Тимана (8), (9) и автора (4).

Цель работы:

1) дать конструктивную характеристику квазигладких и гладких функций,

2) дать простое доказательство теоремы А. Ф. Тимана [см. (9)],

3) дать простое доказательство теоремы Вейерштрасса.

§ 1. Определение и простейшие свойства ядер $D_{nk}(x)$

Целый ряд результатов, касающихся приближения непрерывных функций $f(x)$, заданных на сегменте $[a, b]$ (соответственно на периоде $[0, 2\pi]$), при помощи обыкновенных (соответственно тригонометрических) многочленов, получен путем использования того факта, что

1. Функция

$$F_n(x) = \int_a^b f(t)\, D_n(t-x)\, dt = \int_{a-x}^{b-x} f(x+t)\, D_n(t)\, dt$$

(соответственно $F_n(x) = \int_0^{2\pi} f(x+t)\, D_n(t)\, dt$) при подходящем выборе ядра $D_n(t)$ хорошо приближает в метрике C всякую непрерывную функцию $f(x)$ (в периодическом случае это верно при условии, что $f(2\pi) = f(0)$).

2. Если $D_n(t)$ есть многочлен (обыкновенный или тригонометрический), то и $F_n(x)$ также является многочленом. Поэтому тот или иной выбор последовательности «многочленных» ядер $\{D_n(t)\}$ ставит в соответствие заданной функции $f(x)$ ту или иную последовательность многочленов $F_n(x)$.

В периодическом случае довольно хорошо исследована, в частности, последовательность ядер вида

$$\widetilde{D}_{nk}(t)=\frac{1}{\widetilde{\gamma}_{nk}}\left(\frac{\sin n\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^{2k},\quad t\in(-\infty,\infty), \tag{1.1}$$

где k — фиксированное целое число $\geqslant 1$,

$$\widetilde{\gamma}_{nk}=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^{2k}dt,\quad n=1,2,3,\ldots .$$

Нас будут интересовать следующие свойства этих ядер:

a) ядро $\widetilde{D}_{nk}(t)$ является четным положительным тригонометрическим полиномом порядка $k(n-1)$ и, таким образом, есть сумма вида:

$$\sum_{i=0}^{k(n-1)} a_i\cos it=\sum_{i=0}^{k(n-1)}\alpha_i\cos^i t; \tag{*}$$

$$\text{b)}\ \widetilde{\gamma}_{nk}=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin n\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^{2k}dt=4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{n}}\left(\frac{\sin nu}{\sin u}\right)^{2k}du+4\int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nu}{\sin u}\right)^{2k}du=$$

$$=\dot{O}\,(n^{2k-1}), \tag{1.2}$$

причем через $A=\dot{O}(\alpha)$ $[A=A(\alpha)]$ мы условимся обозначать тот факт, что при всех α $C_1\alpha<A<C_2\alpha$, где C_1 и C_2 — положительные постоянные, т. е. что $A=O(\alpha)$ и в то же время $A\neq o(\alpha)$;

c) при всяком фиксированном δ, удовлетворяющем условию $0<\delta<\pi$,

$$\int\limits_{\delta}^{\pi}\widetilde{D}_{nk}(t)\,dt=\frac{1}{\widetilde{\gamma}_{nk}}\int\limits_{\delta}^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^{2k}dt=\frac{1}{\widetilde{\gamma}_{nk}}O\left(\frac{1}{\delta^{2k-1}}\right)=O\left[\frac{1}{(n\delta)^{2k-1}}\right]; \tag{1.3}$$

$$\text{d)}\ \int\limits_{-\pi}^{\pi}\widetilde{D}_{nk}(t)\,dt=1,\quad \frac{1}{\widetilde{\gamma}_{nk}}\int\limits_{0}^{\pi}\widetilde{D}_{nk}(t)\,t^i\,dt=\frac{1}{\widetilde{\gamma}_{nk}}\int\limits_{0}^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^{2k}t^i\,dt=$$

$$=\frac{1}{\widetilde{\gamma}_{nk}}\dot{O}\,(n^{2k-i-1})=\dot{O}\left(\frac{1}{n^i}\right),\quad 1\leqslant i\leqslant 2k-2. \tag{1.4}$$

Пользуясь этими фактами, введем в рассмотрение при данном фиксированном целом $k\geqslant 1$ ядра $D_{nk}(x)$, $n=1,2,3,\ldots$, положив

$$D_{nk}(x)=\frac{1}{\gamma_{nk}}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}n\arccos\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}{\sin\frac{1}{2}\arccos\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}\right)^{2k},\quad x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}],\ n=1,2,\ldots, \tag{1.1'}$$

где

$$\gamma_{nk}=\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}n\arccos\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}{\sin\frac{1}{2}\arccos\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}\right)^{2k}dx,$$

и докажем, что эти ядра при всех $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ являются обычными многочленами, обладающими свойствами, аналогичными свойствам ядер $\widetilde{D}_{nk}(t)$ в промежутке $[-\pi, \pi]$. Действительно:

a) ядро $D_{nk}(x)$ при всех $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ получается из ядра $\widetilde{D}_{nk}(t)$ при помощи замены в $(*)$ $\cos t$ на $1-\frac{x^2}{2}$ и потому является четным положительным многочленом степени $2k(n-1)$;

b) в силу подстановки $1-\frac{x^2}{2}=\cos t$, $x=\sqrt{2(1-\cos t)}=2\sin\frac{t}{2}$,

$$\gamma_{nk}=\int_{-1}^{1}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}n\arccos\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}{\sin\frac{1}{2}\arccos\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}\right)^{2k}dx=$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^{2k}\cos\frac{t}{2}\,dt=\dot{O}\left(n^{2k-1}\right); \qquad (1.2')$$

c) при всяком фиксированном δ, удовлетворяющем условию $0<\delta<1$,

$$\int_{\delta}^{\sqrt{2}}D_{nk}(x)\,dx=\frac{1}{\gamma_{nk}}\int_{\arccos\left(1-\frac{\delta^2}{2}\right)}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^{2k}\cos\frac{t}{2}\,dt=O\left[\left(\frac{1}{n\delta}\right)^{2k-1}\right], \quad (1.3')$$

ибо

$$\arccos\left(1-\frac{\delta^2}{2}\right)\approx\delta;$$

d) $\int_{-1}^{1}D_{nk}(x)\,dx=1,$

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}D_{nk}(x)\,|x|^i\,dx=\frac{2}{\gamma_{nk}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^{2k}2^i\sin^i\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\,dt=\dot{O}\left(\frac{1}{n^i}\right) \qquad (1.4')$$

при всех i, удовлетворяющих условию $0<i\leqslant 2k-2$.

e) Так как

$$\left(\frac{\sin\frac{1}{2}n\arccos\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}{\sin\frac{1}{2}\arccos\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}\right)^2=\frac{1-\cos n\arccos\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}{1-\cos\arccos\left(1-\frac{x^2}{2}\right)},$$

то мы видим, что многочлены

$$\gamma_{nk}D_{nk}(x)=[\gamma_{n1}D_{n1}(x)]^k$$

выражаются через многочлены Чебышева $T_n(x)=\cos n\arccos x$ по формуле:

$$[\gamma_{nk}D_{nk}(x)]^{\frac{1}{k}}=\gamma_{n1}D_{n1}(x)=2\,\frac{1-T_n\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}{x^2}; \qquad (1.5)$$

f) учитывая теперь, что при каждом $n=1, 2, \ldots$

$$T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x),$$

получаем:

$$\gamma_{n1}D_{n1}(x) = 2\frac{1-2\left(1-\frac{x^2}{2}\right)T_{n-1}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)+T_{n-2}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}{x^2} =$$

$$= 2\frac{2\left[1-T_{n-1}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\right]}{x^2} - 2\frac{1-T_{n-2}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}{x^2} +$$

$$+ 2T_{n-1}\left(1-\frac{x^2}{2}\right) = 2\gamma_{n-1,1}D_{n-1,1}(x) - \gamma_{n-2,1}D_{n-2,1}(x) +$$

$$+ 2\left[1-\frac{x^2}{2}\gamma_{n-1,1}D_{n-1,1}(x)\right] = (2-x^2)\gamma_{n-1,1}D_{n-1,1}(x) -$$

$$- \gamma_{n-2,1}D_{n-2,1}(x) + 2.$$

Отсюда видно, что для определения многочленов $\gamma_{n1}D_{n1}(x)$ имеет место следующее рекуррентное соотношение:

$$\gamma_{n1}D_{n1}(x) = (2-x^2)\gamma_{n-1,1}D_{n-1,1}(x) - \gamma_{n-2,1}D_{n-2,1}(x) + 2. \qquad (1.6)$$

И так как в силу (1.1′) и (1.5) легко видеть, что

$$\gamma_{11}D_{11}(x) = 1, \quad \gamma_{21}D_{21}(x) = -x^2 + 4,$$

то, пользуясь (1.6), находим:

$$\gamma_{31}D_{31}(x) = x^4 - 6x^2 + 9, \quad \gamma_{41}D_{41}(x) = -x^6 + 8x^4 - 20x^2 + 16$$

и т. д.

Из этих свойств особенно ценным для нас (как это будет видно в дальнейшем) является свойство d). Именно этим свойством ядра $D_{nk}(x)$ отличаются от ядер Ландау $\Omega_n(x)$:

$$\Omega_n(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots.2n}(1-x^2)^n = \frac{(1-x^2)^n}{\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx}$$

[см. ([3]), стр. 206 или ([2]), стр. 113—114], для которых, как это легко проверить,

$$\int\limits_{-1}^{1}\Omega_n(x)\,|x|^i\,dx = \dot{O}\left[\frac{1}{(\sqrt{n})^i}\right].$$

Благодаря этому же свойству, использование многочленов $D_{nk}(x)$ в качестве ядер дает возможность почти автоматически перенести большинство результатов аппроксимативного характера, известных для сумм Фейера, на приближение функций обыкновенными многочленами, построенными исходя из ядер $D_{nk}(x)$. Остальные свойства ядер $D_{nk}(x)$ дают возможность получить, исходя из них, большинство результатов, имеющихся в книге ([2]) (стр. 113—124).

§ 2. О конструктивной характеристике квазигладких и гладких функций

1°. Непрерывная функция $f(x)$, заданная на сегменте $[a, b]$, называется квазигладкой на этом сегменте, если для всех $x \in (a, b)$ и $h > 0$ таких, что $x-h$ и $x+h \in [a, b]$, имеет место неравенство

$$|\Delta_h^2 f(x)| = |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leqslant Kh, \qquad (2.1)$$

где K — постоянная. Так как величина $\Delta_h^2 f(x)$ не изменяется, если к $f(x)$ прибавить (или вычесть) какую-нибудь линейную функцию, то при изучении квазигладких функций достаточно ограничиться функциями, которые в конце промежутка $[a, b]$ принимают значения, равные нулю: $f(a) = f(b) = 0$. Кроме того, не уменьшая общности, можно ограничиться случаем, когда $a = 0, b = 1$.

2°. Известно [см., например, (1), стр. 180—183], что функция

$$v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^k} \cos(a^k x)$$

при целом нечетном $a > 1$ является квазигладкой и в то же время не принадлежит классу Lip 1. Так как эта функция является довольно сложной (функция $v(x)$, как известно, не имеет производной ни при одном значении x), то мы приведем здесь другой пример часто встречающейся простейшей квазигладкой функции, не принадлежащей классу Lip 1. Таким примером является функция

$$\alpha(x) = \begin{cases} x \ln x, & \text{если } x \in (0, 1], \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Действительно, если $x \in (0, 1)$ и $h > 0$ взято так, что точки $x - h$ и $x + h \in [0, 1]$, то тогда

$$|\alpha(x+h) - 2\alpha(x) + \alpha(x-h)| = \left| \int_{x-h}^{x} [\alpha'(t+h) - \alpha'(t)]\, dt \right| =$$

$$= \left| \int_{x-h}^{x} [\ln(t+h) - \ln t]\, dt \right| = \left| \int_{x-h}^{x} \ln \frac{t+h}{t}\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{0}^{h} \ln \frac{t+h}{t}\, dt \right| = (t+h)\ln(t+h)\Big|_0^h - t \ln t \Big|_0^h =$$

$$= 2h \ln(2h) - 2h \ln h = (\ln 4) \cdot h,$$

т. е.

$$|\alpha(x+h) - 2\alpha(x) + \alpha(x-h)| \leqslant K \cdot h,$$

где $K = \ln 4$. Постоянная $\ln 4$ является здесь, очевидно, точной. Отметим в связи с этим, что исследование асимптотических значений наилучших приближений функций вида $x^s \ln^m x$ $(s > 0, m > 0)$ имеется в работе И. И. Ибрагимова (5).

3°. В дальнейшем нам потребуются следующие леммы.

ЛЕММА 1. *Если функция $f(x)$, заданная в промежутке $[0, 1]$, является квазигладкой и удовлетворяет условию $f(0) = f(1) = 0$, то она останется квазигладкой и после нечетного продолжения на сегмент $[-1, 1]$.*

Доказательство леммы 1 было дано А. Ф. Тиманом и автором в работе (10). Мы приведем здесь иное, совершенно простое доказательство.

В самом деле, пусть функция $f(x)$ удовлетворяет на $[0, 1]$ условию (2.1) и пусть

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in [0, 1]; \\ -f(-x), & \text{если } x \in [-1, 0]. \end{cases}$$

Тогда в единственно интересном случае, когда не все три точки $x-h$, x и $x+h$ попадают на сегмент $[0, 1]$ (или на $[-1, 0]$), например, когда x и $x+h \in [0,1]$, а $x-h \in [-1, 0)$ (в этом случае, очевидно, $x<h$), получим:

$$\Delta_h^2 F(x) = F(x+h) - 2F(x) + F(x-h) = f(x+h) - 2f(x) - f(h-x) =$$

$$= f(x+h) - 2f(h) + f(h-x) - 2\left[f(h-x) - 2f\left(\frac{h}{2}\right) + f(x)\right] +$$

$$+ 2\left[f(h) - 2f\left(\frac{h}{2}\right) + f(0)\right].$$

Отсюда и следует, что при всех $x \in (-1, 1)$ и всех $h>0$ таких, что $x-h$ и $x+h \in [-1, 1]$, имеем:

$$|\Delta_h^2 F(x)| \leqslant K\left(x + 2\left|x - \frac{h}{2}\right| + 2\frac{h}{2}\right) \leqslant (3K)\cdot h.$$

Этим лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. *При каждом целом $r \geqslant 0$ существует единственная пара многочленов $\pi_r^0(x)$ и $\pi_r^1(x)$ степени $\leqslant 2r+1$ вида*

$$\pi_r^0(x) = x^{r+1}(a_0x^r + a_1x^{r-1} + \cdots + a_{r-1}x + a_r), \tag{2.2}$$

$$\pi_r^1(x) = (1-x)^{r+1}(b_0x^r + b_1x^{r-1} + \cdots + b_{r-1}x + b_r) \tag{2.2'}$$

таких, что

$$\pi_r^0(x) + \pi_r^1(x) \equiv 1. \tag{2.3}$$

Действительно, приравнивая нулю коэффициенты при $x^0, x^1, x^2, \ldots, x_r$ в тождестве

$$\pi_r^0(x) + \pi_r^1(x) - 1 = (1 - C_{r+1}^1 x + C_{r+1}^2 x^2 - C_{r+1}^3 x^3 + \cdots +$$

$$+ (-1)^{r+1}x^{r+1})(b_0x^r + b_1x^{r-1} + \ldots + b_{r-1}x + b_r) +$$

$$+ x^{r+1}(a_0x^r + a_1x^{r-1} + \ldots + a_{r-1}x + a_r) - 1 \equiv 0, \tag{**}$$

получим следующую систему из $r+1$ уравнений для определения коэффициентов $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{r-1}, b_r$:

$$\begin{aligned}
&b_r && = 1,\\
&C_{r+1}^1 b_r - b_{r-1} && = 0,\\
&C_{r+1}^2 b_r - C_{r+1}^1 b_{r-1} + b_{r-2} && = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots && \\
&C_{r+1}^r b_r - C_{r+1}^{r-1} b_{r-1} + C_{r+1}^{r-2} b_{r-2} - \cdots + (-1)^r b_0 && = 0.
\end{aligned}$$

Так как детерминант этой системы равен

$$(-1)^{\left[\frac{r+1}{2}\right]} \neq 0,$$

то эта система всегда совместна. Определив из нее значения $b_0, b_1, b_2, \ldots$ $\ldots, b_{r-1}, b_r$ и подставив их в тождество (**), без труда найдем значения $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, a_r$.

Лемма 2 полностью доказана.

Замечание. Сам факт существования многочленов

$$P_1(x) = a_0x^r + a_1x^{r-1} + \cdots + a_{r-1}x + a_r$$

и

$$P_2(x) = b_0x^r + b_1x^{r-1} + \cdots + b_{r-1}x + b_r$$

таких, что

$$x^{r+1}P_1(x) + (1-x)^{r+1}P_2(x) \equiv 1,$$

вытекает из того обстоятельства, что многочлены x^{r+1} и $(1-x)^{r+1}$ являются взаимно простыми [см. ([11]), стр. 180—181].

4°. ТЕОРЕМА 1.* *Пусть на сегменте* $[a, b]$ *задана функция* $f(x)$, *имеющая* r*-ю* (r — *целое* $\geqslant 0$) *производную* $f^{(r)}(x)$, *являющуюся квазигладкой:*

$$|f^{(r)}(x+h) - 2f^{(r)}(x) + f^{(r)}(x-h)| \leqslant Kh, \quad h > 0,$$
$$x-h, x, x+h \in [0, 1], \quad K = \text{const}. \tag{2.4}$$

Тогда для этой функции при каждом $n = 1, 2, 3, \ldots$ *можно построить обыкновенный многочлен* $P_n(x)$ *степени не выше* n *такой, что при каждом* $x \in [a, b]$ *будет иметь место неравенство:*

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{C}{n^{r+1}}\left(\sqrt{(b-x)(x-a)} + \frac{1}{n}\right)^{r+1}, \tag{2.5}$$

где C — *постоянная, которая зависит от* K, r *и длины сегмента* $[a, b]$, *но не зависит от* n **.

Доказательство. Ограничимся случаем, когда функция $f(x)$ задана в промежутке $[0, 1]$, и будем считать, что $f(0) = f(1) = 0$. Доказательство проведем по индукции.

I. Пусть $r = 0$, т. е. пусть

$$|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leqslant Kh. \tag{2.4'}$$

Введем вспомогательную функцию

$$g(x) = f(1-x). \tag{2.6}$$

---

* Эта теорема служит обобщением на квазигладкие функции результатов, полученных для функций класса Lip 1 С. М. Никольским [см. ([7]), стр. 309] и А. Ф. Тиманом (см. теорему 4).

** Замечание при корректуре. После того как настоящая работа была сдана в печать, мною было обнаружено, что при помощи проводимых в этом параграфе рассуждений можно доказать, что имеет место следующая более общая

Теорема 1'. *Если функция* $f(x)$, *заданная на сегменте* $[a, b]$, *имеет там* r*-ю* (r — *целое* $\geqslant 0$) *непрерывную производную* $f^{(r)}(x)$, *то для этой функции при любом* $n = 1, 2, \ldots$ *можно построить обыкновенный многочлен* $P_n(x)$ *степени не выше* n *такой, что при каждом* $x \in [a, b]$ *будет иметь место неравенство*

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{C}{n^r}\left(\sqrt{(b-x)(x-a)} + \frac{1}{n}\right)^r \left[\omega_2^{(r)}\left(\frac{\sqrt{(b-x)(x-a)}}{n}\right) + \omega_2^{(r)}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right], \tag{2.5'}$$

где $\omega_2^{(r)}(h)$ — *модуль гладкости производной* $f^{(r)}(x)$:

$$\omega_2^{(r)}(h) = \sup_{|x_2-x_1|\leqslant h} \left|f^{(r)}(x_1) - 2f^{(r)}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + f^{(r)}(x_2), \right|, \quad x_1, x_2 \in [a, b].$$

Эта теорема, очевидно, усиливает доказываемую ниже теорему 5 А. Ф. Тимана.

Эта функция, очевидно, тоже будет квазигладкой на $[0, 1]$. Продолжим после этого, пользуясь леммой 1, каждую из функций $f(x)$ и $g(x)$ вправо от точки $x = 1$ на сегмент $[0, 4]$ так, чтобы вновь полученные функции были тоже квазигладкими. Продолженные функции будем по-прежнему обозначать через $f(x)$ и $g(x)$ и будем считать, что они на $[0, 4]$ удовлетворяют условию (2.4') с константой $K = 1$ (от этого мы, очевидно, ничего в общности не потеряем).

Отправляясь от функции $f(x)$, построим две вспомогательные функции:

$$\varphi(x) = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} f(x^2 + 9u^2) D_{nk}(u)\, du = 2\int_0^{\frac{1}{3}} f(x^2 + 9u^2) D_{nk}(u)\, du$$

и

$$\psi(x) = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} f\left(x^2 + \frac{9}{2}u^2\right) D_{nk}(u)\, du = 2\int_0^{\frac{1}{3}} f\left(x^2 + \frac{9}{2}u^2\right) D_{nk}(u)\, du,$$

где k — какое-нибудь фиксированное число $\geqslant 2$. Кроме того, построим два четных многочлена $P_1(x^2)$ и $P_2(x^2)$ степени $\leqslant 2k(n-1)$:

$$P_1(x^2) = \frac{1}{6}\int_{-2}^{2} f(u^2)\left[D_{nk}\left(\frac{u+x}{3}\right) + D_{nk}\left(\frac{u-x}{3}\right)\right] du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{-2+x}{3}}^{\frac{2+x}{3}} f[(x-3u)^2]\, D_{nk}(u)\, du + \frac{1}{2}\int_{\frac{-2-x}{3}}^{\frac{2-x}{3}} f[(x+3u)^2]\, D_{nk}(u)\, du =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} \{f[(x+3u)^2] + f[(x-3u)^2]\}\, D_{nk}(u)\, du + O\left(\frac{1}{n^{2k-1}}\right)$$

и

$$P_2(x^2) = \frac{\sqrt{2}}{6}\int_{-2}^{2} f(u^2)\left[D_{nk}\left(\frac{u+x}{3}\sqrt{2}\right) + D_{nk}\left(\frac{u-x}{3}\sqrt{2}\right)\right] du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{(-2+x)\frac{\sqrt{2}}{3}}^{(2+x)\frac{\sqrt{2}}{3}} f\left[\left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2}u\right)^2\right] D_{nk}(u) du +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{(-2-x)\frac{\sqrt{2}}{3}}^{(2-x)\frac{\sqrt{2}}{3}} f\left[\left(x + \frac{3\sqrt{2}}{2}u\right)^2\right] D_{nk}(u)\, du =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} \left\{f\left[\left(x + \frac{3\sqrt{2}}{2}u\right)^2\right] + f\left[\left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2}u\right)^2\right]\right\} D_{nk}(u)\, du + O\left(\frac{1}{n^{2k-1}}\right).$$

Тогда, учитывая, что вследствие (1.4'),

$$f(x^2) = \int_{-1}^{1} f(x^2)\, D_{nk}(u)\, du,$$

мы, в силу (1.3′) и (1.4′), получим:

$$1)\ |f(x^2)-2\psi(x)+\varphi(x)|=$$

$$=\Big|\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}\Big[f(x^2)-2f\Big(x^2+\frac{9}{2}u^2\Big)+f(x^2+9u^2)\Big]D_{nk}(u)\,du+\int_{-1}^{-\frac{1}{3}}+$$

$$+\int_{\frac{1}{3}}^{1}f(x^2)D_{nk}(u)\,du\Big|\leqslant\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}\frac{9}{2}u^2D_{nk}(u)\,du+$$

$$+2f(x^2)\int_{\frac{1}{3}}^{1}D_{nk}(u)\,du=O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)+O\Big(\frac{1}{n^{2k-1}}\Big)=O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),\qquad(2.7)$$

$$2)\ |-\varphi(x)+P_1(x^2)|=$$

$$=\Big|\int_0^{\frac{1}{3}}[f(x^2+6xu+9u^2)-2f(x^2+9u^2)+f(x^2-6xu+9u^2)]D_{nk}(u)\,du+$$

$$+O\Big(\frac{1}{n^{2k-1}}\Big)\Big|\leqslant6x\int_0^{\frac{1}{3}}uD_{nk}(u)\,du+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)=O\Big(\frac{x}{n}+\frac{1}{n^2}\Big),\qquad(2.8)$$

$$3)\ |-\psi(x)+P_2(x^2)|=\Big|\int_0^{\frac{1}{3}}\Big[f\Big(x^2+3\sqrt{2}xu+\frac{9}{2}u^2\Big)-2f\Big(x^2+\frac{9}{2}u^2\Big)+$$

$$+f\Big(x^2-3\sqrt{2}\,xu+\frac{9}{2}u^2\Big)\Big]D_{nk}(u)\,du+O\Big(\frac{1}{n^{2k-1}}\Big)\Big|\leqslant$$

$$\leqslant3\sqrt{2}\,x\int_0^{\frac{1}{3}}uD_{nk}(u)\,du+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)=O\Big(\frac{x}{n}+\frac{1}{n^2}\Big).\qquad(2.9)$$

Вследствие неравенств (2.7), (2.8) и (2.9), имеем:

$$|f(x^2)-2P_2(x^2)+P_1(x^2)|\leqslant|f(x^2)-2\psi(x)+\varphi(x)|+2|\psi(x)-P_2(x^2)|+$$

$$+|-\varphi(x)+P_1(x^2)|\leqslant O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)+O\Big(\frac{x}{n}+\frac{1}{n^2}\Big)\leqslant\frac{L}{n}\Big(x+\frac{1}{n}\Big),$$

где L — постоянная. Поэтому, обозначая через $P_f(x^2)$ многочлен степени $\leqslant 2k(n-1)$,

$$P_f(x^2)=2P_2(x^2)-P_1(x^2),$$

для всех $x\in[0,1]$ будем иметь:

$$|f(x)-P_f(x)|\leqslant\frac{L}{n}\Big(\sqrt{x}+\frac{1}{n}\Big).\qquad(2.10)$$

Аналогично найдем для функции $g(x)$ [см. (2.6)] некоторый многочлен

$P_g(x)$ степени $\leqslant 2k(n-1)$ такой, что при всех $x \in [0, 1]$

$$|g(x) - P_g(x)| \leqslant \frac{L}{n}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{n}\right)$$

и, следовательно,

$$|f(x) - P_g(1-x)| = |g(1-x) - P_g(1-x)| \leqslant \frac{L}{n}\left(\sqrt{1-x} + \frac{1}{n}\right). \quad (2.10')$$

Поэтому, обозначая через $P(x)$ многочлен степени не выше $k(n-1) + 1 < kn = n_1$,

$$P(x) = (1-x)P_f(x) + xP_g(1-x),$$

для всех $x \in [0, 1]$, в силу (2.10) и (2.10′), будем иметь:

$$|f(x) - P(x)| \leqslant (1-x)|f(x) - P_f(x)| + x|f(x) - P_g(1-x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{L}{n}\left[(1-x)\sqrt{x} + \frac{1-x}{n} + x\sqrt{1-x} + \frac{x}{n}\right] \leqslant \frac{C}{n_1}\left(\sqrt{x(1-x)} + \frac{1}{n_1}\right),$$

где C — постоянная. Этим теорема для случая $r = 0$ доказана.

II. Пусть теорема верна при $i = r - 1$ и пусть функция $f(x)$ имеет на сегменте $[0, 1]$ r-ю производную $f^{(r)}(x)$, удовлетворяющую при всех $x \in (0, 1)$ и $h > 0$ таких, что $x - h$ и $x + h \in [0, 1]$, условию:

$$|f^{(r)}(x+h) - 2f^{(r)}(x) + f^{(r)}(x-h)| \leqslant Kh \quad (K = \text{const}). \quad (2.11)$$

Продолжим функцию $f(x)$ на сегмент $[0, 4]$ так, чтобы ее r-я производная $f^{(r)}(x)$ осталась квазигладкой. Для определенности будем считать, что функция $f(x)$ имеет в каждой точке сегмента $[0, 4]$ r-ю производную, удовлетворяющую (при всех $x \in (0,4)$ и $h > 0$ таких, для которых $x - h$ и $x + h \in [0,4]$) условию (2.11) с константой K, равной единице.

Тогда, в силу предполагаемой справедливости теоремы для случая $i = r - 1$, при каждом натуральном n существует многочлен $\bar{P}_n(x)$ степени $\leqslant n$ такой, что для всех $x \in [0, 1]$

$$|f'(x) - \bar{P}_n(x)| \leqslant \frac{C}{n^r}\left(\sqrt{x(4-x)} + \frac{1}{n}\right)^r < \frac{2^r C}{n^r}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{n}\right)^r, \quad (2.12)$$

где C — постоянная. Полагая

$$V_n(x) = \int_0^x \bar{P}_n(x)\,dx, \qquad f_1(x) = f(x) - V_n(x) \quad (2.13)$$

и, зафиксировав какое-нибудь $k \geqslant r + 2$, образуем четный многочлен $\bar{P}_0(x^2)$ степени $\leqslant 2k(n-1)$:

$$\bar{P}_0(x^2) = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} f_1(4u^2)\left\{D_{nk}\left(\frac{2u+x}{3}\right) + D_{nk}\left(\frac{2u-x}{3}\right)\right\}du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{-2+x}{3}}^{\frac{2+x}{3}} f_1[(x-3u)^2]\,D_{nk}(u)\,du + \frac{1}{2}\int_{\frac{-2-x}{3}}^{\frac{2-x}{3}} f_1[(x+3u)^2]\,D_{nk}(u)\,du.$$

Тогда, учитывая, что

$$f_1(x^2) = \int_{-1}^{1} f_1(x^2)\, D_{nk}(u)\, du,$$

в силу формулы конечных приращений и соотношений (2.12) и (2.13), получим для всех $x \in [0, 1]$:

$$|\overline{P}_0(x^2) - f_1(x^2)| = \Bigg| \frac{1}{2} \int_{\frac{-2-x}{3}}^{\frac{2-x}{3}} \{f_1[(x+3u)^2] - f_1(x^2)\}\, D_{nk}(u)\, du +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\frac{-2+x}{3}}^{\frac{2+x}{3}} \{f_1[(x-3u)^2] - f_1(x^2)]\} D_{nk}(u) du + O\left(\frac{1}{n^{2k-1}}\right) \Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int_0^{\frac{1}{3}} (6xu + 9u^2) \cdot |f'_1[(x \pm 3\theta u)^2]|\, D_{nk}(u)\, du + O\left(\frac{1}{n^{2k-1}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{r+1}C}{n^r} \int_0^1 (6xu + 9u^2)\left(x + 3u + \frac{1}{n}\right)^r D_{nk}(u)\, du + O\left(\frac{1}{n^{2r+2}}\right).$$

Принимая во внимание, что при произвольных $a > 0$, $b > 0$ и $s > 0$ имеет место неравенство

$$(a+b)^s < 2^s(a^s + b^s), \tag{2.14}$$

мы, в силу (1.4′) и (2.13), найдем, что при всех $x \in [0,1]$

$$|\overline{P}_0(x^2) - [f(x^2) - V_n(x^2)]| \leqslant \frac{LC}{n^r} \int_0^1 (6xu + 9u^2)\left(x^r + 3^r u^r + \frac{1}{n^r}\right) D_{nk}(u)\, du +$$

$$+ O\left(\frac{1}{n^{2r+2}}\right) \leqslant \frac{LC}{n^r} \sum_{i=0}^{r+1} C_i \frac{x^i}{n^{r+2-i}} + O\left(\frac{1}{n^{2r+2}}\right) \leqslant \frac{M}{n^{r+1}}\left(x + \frac{1}{n}\right)^{r+1},$$

где L, M и C_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, r+1)$ — постоянные.

Поэтому, обозначая через $P_0(x)$ многочлен степени $\leqslant k(n-1)$,

$$P_0(x) = \overline{P}_0(x) + V_n(x),$$

при всех $x \in [0, 1]$ будем иметь:

$$|f(x) - P_0(x)| \leqslant \frac{M}{n^{r+1}}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{n}\right)^{r+1}. \tag{2.15}$$

Полагая после этого (аналогично случаю I) $g(x) = f(1-x)$, мы сможем найти некоторый многочлен $P_1(x)$ степени $\leqslant k(n-1)$ такой, что

$$|g(x) - P_1(x)| \leqslant \frac{M}{n^{r+1}}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{n}\right)^{r+1}$$

и, следовательно,

$$|f(x) - P_1(1-x)| = |g(1-x) - P_1(1-x)| \leqslant \frac{M}{n^{r+1}}\left(\sqrt{1-x} + \frac{1}{n}\right)^{r+1}.$$

Поэтому, обозначая через $P(x)$ многочлен степени $\leqslant kn + r = n_1$,

$$P(x) = P_0(x)\,\pi_r^1(x) + P_1(1-x)\,\pi_r^0(x),$$

где $\pi_r^0(x)$ и $\pi_r^1(x)$ — многочлены (степени $\leqslant 2r+1$), удовлетворяющие условиям леммы 2, мы, в силу (2.2), (2.2′) и (2.3), при всех $x \in [0,1]$ будем иметь:

$$|f(x) - P(x)| = |f(x)[\pi_r^0(x) + \pi_r^1(x)] - P(x)| \leqslant |\pi_r^0(x)|\,|f(x) - P_1(1-x)| +$$
$$+ |\pi_r^1(x)|\,|f(x) - P_0(x)| \leqslant \frac{M}{n^{r+1}}\left\{L_0 x^{r+1}\left(\sqrt{1-x} + \frac{1}{n}\right)^{r+1} +\right.$$
$$\left.+ L_1(1-x)^{r+1}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{n}\right)^{r+1}\right\} \leqslant \frac{M_1}{n_1^{r+1}}\left(\sqrt{x(1-x)} + \frac{1}{n_1}\right)^{r+1},$$

где L_0, L_1 и M_1 — некоторые постоянные. Таким образом, теорема 1 имеет место и при $i = r$. Этим теорема 1 полностью доказана.

5°. В работе (4) нами была доказана следующая теорема (сформулированная там на стр. 640 для случая $a = -1$, $b = 1$):

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы функция $f(x)$, заданная в промежутке $[a, b]$, имела при некотором целом неотрицательном r производную r-го порядка $f^{(r)}(x)$, являющуюся квазигладкой, достаточно, чтобы для каждого $n = 1, 2, 3, \ldots$ нашелся многочлен $P_n(x)$ степени не выше n такой, чтобы для всех $x \in [a, b]$ выполнялось неравенство*

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{C}{n^{r+1}}\left[\sqrt{(x-a)(b-x)} + \frac{1}{n}\right]^{r+1},$$

где C — постоянная, не зависящая от n.

Из этой теоремы и теоремы 1 вытекает следующая основная в этом параграфе теорема 3, дающая конструктивную характеристику функций, имеющих квазигладкую r-ю производную.

ТЕОРЕМА 3. *Для того чтобы функция $f(x)$, заданная на сегменте $[a, b]$, имела при некотором целом неотрицательном r ($r = 0, 1, 2, \ldots$) квазигладкую производную r-го порядка $f^{(r)}(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого натурального n нашелся обыкновенный многочлен $P_n(x)$ степени не выше n такой, чтобы при всех $x \in [a, b]$ выполнялось неравенство*

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{C}{n^{r+1}}\left[\sqrt{(x-a)(b-x)} + \frac{1}{n}\right]^{r+1}, \tag{2.16}$$

где C — постоянная, не зависящая ни от x, ни от n.

6°. Пользуясь теоремой 2 и рассуждениями, проведенными при доказательстве теоремы 1 [см., в частности, неравенства (2.7), (2.8) и (2.9)], легко видеть, что имеет место также следующая

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы функция $f(x)$, заданная на сегменте $[a, b]$, имела при некотором целом неотрицательном r ($r = 0, 1, 2, \ldots$) гладкую производную r-го порядка $f^{(r)}(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого натурального n нашелся обыкновенный многочлен $P_n(x)$ степени не выше n такой, чтобы при всех $x \in [a, b]$ выполнялось условие:*

$$|f(x) - P_n(x)| = o\left\{\frac{1}{n^{r+1}}\left[\sqrt{(x-a)(b-x)} + \frac{1}{n}\right]^{r+1}\right\}. \tag{2.16′}$$

§ 3. Теорема А. Ф. Тимана*

В этом параграфе мы применим многочлены, которые можно построить для непрерывной функции $f(x)$ при помощи ядер $D_{nk}(x)$, для доказательства теоремы А. Ф. Тимана, которая существенно усиливает теорему Джексона о наилучшем приближении непрерывных функций многочленами на конечном отрезке вещественной оси.

ТЕОРЕМА 5 [А. Ф. Тиман (9)]. *Если функция $f(x)$, заданная на сегменте $[a, b]$, имеет там r-ю (r — целое $\geqslant 0$) непрерывную производную $f^{(r)}(x)$, то для этой функции при любом $n = 1, 2, \ldots$ можно построить обыкновенный многочлен $P_n(x)$ степени не выше n такой, что при каждом $x \in [a, b]$ будет иметь место неравенство:*

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{C}{n^r}\left(\sqrt{(x-a)(b-x)} + \frac{1}{n}\right)^r \cdot \left[\omega_r\left(\frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{n}\right) + \omega_r\left(\frac{1}{n^2}\right)\right], \tag{3.1}$$

где $\omega_r(h)$ — модуль непрерывности производной $f^{(r)}(x)$:

$$\omega_r(h) = \sup_{|x_2 - x_1| \leqslant h} |f^{(r)}(x_2) - f^{(r)}(x_1)|, \quad x_1, x_2 \in [a, b]. \tag{3.2}$$

Доказательство. Ограничимся случаем, когда функция $f(x)$ задана на сегменте $[0,1]$.

I. Пусть $r = 0$. В этом случае

$$\omega_0(h) = \omega(h) = \sup_{|x_2 - x_1| \leqslant h} |f(x_2) - f(x_1)|, \quad x_1, x_2 \in [0,1].$$

Продолжим функцию $f(x)$ на сегмент $[0,4]$, положив

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in [0, 1], \\ f(1), & \text{если } x \in [1, 4], \end{cases} \tag{3.3}$$

и зафиксировав какое-нибудь натуральное $k \geqslant 2$, образуем четный многочлен $P_0(x^2)$ степени $\leqslant 2k(n-1)$:

$$P_0(x^2) = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \varphi(4u^2)\left\{D_{nk}\left(\frac{2u + x}{3}\right) + D_{nk}\left(\frac{2u - x}{3}\right)\right\} du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{-2+x}{3}}^{\frac{2+x}{3}} \varphi[(x - 3u)^2]\, D_{nk}(u)\, du + \frac{1}{2}\int_{\frac{-2-x}{3}}^{\frac{2-x}{3}} \varphi[(x + 3u)^2]\, D_{nk}(u)\, du.$$

Тогда, учитывая, что при $x \in [0,1]$

$$f(x^2) = \varphi(x^2) = \int_{-1}^{1} \varphi(x^2)\, D_{nk}(u)\, du,$$

* См. сноску** на стр. 343.

для всех $x \in [0,1]$ получим:

$$P_0(x^2) - f(x^2) = \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{-2-x}{3}}^{\frac{2-x}{3}} \{\varphi[(x+3u)^2] - \varphi(x^2)\} D_{nk}(u)\,du +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{-2+x}{3}}^{\frac{2+x}{3}} \{\varphi[(x-3u)^2] - \varphi(x^2)\} D_{nk}(u)\,du -$$

$$- \frac{1}{2} \left\{ \int\limits_{-1}^{\frac{-2-x}{3}} + \int\limits_{\frac{2-x}{3}}^{1} + \int\limits_{-1}^{\frac{-2+x}{3}} + \int\limits_{\frac{2+x}{3}}^{1} \varphi(x^2) D_{nk}(u)\,du \right\}.$$

Так как каждый из интегралов в фигурных скобках, в силу (1,3′), равен величине порядка $\frac{1}{n^{2k-1}}$, то

$$|f(x^2) - P_0(x^2)| \leqslant \int\limits_{-1}^{1} \omega(6x|u| + 9u^2) D_{nk}(u)\,du + O\left(\frac{1}{n^{2k-1}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 6 \int\limits_{0}^{1} [2\omega(xu) + 3\omega(u^2)] D_{nk}(u)\,du + O\left(\frac{1}{n^{2k-1}}\right),$$

причем $\omega(\alpha)$ обозначает модуль непрерывности функции $\varphi(x)$, а следовательно, и модуль непрерывности функции $f(x)$, ибо при $\alpha \in [0, 1]$ модули непрерывности функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, в силу (3.3), совпадают.

Принимая во внимание, что при всяком $\alpha > 0$

$$\omega(h) = \omega\left(\frac{1}{\alpha}\alpha h\right) \leqslant \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)\omega(\alpha h) \tag{3.4}$$

и что, таким образом,

$$\omega(xu) \leqslant (un+1)\,\omega\left(\frac{x}{n}\right), \qquad \omega(u^2) \leqslant (u^2n^2+1)\,\omega\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

мы, учитывая (1.4′), получим:

$$|f(x^2) - P_0(x^2)| \leqslant 12\omega\left(\frac{x}{n}\right) \int\limits_{0}^{1} (un+1) D_{nk}(u)\,du +$$

$$+ 18\omega\left(\frac{1}{n^2}\right) \int\limits_{0}^{1} (u^2n^2+1) D_{nk}(u)\,du + O\left(\frac{1}{n^{2k-1}}\right) \leqslant K_0\left[\omega\left(\frac{x}{n}\right) + \omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$(K_0 = \mathrm{const})$$

и, значит,

$$|f(x) - P_0(x)| \leqslant K_0\left[\omega\left(\frac{\sqrt{x}}{n}\right) + \omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]. \tag{3.5}$$

Аналогично, полагая

$$g(x) = f(1-x), \quad x \in [0, 1],$$

найдем некоторый многочлен $P_1(x^2)$ степени $\leqslant 2k(n-1)$ такой, что

$$|g(x)-P_1(x)|=|f(1-x)-P_1(x)|\leqslant K_1\left[\omega\left(\frac{\sqrt{x}}{n}\right)+\omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

и, следовательно,

$$|f(x)-P_1(1-x)|\leqslant K_1\left[\omega\left(\frac{\sqrt{1-x}}{n}\right)+\omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]. \qquad (3.5')$$

Поэтому, обозначив через $P(x)$ многочлен степени $\leqslant k(n-1)+1=n_1$,

$$P(x)=(1-x)P_0(x)+xP_1(1-x),$$

мы, принимая во внимание (3.4), (3.5) и (3,5′), получим:

$$|f(x)-P(x)|\leqslant(1-x)|f(x)-P_0(x)|-x|f(x)-P_1(1-x)|\leqslant$$
$$\leqslant K_0(1-x)\left[\omega\left(\frac{\sqrt{x}}{n}\right)+\omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]+K_1x\left[\omega\left(\frac{\sqrt{1-x}}{n}\right)+\omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\leqslant$$
$$\leqslant K\left[\omega\left(\frac{\sqrt{x(1-x)}}{n_1}\right)+\omega\left(\frac{1}{n_1^2}\right)\right],$$

где K — постоянная. Этим теорема для случая $r=0$ доказана.

II. Пусть теорема верна при $i=r-1$, и пусть функция $f(x)$ имеет на сегменте $[0,1]$ r-ю производную $f^{(r)}(x)$ с модулем непрерывности $\omega_r(h)$. Продолжим функцию $f(x)$ на сегмент $[0,4]$, положив

$$\varphi(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[0,1],\\ f(1)+\dfrac{x-1}{1}f'(1)+\dfrac{(x-1)^2}{2!}f''(1)+\cdots+\dfrac{(x-1)^r}{r!}f^{(r)}(1), & x\in[1,4].\end{cases}$$

Так как функция $\varphi(x)$ имеет на сегменте $[0,4]$ непрерывные производные до r-го порядка и при этом модуль непрерывности ее r-й производной $\varphi^{(r)}(x)$ будет при $h\in[0,1]$ совпадать с модулем непрерывности $\omega_r(h)$ функции $f^{(r)}(x)$, то, в силу предполагаемой справедливости теоремы для случая $i=r-1$, существует многочлен $\overline{P}_n(x)$ степени $\leqslant n$ такой, что

$$|\varphi'(x)-\overline{P}_n(x)|\leqslant\frac{C}{n^{r-1}}\left(\sqrt{x(4-x)}+\frac{1}{n}\right)^{r-1}\left[\omega_r\left(\frac{\sqrt{x(4-x)}}{n}\right)+\right.$$
$$\left.+\omega_r\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\leqslant\frac{2^rC}{n^{r-1}}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{n}\right)^{r-1}\left[\omega_r\left(\frac{\sqrt{x}}{n}\right)+\omega_r\left(\frac{1}{n^2}\right)\right], \qquad (3.7)$$

где C — постоянная. Положим после этого

$$V_n(x)=\int_0^x\overline{P}_n(x)\,dx, \quad \varphi_1(x)=\varphi(x)-V_n(x) \qquad (3.8)$$

и, зафиксировав какое-нибудь $k\geqslant r+2$, образуем четный многочлен $\overline{P}_0(x^2)$ степени $\leqslant 2k(n-1)$:

$$\overline{P}_0(x^2)=\frac{1}{2}\left\{\int_{\frac{-2-x}{3}}^{\frac{2-x}{3}}\varphi_1[(x+3u)^2]D_{nk}(u)du+\int_{\frac{-2+x}{3}}^{\frac{2+x}{3}}\varphi_1[(x-3u)^2]D_{nk}(u)\,du.\right.$$

Тогда аналогично случаю I, в силу формулы конечных приращений и соотношений (3.8) и (3.7), получим:

$$|\bar{P}_0(x^2) - \varphi_1(x^2)| = \left| \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{-2-x}{3}}^{\frac{2-x}{3}} \{\varphi_1[(x+3u)^2] - \varphi_1(x^2)\} D_{nk}(u)\,du + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{-2+x}{3}}^{\frac{2+x}{3}} \{\varphi_1[(x-3u)^2] - \varphi_1(x^2)\} D_{nk}(u)\,du + O\left(\frac{1}{n^{2k-1}}\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int\limits_0^1 (6xu + 9u^2) \cdot |\varphi_1'[(x \pm 3\theta u)^2]|\, D_{nk}(u)\,du + O\left(\frac{1}{n^{2k-1}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{r+1}C}{n^{r-1}} \int\limits_0^1 (6xu+9u^2)\left(x+3u+\frac{1}{n}\right)^{r-1}\left[\omega_r\left(\frac{x+3u}{n}\right) + \right.$$

$$\left. + \omega_r\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] D_{nk}(u)\,du + O\left(\frac{1}{n^{2k-1}}\right), \quad x \in [0,1].$$

Принимая во внимание неравенство (2.14) и соотношения (1.4), (3.8) и (3.6), найдем, что при всех $x \in [0,1]$

$$|\bar{P}_0(x^2) - [f(x^2) - V_n(x^2)]| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{r+1}2^{2r-2}C}{n^{r-1}} \int\limits_0^1 (6xu+9u^2)\left(x^{r-1} + 3^{r-1}u^{r-1} + \frac{1}{n^{r-1}}\right)\left[\omega_r\left(\frac{x}{n}\right) + \right.$$

$$\left. + 3(un+1)\,\omega_r\left(\frac{1}{n^2}\right) + \omega_r\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] D_{nk}(u)\,du + O\left(\frac{1}{n^{2k-1}}\right).$$

Отсюда, в силу (1.4′), вытекает, что

$$|f(x^2) - [\bar{P}_0(x^2) + V_n(x^2)]| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{3r}C}{n^{r-1}} \sum_{i=0}^{r} C_i \frac{x^i}{n^{r+1-i}}\left[\omega_r\left(\frac{x}{n}\right) + \omega_r\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] + O\left(\frac{1}{n^{2k-1}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{n^r}\left(x + \frac{1}{n}\right)^r \left[\omega_r\left(\frac{x}{n}\right) + \omega_r\left(\frac{1}{n^2}\right)\right],$$

где C_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, r)$ и M — постоянные.

Поэтому, обозначая через $P_0(x)$ многочлен степени $\leqslant k(n-1)$,

$$P_0(x) = \bar{P}_0(x) + V_n(x),$$

при всех $x \in [0, 1]$ будем иметь:

$$|f(x) - P_0(x)| \leqslant \frac{M}{n^r}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{n}\right)^r \left[\omega_r\left(\frac{\sqrt{x}}{n}\right) + \omega_r\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]. \tag{3.9}$$

Полагая после этого $g(x) = f(1-x)$, мы сможем найти некоторый многочлен $P_1(x)$ степени $\leqslant k(n-1)$ такой, что

$$|g(x) - P_1(x)| \leqslant \frac{M}{n^r}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{n}\right)^r \left[\omega_r\left(\frac{\sqrt{x}}{n}\right) + \omega_r\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

и, следовательно,

$$|f(x) - P_1(1-x)| = |g(1-x) - P_1(1-x)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M}{n^r}\left(\sqrt{1-x} + \frac{1}{n}\right)^r \left[\omega_r\left(\frac{\sqrt{1-x}}{n}\right) + \omega_r\left(\frac{1}{n^2}\right)\right].$$

Обозначая через $P(x)$ многочлен степени $\leqslant kn + r = n$,

$$P(x) = P_0(x)\pi_r^1(x) + P_1(1-x)\pi_r^0(x),$$

где $\pi_r^0(x)$ и $\pi_r^1(x)$ — многочлены степени $\leqslant 2r+1$, удовлетворяющие условиям леммы 2, мы, в силу (2.2), (2.2′) и (2.3), при всех $x \in [0,1]$ будем иметь:

$$|f(x) - P(x)| \leqslant |\pi_r^0(x)|\, |f(x) - P_1(1-x)| + |\pi_r^1(x)|\, |f(x) - P_0(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M}{n^r}\left\{L_0 x^{r+1}\left(\sqrt{1-x} + \frac{1}{n}\right)^r \left[\omega_r\left(\frac{\sqrt{1-x}}{n}\right) + \omega_r\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + L_1(1-x)^{r+1}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{n}\right)^r \left[\omega_r\left(\frac{\sqrt{x}}{n}\right) + \omega_r\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M_1}{n_1^r}\left(\sqrt{x(1-x)} + \frac{1}{n_1}\right)^r \left[\omega_r\left(\frac{\sqrt{x(1-x)}}{n_1}\right) + \omega_r\left(\frac{1}{n_1^2}\right)\right],$$

где L_0, L_1 и M — некоторые постоянные. Этим теорема полностью доказана.

В заключение этого параграфа отметим, что, как нами доказано в работе [4], условие теоремы 5, выраженное неравенством (3.1), для случая, когда $\omega_r(h) = h^\alpha$, является не только необходимым, но и достаточным для того, чтобы функция $f(x)$ имела при всех $x \in [a, b]$ r-ю (r — целое $\geqslant 0$) производную $f^{(r)}(x)$, принадлежащую классу $\mathrm{Lip}\,\alpha\ (0 < \alpha < 1)$.

§ 4. Теорема Вейерштрасса

ТЕОРЕМА 6 (Вейерштрасс). *Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен $P(x)$, что для всех значений $x \in [a, b]$ выполняется неравенство*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon. \tag{4.1}$$

Доказательство. Хотя эта теорема является следствием предыдущей, мы дадим для нее специальное доказательство. Ограничимся случаем, когда функция $f(x)$ задана на сегменте $[-1.1]$. Продолжим ее на сегмент $[-2,2]$, положив $f(x)$ равной $f(-1)$ влево от точки $x = -1$ и $f(x)=1$— вправо от точки $x = 1$. После этого выберем $\delta = \delta(\varepsilon)$ так, чтобы иметь:

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2},$$

если только $|x'' - x'| < 3\delta$, $x', x'' \in [-2,2]$, и определим многочлен $P(x)$ по формуле:

$$P(x) = \frac{1}{3}\int_{-2}^{2} f(u)\, D_{n1}\left(\frac{u-x}{3}\right) du = \int_{\frac{-2-x}{3}}^{\frac{2-x}{3}} f(x+3u)\, D_{n1}(u)\, du.$$

Тогда, учитывая, что

$$f(x) = \int_{-1}^{1} f(x)\, D_{n1}(u)\, du,$$

при всех $x \in [-1,1]$, в силу (1.3′), получим:

$$|f(x) - P(x)| = \left| \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} [f(x+3u) - f(x)]\, D_{n1}(u)\, du + O\left(\frac{1}{n^{2-1}}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+3u) - f(x)|\, D_{n1}(u)\, du + O\left(\frac{1}{n\delta}\right) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \int_{-1}^{1} D_{n1}(u)\, du + O\left(\frac{1}{n\delta}\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

если только n достаточно велико. Теорема полностью доказана.

Поступило
18.I.1957

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, М.—Л., 1947.

[2] Валле-Пуссен Ш. Ж., Курс анализа бесконечно малых, т. II, М.—Л., ГТТИ, 1933.

[3] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, М.—Л., ГИТТЛ, 1954.

[4] Дзядык В. К., О конструктивной характеристике функций, удовлетворяющих условию Lip α $(0 < \alpha < 1)$ на конечном отрезке вещественной оси, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 20 (1956), 623—642.

[5] Ибрагимов И. И., Об асимптотическом значении наилучшего приближения функций, имеющих вещественную особую точку, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 10 (1946), 429—460.

[6] Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М.—Л., 1949.

[7] Никольский С. М., О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 10 (1946), 295—317.

[8] Тиман А. Ф., Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица обыкновенными многочленами, Доклады Ак. наук СССР, 77 (1951), 969—972.

[9] Тиман А. Ф., Усиление теоремы Джексона о наилучшем приближении непрерывных функций многочленами на конечном отрезке вещественной оси, Доклады Ак. наук СССР, 78 (1951), 17—20.

[10] Тиман А. Ф. и Дзядык В. К., О наилучшем приближении квазигладких функций обыкновенными полиномами, Доклады Ак. наук СССР, 75 (1950), 499—501.

[11] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, ГИТТЛ, М.—Л., 1946.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 355—360

А. Ф. ТИМАН

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

(*Представлено академиком* **М. А. Лаврентьевым**)

В работе дано усиление известной предельной теоремы С. Н. Бернштейна для наилучших приближений дифференцируемых функций алгебраическими многочленами на конечном отрезке вещественной оси.

1. Обозначим через $W^{(r)}M$ класс функций $f(x)$, заданных на отрезке $[-1,1]$ и имеющих на нем производную $f^{(r)}(x)$ порядка r (r — целое), удовлетворяющую условию

$$|f^{(r)}(x)| \leqslant M. \tag{1}$$

Как показал С. Н. Бернштейн ([1]), при любом натуральном r (в случае $r=1$ этот результат был ранее получен С. М. Никольским [см. ([3]), теорема 2]) для всякой функции $f(x) \in W^{(r)}M$ найдется последовательность многочленов

$$P_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} c_k^{(n)} x^k \tag{2}$$

таких, что в каждой точке x данного отрезка

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^r |f(x) - P_n(f; x)| \leqslant M.K_r, \tag{3}$$

где

$$K_r = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}. \tag{4}$$

При этом константу K_r в правой части неравенства (3) на всем классе $W^{(r)}M$ понизить нельзя. Для наилучших равномерных приближений $E_n(f)$ функций $f(x) \in W^{(r)}M$ алгебраическими многочленами степени $\leqslant n$ на $[-1,1]$ справедливо предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{f\in W^{(r)}M} n^r E_n(f) = M.K_r. \tag{5}$$

Аналогичное утверждение, как известно, имеет место и для функций, заданных на всей числовой оси, если рассматривать их равномерные приближения целыми трансцендентными функциями экспоненциального типа [см. ([1]), ([2]), ([4])].

В настоящей работе я хочу показать, что в случае приближений алгебраическими многочленами на конечном отрезке приведенное утверждение С. Н. Бернштейна [неравенство (3)] при любом натуральном r может быть усилено. Это усиление возникает, если вместо равномерных приближений изучать приближение многочленами, учитывающее положение точки на рассматриваемом конечном отрезке. Такое приближение, как это следует из результатов, полученных в ([6]) и ([5]) [см. также ([9])], с конструктивной точки зрения для случая конечного отрезка является более естественным.

2. Известно [см. ([6])], что если $f(x) \in W^{(r)}M$, то существуют константа C_r, зависящая только от r, и последовательность алгебраических многочленов $P_n(x) = P_n(f; x)$ степени $\leqslant n$, удовлетворяющие для каждого $x \in [-1,1]$ неравенству

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{M.C_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{|x|}{n}\right)^r. \qquad (6)$$

Отсюда вытекает, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^r |f(x) - P_n(x)| \leqslant M.C_r\, (\sqrt{1-x^2})^r. \qquad (7)$$

Следующее предложение при всех натуральных r дает решение задачи о наименьшем возможном значении константы C_r в неравенстве (7) и представляет собой усиление упомянутого результата С. Н. Бернштейна [случай $r = 1$ см. в работе ([3])].

ТЕОРЕМА. *Для любой функции $f(x) \in W^{(r)}M$ можно указать последовательность алгебраических многочленов* (2), *обладающих тем свойством, что в каждой точке $x \in [-1,1]$*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^r |f(x) - P_n(f; x)| \leqslant M.K_r (\sqrt{1-x^2})^r. \qquad (8)$$

Константу K_r в правой части неравенства (8) *на всем классе $W^{(r)}M$ понизить нельзя.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(t) = f(\cos t)$ и заметим, что если $f(x) \in W^{(r)}M$, то

$$\varphi^{(r)}(t) = \Phi_r(t) + (-1)^r \sin^r t f^{(r)}(u), \qquad (9)$$

где $u = \cos t$, $f^{(r)}(u) = f^{(r)}(\cos t)$, а периодическая функция $\Phi_r(t)$ имеет ограниченную на всей числовой оси $-\infty < t < \infty$ первую производную.

Пользуясь обозначениями

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t)\,dt$$

и

$$D_0^{(r)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kt - \frac{r\pi}{2}\right)}{k^r},$$

мы можем написать, что при любом y

$$\varphi(y) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_0^{(r)}(t)\,\varphi^{(r)}(t+y)\,dt$$

и, следовательно,

$$f(\cos y) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_0^{(r+1)}(t)\,\Phi_r'(t+y)\,dt + \\ + \frac{(-1)^r}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_0^{(r)}(t)\sin^r(t+y)\,f^{(r)}[\cos(t+y)]\,dt. \qquad (10)$$

Пусть

$$T_{n,r}(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,r}^{(n)} \frac{\cos\left(kt - \frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}$$

есть тригонометрический полином порядка n, наименее уклоняющийся в метрике $L(-\pi,\pi)$ от периодической функции $D_0^{(r)}(t)$. Рассмотрим сумму

$$\frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_{n,r+1}(t)\,\Phi'_r(t+y)\,dt + \\ + \frac{(-1)^r}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_{n,r}(t)\sin^r(t+y)\,f^{(r)}[\cos(t+y)]\,dt. \qquad (11)$$

Нетрудно заметить, что функция $\Phi_r'(t)$ имеет вид

$$\Phi_r'(t) = \sum_{k=1}^{r} Q_{k,r}(t)\,f^{(k)}(\cos t),$$

где

$$Q_{k,r}(t) = \sum_{\nu=0}^{k} \alpha_\nu^{(r)} \cos\left(\nu t - \frac{r+1}{2}\pi\right).$$

В силу этого, сумма (11) представляет собой некоторый четный тригонометрический полином относительно y порядка $\leqslant n$. Этот полином можно представить в форме $P_n(\cos y)$, где $P_n(x)$ — алгебраический многочлен степени $\leqslant n$. Для разности между рассматриваемой функцией $f(x)$ и многочленом $P_n(x)$ имеем неравенство:

$$|f(\cos y) - P_n(\cos y)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_0^{(r+1)}(t) - T_{n,r+1}(t)|\,|\Phi_r'(t+y)|\,dt + \\ + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_0^{(r)}(t) - T_{n,r}(t)|\,|\sin^r(t+y)|\,|f^{(r)}[\cos(t+y)]|\,dt.$$

Если $|\Phi_r'(t)| \leqslant M_r$, то отсюда следует, что

$$|f(\cos y) - P_n(\cos y)| \leqslant \frac{M}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_0^{(r)}(t) - T_{n,r}(t)|\,|\sin^r(t+y)|\,dt + \\ + \frac{M_r}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_0^{(r+1)}(t) - T_{n,r+1}(t)|\,dt. \qquad (12)$$

Известно [см. (2), а также (11)], что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} | D_0^{(r)}(t) - T_{n,r}(t) | \, dt = \frac{K_r}{(n+1)^r}. \tag{13}$$

Поэтому второй из интегралов в правой части (12) есть величина порядка $O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right)$. Для оценки первого из интегралов правой части (12) можно воспользоваться следующей леммой [см. (7)].

ЛЕММА. *Каково бы ни было* $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} n^r \int_{\varepsilon}^{\pi} | D_0^{(r)}(t) - T_{n,r}(t) | \, dt = 0. \tag{14}$$

В силу этой леммы, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $N(\varepsilon)$, что при всех $n \geqslant N(\varepsilon)$

$$\frac{M}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi} | D_0^{(r)}(t) - T_{n,r}(t) | \, dt < \frac{\varepsilon}{(2n)^r}.$$

Следовательно, так как

$$\frac{M}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} | D_0^{(r)}(t) - T_{n,r}(t) | | \sin^r(t+y) | \, dt <$$

$$< \frac{2M}{\pi} | \sin y|^r \int_{0}^{\pi} | D_0^{(r)}(t) - T_{n,r}(t) | \, dt +$$

$$+ \frac{M}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} | D_0^{(r)}(t) - T_{n,r}(t) | \sum_{\nu=0}^{r-1} \binom{r}{\nu} | \sin t |^{r-\nu} \, dt,$$

то, применяя формулу (13), найдем, что при всех $n \geqslant N(\varepsilon)$

$$\frac{M}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} | D_0^{(r)}(t) - T_{n,r}(t) | | \sin^r(t+y) | \, dt <$$

$$< M | \sin y |^r \frac{K_r}{n^r} + \frac{2^{r+1} M . K_r}{(n+1)^r} + \frac{2\varepsilon}{n^r}.$$

Таким образом, из неравенства (12) вытекает, что разность между функцией $f(x)$ и алгебраическими многочленами $P_n(x) = P_n(f; x)$ при $| x | \leqslant 1$ и $n \geqslant N(\varepsilon)$ удовлетворяет неравенству:

$$n^r | f(x) - P_n(x) | < MK_r (\sqrt{1-x^2})^r + 2^{r+1} K_r . M . \varepsilon + 2\varepsilon + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поэтому

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^r | f(x) - P_n(f; x) | \leqslant M . K_r (\sqrt{1-x^2})^r + 2^{r+1} K_r . M . \varepsilon + 2\varepsilon,$$

и так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то отсюда следует справедливость теоремы.

То, что константу K_r в правой части неравенства (8) на всем классе $W^{(r)}M$ понизить нельзя, следует из упомянутой в п. 1 теоремы С. Н. Бернштейна.

3. Сумма (11), приводящая в соответствие каждой функции $f(x) \in W^{(r)}M$ последовательность многочленов $P_n(x) = P_n(f; x)$, определяет некоторый линейный метод приближения алгебраическими многочленами. Из доказательства теоремы видно, что этот процесс при любом натуральном r относится к числу асимптотически наилучших линейных методов приближения многочленами на классе $W^{(r)}M$ *. Его отличительной особенностью является то обстоятельство, что, осуществляя асимптотически наилучшее *равномерное* приближение на классах $W^{(r)}M$, он, кроме того (при любом натуральном r), дает на этих классах уклонение, распределение которого на рассматриваемом отрезке $[-1,1]$ мажорируется (асимптотически при $n \to \infty$) функцией $\frac{K_r}{n^r}(\sqrt{1-x^2})^r$, т. е. которое при приближении к концам существенным образом уменьшается.

Заметим, что из приведенного выше доказательства теоремы нетрудно усмотреть возможность построения целого ряда других асимптотически наилучших линейных методов приближения, обладающих тем же свойством. Можно было бы, например, в сумме (11) интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_{n,r+1}(t)\,\Phi_r'(t+y)\,dt$$

заменить интегралом

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} V_n(t)\,\Phi_r'(t+y)\,dt,$$

где

$$V_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \frac{\cos\left(kt - \frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}.$$

Тогда мы получили бы новую последовательность многочленов $P_n(f; x; \lambda)$, зависящую от выбора множителей $\lambda_k^{(n)}$. Из известных результатов [см. ([10]), теорема 10] следует, что, какой бы ни была треугольная матрица чисел $\lambda_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$, если только $\lambda_k^{(n)} = O(1)$ и система чисел

$$\mu_k^{(n)} = \frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^{r+1}} \quad (0 < k \leqslant n), \quad \mu_0^{(n)} = 0, \quad \mu_{n+1}^{(n)} = \frac{1}{(n+1)^{r+1}}$$

при каждом фиксированном n, не убывая, выпукла, т. е.

$$\mu_k^{(n)} \leqslant \mu_{k+1}^{(n)}, \quad \mu_k^{(n)} - 2\mu_{k+1}^{(n)} + \mu_{k+2}^{(n)} \geqslant 0, \tag{15}$$

всегда имеет место соотношение

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\,D_0^{(r+1)}(t) - V_n(t)\,|\,dt = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+1}}\right). \tag{16}$$

В силу этого, как и в предыдущем случае, мы получим, что если $f(x) \in W^{(r)}M$, то для любой такой системы множителей $\lambda_k^{(n)}$ соответствующая последовательность многочленов $P_n(f; x; \lambda)$ обладает свойством:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^r\,|\,f(x) - P_n(f; x; \lambda)\,| \leqslant K_r.M\,(\sqrt{1-x^2})^r.$$

---

* Другой способ построения таких процессов приближения см. в работе ([5]).

Рассмотренные в п. 2 многочлены $P_n(x)$ соответствуют треугольной матрице чисел (удовлетворяющей условию (15)):

$$\lambda_k^{(n)} = \lambda_{k,r+1}^{(n)} = \lambda_{r+1}\left(\frac{k}{n+1}\right),$$

где для $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$\lambda_r(t) = 1 - t^r \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\left[\frac{1}{(2k-t)^r} + \frac{1}{(2k+t)^r}\right],$$

если r четно, и

$$\lambda_r(t) = 1 - t^r \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2k-t)^r} - \frac{1}{(2k+t)^r}\right],$$

если r нечетно.

Таким образом, метод приближения, который определялся суммами (11), входит в совокупность отмеченных асимптотически наилучших линейных процессов приближения многочленами. Можно было бы показать, что для любого из них справедлива оценка:

$$\sup_{f \in W^{(r)}M} n^r \mid f(x) - P_n(f; x; \lambda) \mid \leqslant M.K_r(\sqrt{1-x^2})^r + O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Поступило
17. V. 1597

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ахиезер Н. И. и Крейн М. Г., О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций посредством тригонометрических сумм, Доклады Ак. наук СССР, 15, № 3 (1937), 107—112.

[2] Favard J., Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes des fonctions par des polinomes trigonometrique, Bull. de Sc. Math., LXI (1937), 209—224.

Никольский С. М., О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 10 (1946), 295—322.

[4] Бернштейн С. Н., О предельных зависимостях между константами теории наилучшего приближения, Доклады Ак. наук СССР, 57 (1947), 3—5; Собр. соч., т. 2, М., 1954, 413—415.

[5] Никольский С. М., Об асимптотически наилучшем линейном методе приближения дифференцируемых функций многочленами, Доклады Ак. наук СССР, 69, № 2 (1949), 129—132.

[6] Тиман А. Ф., Усиление теоремы Джексона о наилучшем приближении непрерывных функций многочленами на конечном отрезке вещественной оси, Доклады Ак. наук СССР, 78, № 1 (1951), 17—20.

[7] Дзядык В. К., О наилучшем приближении в среднем периодических функций с особенностями, Доклады Ак. наук СССР, 77, № 6 (1951), 949—952.

[8] Дзядык В. К., О конструктивной характеристике функций, удовлетворяющих условию Lip $\alpha (0<\alpha<1)$ на конечном отрезке вещественной оси, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 20 (1956), 623—642.

[9] Тиман А. Ф., Обратные теоремы конструктивной теории функций, заданных на конечном отрезке вещественной оси, Доклады Ак. наук СССР, 116, № 5 (1957), 762—765.

[10] Тиман А. Ф., Аппроксимативные свойства линейных методов суммирования рядов Фурье, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 17 (1953), 99—134.

[11] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, Гостехиздат, 1947.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 361—378

Ю. И. ЧЕРСКИЙ

ОБ УРАВНЕНИЯХ ТИПА СВЕРТКИ

(*Представлено академиком* **В. И. Смирновым**)

Излагается метод приведения уравнений типа свертки к краевым задачам для аналитических функций в случае, когда обычное преобразование Фурье неприменимо вследствие роста показательного порядка входящих в уравнения функций. Указанным методом изучаются интегральные уравнения трех типов.

§ 1. Введение

Уравнения, исследуемые операционным методом (дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, интегральные уравнения с разностными ядрами и др.), содержат «свертки» — операторы, принимающие после интегрального преобразования более простой вид. Эти уравнения будем называть уравнениями типа свертки. Простым примером уравнения типа свертки является интегральное уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x-t)\varphi(t)\,dt = f(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{1.1}$$

Если ядро k не имеет характера δ-функции, то заданная функция f является более гладкой, чем искомая функция φ. Обычно уравнение (1.1) рассматривается в тех случаях, когда φ — искомая физическая величина, а f — полученная вследствие несовершенства аппаратуры ее сглаженная форма. Функция $k(x)$ иногда называется «функцией аппарата» [см., например, ([1]), ([2])]. Уравнение (1.1) в этом случае, очевидно, имеет решение.

К уравнению (1.1) сводится другая интересная задача, сущность которой можно выяснить на следующем примере. Пусть на ленте имеется запись $\varphi_1(x)$ звука и пусть эта запись воспроизводится в аппарате в сглаженном, искаженном виде:

$$\varphi_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-t)\varphi_1(t)\,dt \tag{1.2}$$

(где k не есть δ-функция). Если даже добиться записи $\varphi_1(x)$, весьма близкой к неискаженному звуку $\varphi(x)$, то в аппарате мы услышим искаженный звук:

$$\varphi^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-t)\varphi(t)\,dt.$$

Задача заключается в том, чтобы нанести на ленту такую запись $\varphi_1(x)$ (более контрастную, чем $\varphi(x)$), чтобы в аппарате ее искажение (1.2) оказалось неискаженным звуком: $\varphi_2(x) \equiv \varphi(x)$. Эта задача может не иметь решения. В связи с этим можно поставить задачу о нахождении функции $\varphi_1(x)$ такой, чтобы функция $\varphi_2(x)$ была в определенном смысле максимально близка к функции $\varphi(x)$.

Более сложные проблемы приводятся к уравнению Хопфа и Винера [см. ([3]), ([4]), ([5]) и ([6]) *], в котором, кроме операторов типа свертки, содержится оператор

$$S\varphi \equiv \varphi(x)\operatorname{sgn} x$$

(см. § 3), а также к «парным» уравнениям [см., например, ([4]), стр. 424, и ([7]), стр. 84]:

$$\int_0^\infty \tau^\alpha \psi(\tau) J_\nu(\xi\tau)\, d\tau = q(\xi), \qquad 0 < \xi < 1,$$

$$\int_0^\infty \psi(\tau) J_\nu(\xi\tau)\, d\tau = 0, \qquad 1 < \xi < \infty.$$

Нетрудно убедиться, что эти уравнения являются частным случаем уравнений

$$\begin{aligned} \lambda\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_1(x-t)\varphi(t)\,dt = f(x), \qquad 0 < x < \infty, \\ \mu\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(x-t)\varphi(t)\,dt = f(x), \quad -\infty < x < 0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

когда

$$\lambda = \mu = 0, \quad k_1(x) = \sqrt{2\pi}\, J_\nu(e^{-x})\, e^{-\alpha x},$$

$$k_2(x) = \sqrt{2\pi}\, J_\nu(e^{-x}).$$

Последние функции имеют, в зависимости от ν и α, рост или убывание показательного порядка при $x \to \pm\infty$. «Парные» уравнения (1.3) с ядрами $k_j(x) \in L(-\infty, \infty)$ исследовал И. М. Рапопорт ([8]).

В настоящей работе мы рассматриваем уравнения (1.3) во всевозможных случаях роста или убывания показательного порядка ядер $k_1(x)$ и $k_2(x)$ (§ 5). Аналогичному исследованию подвергаются два других интегральных уравнения типа свертки (§ 4 и 6). Рассмотрения опираются на данный в § 3 общий метод исследования уравнений типа свертки, который является развитием приемов, использованных в работах ([9]), ([10]) и ([11]) при решении уравнений более частного вида.

Мы не приводим подробных решений возникающих краевых задач. Читатель, владеющий методами решения краевой задачи Римана, без большого труда сможет получить эти решения.

* Решение Хопфа и Винера нельзя признать вполне удовлетворительным. Полное исследование уравнения Хопфа и Винера при достаточно общих предположениях дано И. М. Рапопортом.

§ 2. Пространства $\{\alpha, \beta\}$ и некоторые операторы

Символом $\{\alpha, \beta\}$ будем обозначать пространство (вообще комплексных) функций f вещественного переменного x $(-\infty < x < \infty)$ таких, что

$$f(x)\, e^{-\alpha x} \in L_2(0, \infty), \quad f(x)\, e^{-\beta x} \in L_2(-\infty, 0).$$

$\{\alpha, \beta\}$ — банаховское пространство с нормой

$$\| f \| = \int_0^\infty |f(x) e^{-\alpha x}|^2\, dx + \int_{-\infty}^0 |f(x)\, e^{-\beta x}|^2\, dx.$$

Отметим ряд очевидных фактов:

1. Если $\alpha \leqslant \alpha_1$, $\beta_1 \leqslant \beta$, то $\{\alpha, \beta\} \subseteq \{\alpha_1, \beta_1\}$.
2. Если $f_k(x) \in \{\alpha_k, \beta_k\}$, $k = 1, \ldots, n$, то

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) \in \{\max(\alpha_k), \min(\beta_k)\}.$$

3. Если $f(x) \in \{\alpha, \alpha\}$ и $f(x) \in \{\beta, \beta\}$, то

$$f(x) \in \{\min(\alpha, \beta), \max(\alpha, \beta)\}.$$

4. Если $f(x) \in \{\alpha, \beta\}$ и $g(x)$ — ограниченная функция, то $f(x) g(x) \in \{\alpha, \beta\}$. В частности, оператор

$$Sf \equiv f(x) \operatorname{sgn} x$$

действует в любом пространстве $\{\alpha, \beta\}$. С оператором S тесно связаны пространства функций, тождественно равных нулю при $x < 0$ или $x > 0$. Такие функции условимся отмечать значками «+» и «—»: $f_+(x)$, $f_-(x)$. Любую функцию $f(x) \in \{\alpha, \beta\}$ можно представить в виде разности:

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x),$$

где

$$f_+ = \frac{1}{2}(I + S) f, \quad f_- = \frac{1}{2}(-I + S) f.$$

Элемент $f_+(x)$ принадлежит не только пространству $\{\alpha, \beta\}$, но и пространству $\{\alpha, A\}$, где A — сколь угодно большое число. В связи с этим для пространства функций $f_+(x) \in \{\alpha, \beta\}$ введем символ $\{\alpha, \infty\}$ и, аналогично, символом $\{-\infty, \beta\}$ обозначим пространство функций $f_-(x) \in \{\alpha, \beta\}$. Для этих пространств останутся справедливыми свойства 1—4. Пространству $\{-\infty, \infty\}$ принадлежит единственная функция $f \equiv 0$.

5. Пусть $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$ (случаи $\alpha = -\infty$ и $\beta = \infty$ мы не исключаем, но считаем, что при этом $-\infty < y$ и $y < \infty$). Символом V_y будем обозначать оператор (преобразование Фурье), ставящий в соответствие функции $f(x) \in \{\alpha, \beta\}$ функцию (которую принято обозначать соответствующей прописной буквой)

$$F(\zeta) = V_y f \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname*{l.i.m.}_{\lambda \to \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} f(t)\, e^{i\zeta t}\, dt, \quad \operatorname{Im} \zeta = y.$$

При $\alpha < \beta$ функция $F(\zeta)$ аналитически продолжима на полосу $\alpha < \operatorname{Im}\zeta < \beta$. Кроме того,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^2 dx < k < \infty, \quad \alpha \leqslant y \leqslant \beta,$$

где k не зависит от y [см. ([4]), стр. 170 и 173]. Пространство функций F, обладающих указанными свойствами, обозначим через $\{\{\alpha, \beta\}\}$. Существует обратный оператор V_y^{-1}, переводящий каждую функцию $F(\zeta) \in \{\{\alpha, \beta\}\}$ в функцию

$$f(x) = V_y^{-1}F \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname*{l.i.m.}_{\lambda\to\infty} \int_{-\lambda+iy}^{+\lambda+iy} F(\zeta)\, e^{-ix\zeta} d\zeta, \quad \alpha \leqslant y \leqslant \beta,$$

принадлежащую пространству $\{\alpha, \beta\}$, причем $V_y V_y^{-1} = I$.

К функциям $f(x) \in \{\alpha, \beta\}$, где $\alpha > \beta$, оператор V_y неприменим; однако оператор V_y применим к функциям $f_+(x)$ и $f_-(x)$; следует только взять $y \geqslant \alpha$ и $y \leqslant \beta$ соответственно [см. ([4]), стр. 11].

6. «Сверткой» будем называть оператор $A\varphi = V_y^{-1}[A(\zeta)V_y\varphi]$, где $A(\zeta)$ — функция точек прямой $\operatorname{Im}\zeta = y$. Элемент φ берется из множества $X \subseteq \{\alpha, \beta\}$, $\alpha \leqslant \beta$, такого, что $A\varphi \in \{\alpha_1, \beta_1\}$, $\alpha \leqslant \alpha_1 \leqslant y \leqslant \beta_1 \leqslant \beta$.

Приведем примеры сверток:

$$A_1\varphi \equiv \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_{kj}\varphi^{(k)}(x-\beta_j), \quad \beta_j, \alpha_{kj} = \text{const}, \quad \operatorname{Im}\beta_j = 0,$$

$$A_2\varphi \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k(x-t)\,\varphi(t)\,dt,$$

$$k(x) \in \{\alpha_1, \beta_1\}, \quad \max(\alpha_1, \alpha) \leqslant \min(\beta_1, \beta), \quad |V_y k| < \text{const}.$$

В отличие от оператора A_1 оператор A_2 ставит в соответствие любому элементу φ из $\{\alpha, \beta\}$ элемент из пространства $\{\max(\alpha_1, \alpha), \min(\beta_1 \beta)\}$.

Сумма сверток не всегда будет сверткой. Например, оператор

$$B\varphi \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k(x-t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{2.1}$$

где $\varphi \in \{\alpha, \beta\}$, $\alpha < \beta$, $k(x) \in \{\beta, \alpha\}$, $|V_\beta k_+| < \text{const}$, $|V_\alpha k_-| < \text{const}$, есть сумма сверток

$$A_1\varphi \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_+(x-t)\,\varphi(t)\,dt$$

и

$$A_2\varphi \equiv -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_-(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Но $A_1\varphi \in \{\beta, \beta\}$, $A_2\varphi \in \{\alpha, \alpha\}$, откуда, в силу п. 2, $B\varphi \in \{\beta, \alpha\}$, так что к функции $B\varphi$ оператор V_y неприменим.

7. Нам в дальнейшем понадобится следующее свойство оператора B, которое нетрудно установить, введя функции φ_+, φ_-, k_+ и k_-. Пусть

$$\varphi(x) \in \{\alpha_1, \beta_1\}, \quad k(x) \in \{\alpha_2, \beta_2\}, \quad |V_{\alpha_2} k_+| < \text{const}, \quad |V_{\beta_2} k_-| < \text{const}.$$

Интеграл (2.1) существует, если $\alpha_1 \leqslant \beta_2$ и $\alpha_2 \leqslant \beta_1$; при этом

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k(x-t)\,\varphi(t)\,dt \in \{\max(\alpha_1, \alpha_2),\ \min(\beta_1, \beta_2)\}.$$

При несоблюдении указанных неравенств интеграл (2.1) может расходиться при всех x.

§ 3. Уравнения в пространствах $\{\alpha, \beta\}$ и общий метод их преобразования

Рассмотрим уравнение

$$A\varphi = f,$$

где A — свертка, $f \in \{\gamma, \gamma\}$. Если решение ищется в пространстве $\{\alpha, \beta\}$, $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$, то необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения является условие

$$\frac{V_\gamma f}{A(\zeta)} \in \{\{\alpha, \beta\}\}.$$

Если это условие выполнено, то имеем единственное решение

$$\varphi = V_y^{-1} \frac{V_\gamma f}{A(\zeta)}, \quad \alpha \leqslant y \leqslant \beta.$$

Отметим более сложные уравнения типа свертки:

$$A_1\varphi + A_2 S\varphi = f, \quad f,\ \varphi \in \{\alpha, \alpha\}, \tag{3.1}$$

$$A_1\varphi + SA_2\varphi = f, \quad f,\ \varphi \in \{\alpha, \alpha\}. \tag{3.2}$$

Здесь A_1 и A_2 — свертки, $S\varphi \equiv \varphi(x)\operatorname{sgn} x$. Частными случаями уравнения (3.1) являются уравнение Хопфа и Винера

$$\varphi(x) + \int_0^{\infty} k(x-t)\,\varphi(t)\,dt = f(x)$$

$$\left(\text{случай } A_1\varphi \equiv \varphi(x) + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} k(x-t)\,\varphi(t)\,dt, \quad A_2\varphi \equiv \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} k(x-t)\,\varphi(t)\,dt\right),$$

а также уравнение

$$\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} k_1(x-t)\,\varphi(t)\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} k_2(x-t)\,\varphi(t)\,dt = f(x),$$

рассмотренное в работе ([12]).

Частными случаями уравнения (3.2) являются уравнения, рассмотренные в работе ([8]). Применяя оператор V_α, уравнения (3.1) и (3.2) можно свести соответственно к характеристическому уравнению с ядром Коши и к уравнению, с ним сопряженному (относительно теории последних см., например, ([13]), § 47, 48).

Более общее уравнение

$$A_1\varphi + A_2 S\varphi + T\varphi = f, \quad f,\ \varphi \in \{\alpha, \alpha\}, \tag{3.3}$$

где T — вполне непрерывный оператор, приводится к сингулярному уравнению общего вида, теория которого изложена в монографии Н. И. Мусхелишвили ([13]), а также в ряде других работ. Частный случай уравнения (3.3) рассмотрен в работе ([12]).

В качестве других примеров уравнений, исследованных при помощи преобразования Фурье, отметим уравнения

$$A_1\varphi + A_2Q\varphi = f, \quad f, \varphi \in \{0,\ 0\}, \tag{3.4}$$

и

$$A_1\varphi + A_2R\varphi = f, \quad f, \varphi \in \{\alpha,\ \alpha\}, \tag{3.5}$$

где $Q\varphi \equiv \varphi(-x)$, $R\varphi = x\varphi(x)$. Уравнение (3.4) является обобщением уравнения Фокса [см. ([3]), стр. 421], а уравнение (3.5) после применения оператора V_α превращается в линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Указанные выше уравнения обладают общим свойством: все они могут быть решены путем непосредственного применения оператора V_y, где y — соответственно подобранное число.

Переходя к изучению уравнений с операторами типа B (см. конец предшествующего параграфа) или уравнений, допускающих решения из пространства $\{\alpha,\ \beta\}$, где $\alpha > \beta$, мы сталкиваемся с тем обстоятельством, что оператор V_y непосредственно неприменим. При этом, однако, всегда оказывается возможным представить уравнение в удобном для преобразования по Фурье виде

$$M_1\varphi + M_2\varphi + \cdots + M_n\varphi = 0, \tag{3.6}$$

где M_k — оператор, ставящий в соответствие элементу $\varphi(x)$ элемент пространства $\{\alpha_k,\ \alpha_k\}$, $k = 1,\ \ldots,\ n$, причем $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_n$.

Существует, очевидно, бесчисленное множество способов представления уравнения в виде (3.6). Вопрос заключается в наиболее рациональном представлении, когда каждый оператор M_k имеет наиболее удобную для преобразования по Фурье форму (например, вид операторов, входящих в уравнения (3.1) — (3.5)). Рациональное представление в форме (3.6) достигается, как правило, путем использования оператора S (путем перехода к функциям типа f_+ и f_-), в результате чего уравнение будет содержать только слагаемые, принадлежащие пространствам вида $\{\alpha,\ \alpha\}$, так что остается лишь сгруппировать надлежащим образом эти слагаемые.

В этом параграфе мы даем метод преобразования выражений типа (3.6) по Фурье. В последующих параграфах мы используем этот метод при исследовании интегральных уравнений трех типов.

Случай $n = 1$. Имеем: $M_1\varphi = 0$. Обычное преобразование дает

$$V_{\alpha_1} M_1\varphi = 0.$$

Случай $n = 2$. Равенству (3.6) равносильны условия:

$$\begin{aligned} V_{\alpha_1} M_1\varphi &= \Omega_1(x + i\alpha_1), \\ V_{\alpha_2} M_2\varphi &= -\Omega_1(x + i\alpha_2), \end{aligned} \tag{3.7}$$

где

$$\Omega_1(\zeta) \in \{\{\alpha_2,\ \alpha_1\}\}.$$

Действительно, полагая

$$M_1\varphi = -M_2\varphi = \omega_1(x)$$

и используя утверждение п. 3 § 2, заключаем, что $\omega_1 \in \{\alpha_2, \alpha_1\}$. Равенства (3.7) теперь получаются из равенств $M_1\varphi = \omega_1$ и $M_2\varphi = -\omega_1$, как в случае $n = 1$. Обратным ходом рассуждений можно перейти от условий (3.7) к равенству (3.6).

Случай $n > 2$. Равенству (3.6) равносильна система условий:

$$\left.\begin{aligned} V_{\alpha_1} M_1\varphi &= \Omega_1(x + i\alpha_1), \\ V_{\alpha_2} M_2\varphi &= \Omega_2(x + i\alpha_2) - \Omega_1(x + i\alpha_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_{\alpha_{n-1}} M_{n-1}\varphi &= \Omega_{n-1}(x + i\alpha_{n-1}) - \Omega_{n-2}(x + i\alpha_{n-1}), \\ V_{\alpha_n} M_n\varphi &= \qquad\qquad\qquad\quad - \Omega_{n-1}(x + i\alpha_n), \end{aligned}\right\} \qquad (3.8)$$

где

$$\Omega_j(\zeta) \in \{\{\alpha_{j+1}, \alpha_j\}\}.$$

Доказательство. Введем функции

$$\omega_k(x) = M_1\varphi + \cdots + M_k\varphi, \quad k = 1, \ldots, n-1,$$

и покажем, что $\omega_k(x) \in \{\alpha_{k+1}, \alpha_k\}$. Согласно § 2,

$$\omega_{k_-}(x) = [M_1\varphi]_- + \cdots + [M_k\varphi]_- \in \{-\infty, \alpha_k\},$$

$$\omega_{k_+}(x) = [M_1\varphi]_+ + \cdots + [M_k\varphi]_+ = -[M_{k+1}\varphi]_+ - \cdots - [M_n\varphi]_+ \in \{\alpha_{k+1}, \infty\},$$

откуда

$$\omega_k(x) = \omega_{k_+}(x) - \omega_{k_-}(x) \in \{\alpha_{k+1}, \alpha_k\}.$$

Условия (3.8) получаются простым преобразованием равенств

$$\begin{aligned} M_1\varphi &= \omega_1(x), \\ M_2\varphi &= \omega_2(x) - \omega_1(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Обратным ходом рассуждений можно перейти от системы (3.8) к равенству (3.6).

Поскольку в системе (3.8) фигурируют неизвестные функции Ω_k, принадлежащие классам $\{\{\alpha_{k+1}, \alpha_k\}\}$, эта система является краевым условием задачи теории аналитических функций, заданным на совокупности n параллельных прямых.

Указанный метод годится и в случае, когда требуется перейти к преобразованию Фурье в системе уравнений. Каждое уравнение системы предварительно записывается в форме (3.6), причем теперь

$$M_k\varphi = \sum M_{kj}\varphi_j, \quad M_{kj}\varphi_j \in \{\alpha_k, \alpha_k\}.$$

Затем каждое уравнение преобразуется по Фурье указанным выше методом.

Число n назовем рангом уравнения. Некоторые уравнения ранга 2 рассмотрены в книге ([4]).

§ 4. Характеристическое уравнение

Изучим характеристическое уравнение

$$C(x)\varphi(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty k_1(x-t)\varphi(t)\,dt+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 k_2(x-t)\varphi(t)\,dt=f(x),\qquad -\infty<x<\infty, \tag{4.1}$$

где

$$C(x)=\begin{cases}\lambda & \text{при}\quad x>0,\\ \mu & \text{при}\quad x<0,\end{cases}\qquad (\lambda,\ \mu\text{ — постоянные})$$
$$k_1(x)\in\{a_1,\ b_1\},\qquad k_2(x)\in\{a_2,\ b_2\},$$
$$|V_{a_i}k_{i+}|<\text{const},\qquad |V_{b_i}k_{i-}|<\text{const}.$$

Придадим уравнению (4.1) вид, более удобный для применения результатов предыдущих параграфов:

$$\lambda\varphi_+(x)-\mu\varphi_-(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}k_1(x-t)\varphi_+(t)\,dt-$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}k_2(x-t)\varphi_-(t)\,dt=f(x). \tag{4.2}$$

Решение $\varphi\equiv\varphi_+-\varphi_-$ будем искать в пространстве $\{\alpha,\ \beta\}$, где числа α и β следует подобрать так, чтобы интегралы в уравнении сходились и пространство решений было максимально широким. Используя утверждения пп. 5 и 1 § 2, находим: $\alpha=b_1$, $\beta=a_2$.

Итак,

$$\varphi(x)\in\{b_1,\ a_2\}. \tag{4.3}$$

Отсюда, в силу утверждений пп. 5 и 2 § 2, заключаем, что

$$f(x)\in\{\max(b_1,\ a_1,\ a_2),\ \min(a_1,\ b_1,\ b_2)\}. \tag{4.4}$$

Если $f(x)$ не принадлежит пространству (4.4), то уравнение (4.1) не имеет решений в пространстве (4.3).

Различные соотношения между постоянными a_1, a_2, b_1 и b_2 доставляют большое число случаев. Ниже мы рассмотрим типичные случаи и затем дадим характеристику остальным.

Случай 1. $a_1\leqslant b_1=a_2\leqslant b_2$. Уравнение (4.2) приводится к виду (3.6), где $n=1$ и $\alpha_1=b_1$, так как каждое слагаемое в этом уравнении принадлежит пространству $\{b_1,\ b_1\}$. Обычное преобразование Фурье дает:

$$[\lambda+K_1(\zeta)]\,\Phi^+(\zeta)-[\mu+K_2(\zeta)]\,\Phi^-(\zeta)=F(\zeta),\qquad \zeta=x+ib_1, \tag{4.5}$$

где

$$\Phi^+(\zeta)\in\{\{b_1,\ \infty\}\},\qquad \Phi^-(\zeta)\in\{\{-\infty,\ b_1\}\}.$$

Полученная задача называется краевой задачей Римана, исследованию которой посвящено много работ [см. ([13]) — ([16]) и др.]. Эти исследования, однако, позволяют пока получить решение задачи (4.5) только при дополнительных ограничениях, наложенных на функции $\lambda+K_1(\zeta)$ и $\mu+K_2(\zeta)$. Предположив, что последние удовлетворяют условию Гёль-

дера * и не обращаются в нуль **, мы можем использовать работу Б. В. Хведелидзе ([16]) ***, согласно которой однородная задача (4.5) имеет χ линейно независимых решений, если число (называемое «индексом»)

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \int_{ib_1-\infty}^{ib_1+\infty} d \arg \frac{\mu + K_2(\zeta)}{\lambda + K_1(\zeta)}$$

положительно; при $\chi \leqslant 0$ однородная задача имеет только тривиальное решение; при $\chi \geqslant 0$ неоднородная задача разрешима при любой правой части F; при $\chi < 0$ решение существует, если выполнены (необходимые и достаточные) условия разрешимости ****.

В силу эквивалентности задачи (4.5) и уравнения (4.2), которая в общем случае установлена в § 3, мы получаем, что при $\chi > 0$ однородное уравнение (4.1) имеет χ линейно независимых решений; при $\chi \leqslant 0$ однородное уравнение неразрешимо; при $\chi \geqslant 0$ неоднородное уравнение разрешимо при любой правой части; при $\chi < 0$ решение существует, если удовлетворены необходимые и достаточные условия разрешимости *****. Решение уравнения (4.1) находится из решения задачи (4.5) по формуле

$$\varphi = V_{b_1}^{-1} (\Phi^+ - \Phi^-).$$

Случай 2. $b_2 < a_2 = b_1 < a_1$. Расчленяем уравнение (4.2) на слагаемые, каждое из которых принадлежит пространству типа $\{\alpha, \alpha\}$:

$$\underset{\{b_1,\ \infty\}}{\lambda\varphi_+ (x)} - \underset{\{-\infty,\ b_1\}}{\mu\varphi_- (x)} + \underset{\{a_1,\ \infty\}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_{1+} (x-t)\, \varphi_+ (t)\, dt} -$$

$$- \underset{\{b_1,\ b_1\}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_{1-} (x-t)\, \varphi_+ (t)\, dt} - \underset{\{b_1,\ b_1\}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_{2+} (x-t)\, \varphi_- (t)\, dt} +$$

$$+ \underset{\{-\infty,\ b_2\}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_{2-} (x-t)\, \varphi_- (t)\, dt} = \underset{\{a_1,\ \infty\}}{f_+ (x)} - \underset{\{-\infty,\ b_2\}}{f_- (x)}$$

---

* Для того чтобы функция $K(\zeta) \in \{\{\alpha, \alpha\}\}$ удовлетворяла условию Гёльдера, достаточно потребовать, чтобы $xk(x) \in L(-\infty, \infty)$, где $k = V_\alpha^{-1} K$.

** Особые случаи, когда указанные функции имеют в конечном числе точек разрывы или нули, исследованы в работах ([13]) — ([15]) и др.

*** Нетрудно проверить, что результаты Б. В. Хведелидзе, предполагавшего краевое условие заданным на контуре конечной длины, с очевидными изменениями переносятся на случай прямолинейного контура $z = x + ib_1$. Кроме того, пользуясь теоремами 93 и 95 книги ([4]), можно установить совпадение пространств $\{\{b_1, \infty\}\}$, $\{\{-\infty, b_1\}\}$ с классом функций, представимых интегралом типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ib_1}^{+\infty+ib_1} \frac{F(\tau)\, d\tau}{\tau - z}$$

с плотностью $F \in L_2$, в котором Б. В. Хведелидзе ищет решение задачи Римана.

**** В работе ([12]) (стр. 48—49) указан явный вид решения задачи Римана в интегралах Фурье без достаточного, однако, обоснования.

***** Из результатов работы ([12]) следует, что эти условия можно записать как условия ортогональности правой части к общему решению системы однородных «парных» уравнений.

(под слагаемыми указаны соответствующие пространства). Группируем:

$$\underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} k_{1+}(x-t)\,\varphi_+(t)\,dt - f_+(x)\right]}_{\{a_1,\ a_1\}} + \Big[\lambda\varphi_+(x) - \mu\varphi_-(x) -$$

$$\underbrace{-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} k_{1-}(x-t)\,\varphi_+(t)\,dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} k_{2+}(x-t)\,\varphi_-(t)\,dt\Big]}_{\{b_1,\ b_1\}} +$$

$$+\underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} k_{2-}(x-t)\,\varphi_-(t)\,dt + \varphi_-(x)\right]}_{\{b_2,\ b_2\}} = 0.$$

Получено выражение вида (3.6). Ранг равен трем. Преобразуем по Фурье:

$$\left.\begin{aligned}
&K_1^+(\zeta)\,\Phi^+(\zeta) - F^+(\zeta) = \Omega_1(\zeta), && \zeta = x + ia_1,\\
&[\lambda - K_1^-(\zeta)]\,\Phi^+(\zeta) - [\mu + K_2^+(\zeta)]\,\Phi^-(\zeta) = \Omega_2(\zeta) - \Omega_1(\zeta), && \zeta = x + ib_1,\\
&K_2^-(\zeta)\,\Phi^-(\zeta) - F^-(\zeta) = -\Omega_2(\zeta), && \zeta = x + ib_2.
\end{aligned}\right\}\quad(4.6)$$

Мы пришли к краевой задаче: найти функции Φ^+, Φ^-, Ω_1 и Ω_2, принадлежащие пространствам $\{\{b_1, \infty\}\}$, $\{\{-\infty, b_1\}\}$, $\{\{b_1, a_2\}\}$ и $\{\{b_2, b_1\}\}$ соответственно и удовлетворяющие условиям (4.6). Решение этой задачи в общем виде неизвестно. В частном случае, когда функции $K_1^+(\zeta)$ и $K_2^-(\zeta)$ допускают аналитическое продолжение на полосы $b_1 < \operatorname{Im}\zeta \leqslant a_1$ и $b_2 \leqslant \operatorname{Im}\zeta < b_1$ соответственно, причем в этих полосах они имеют лишь полярные особенности в конечном числе точек, исследование задачи (4.6) значительно упрощается. В этом случае нетрудно показать, что необходимым условием разрешимости является аналитическая продолжимость функций F^+ и F^- на соответствующие полосы, причем допускаются полюсы в тех же точках, что и у функций K_1^+ и K_2^- и притом не более высоких порядков. Это позволяет перенести первое и третье условия (4.6) на прямую $\zeta = x + ib_1$, после чего, по исключении функций Ω_1 и Ω_2, получается задача Римана, отличающаяся от задачи (4.5) только тем, что ее решение должно удовлетворять дополнительным условиям в точках, где функции K_1^+ и K_2^- имеют полюсы. Эти условия должны обеспечить принадлежность функций Ω_1 и Ω_2 классам $\{\{b_1, a_1\}\}$ и $\{\{b_2, b_1\}\}$.

Решение уравнения (4.1) находится из решения задачи (4.6) по формуле

$$\varphi = V_{b_1}^{-1}(\Phi^+ - \Phi^-).$$

С л у ч а й 3. $a_2 < b_1$, $a_1 \leqslant b_1$, $a_2 \leqslant b_2$. Расчленяем уравнение (4.2) на слагаемые, принадлежащие классам типа $\{\{\alpha, \alpha\}\}$ и группируем:

$$\left[\lambda\varphi_+(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} k_1(x-t)\,\varphi_+(t)\,dt - f_+(x)\right] +$$

$$+\left[-\mu\varphi_-(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} k_2(x-t)\,\varphi_-(t)\,dt + f_-(x)\right] = 0.$$

Ранг равен двум. Преобразуем по Фурье:

$$\begin{aligned}
&[\lambda + K_1(\zeta)]\,\Phi^+(\zeta) - F^+(\zeta) = \Omega_1(\zeta), \quad \zeta = x + ib_1,\\
&[\mu + K_2(\zeta)]\,\Phi^-(\zeta) - F^-(\zeta) = \Omega_1(\zeta), \quad \zeta = x + ia_2.
\end{aligned}\qquad(4.7)$$

Получена задача Римана на контуре, состоящем из прямых $\operatorname{Im}\zeta = b_1$ и $\operatorname{Im}\zeta = a_2$: ищутся функции Φ^+, Φ^- и Ω_1, принадлежащие пространствам $\{\{b_1, \infty\}\}$, $\{\{-\infty, a_2\}\}$ и $\{\{a_2, b_1\}\}$ соответственно и удовлетворяющие условиям (4.7). Относительно решения задачи (4.7) можно повторить все, что было сказано выше в связи с задачей (4.5). Формулы, дающие решение задачи (4.7) при дополнительных предположениях о функциях $\lambda + K_1(\zeta)$ и $\mu + K_2(\zeta)$, приведены в работе ([11]) (стр. 38—39). В случае, когда указанные функции удовлетворяют условию Гёльдера и не имеют нулей, однородное уравнение (4.1) имеет χ линейно независимых решений, если индекс

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{ia_2-\infty}^{ia_2+\infty} d \arg [\mu + K_2(\zeta)] - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{ib_1-\infty}^{ib_1+\infty} d \arg [\lambda + K_1(\zeta)]$$

положителен; при $\chi \leqslant 0$ однородное уравнение неразрешимо; при $\chi \geqslant 0$ неоднородное уравнение имеет решение при любой правой части; при $\chi < 0$ решение существует, если правая часть удовлетворяет $(-\chi)$ условиям. Определив Φ^+ и Φ^-, находим решение уравнения (4.1):

$$\varphi = V_{b_1}^{-1}\Phi^+ - V_{a_2}^{-1}\Phi^-.$$

Случай 4. $b_2 < a_2 < b_1 < a_1$. Ранг равен четырем. Преобразование уравнения (4.2) приводит к краевой задаче: найти функции Φ^+, Φ^-, Ω_1, Ω_2 и Ω_3, принадлежащие пространствам $\{\{b_1, \infty\}\}$, $\{\{-\infty, a_2\}\}$, $\{\{b_1, a_1\}\}$, $\{\{a_2, b_1\}\}$ и $\{\{b_2, a_2\}\}$ соответственно и удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned}
K_1^+(\zeta)\,\Phi^+(\zeta) - F^+(\zeta) &= \Omega_1(\zeta), & \zeta &= x + ia_1,\\
[\lambda - K_1^-(\zeta)]\,\Phi^+(\zeta) &= \Omega_2(\zeta) - \Omega_1(\zeta), & \zeta &= x + ib_1,\\
-[\mu + K_2^+(\zeta)]\,\Phi^-(\zeta) &= \Omega_3(\zeta) - \Omega_2(\zeta), & \zeta &= x + ia_2,\\
K_2^-(\zeta)\,\Phi^-(\zeta) + F^-(\zeta) &= -\Omega_3(\zeta), & \zeta &= x + ib_2.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Эта задача по своему характеру сходна с задачей (4.6). В частном случае, когда функции $K_1^+(\zeta)$ и $K_2^-(\zeta)$ аналитически продолжимы на полосы $b_1 < \operatorname{Im}\zeta \leqslant a_1$ и $b_2 \leqslant \operatorname{Im}\zeta < a_2$ соответственно, причем в этих полосах они имеют лишь полярные особенности в конечном числе точек, задачу (4.8) можно свести, подобно задаче (4.6), к краевой задаче Римана, отличающейся от задачи (4.7) только тем, что решение теперь должно удовлетворять дополнительным условиям в точках указанных выше полос, где функции K_1^+ и K_2^- имеют полюсы. Формулы, дающие решение задачи Римана с дополнительными условиями, приведены в работе ([11]) (стр. 38—39) *. Определив функции Φ^+ и Φ^-, находим решение уравнения (4.1) по формуле:

$$\varphi = V_{b_1}^{-1}\Phi^+ - V_{a_2}^{-1}\Phi^-.$$

Случай 5. $b_2 < b_1 < a_2 < a_1$. Ранг равен четырем. Преобразование уравнения (4.2) приводит к краевой задаче: найти функции Φ^+, Φ^-, Ω_1,

* Эти формулы выведены для случая $\alpha < \operatorname{Im} z_k < \beta$ [см. ([11]), условия (2.4)]. Здесь z_k — точки, в которых накладываются дополнительные условия на решение. В нашем случае точки лежат вне полосы $\alpha < \operatorname{Im} z < \beta$. Однако нетрудно усмотреть, что указанные формулы не изменятся, если вместо отмеченного выше неравенства считать вообще $\operatorname{Im} z_k \neq \alpha$, $\operatorname{Im} z_k \neq \beta$.

Ω_2 и Ω_3, принадлежащие пространствам $\{\{b_1, \infty\}\}$, $\{\{-\infty, a_2\}\}$, $\{\{a_2, a_1\}\}$, $\{\{b_1, a_2\}\}$, $\{\{b_2, b_1\}\}$ соответственно и удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} &K_1^+(\zeta)\Phi^+(\zeta) - F^+(\zeta) = \Omega_1(\zeta), && \zeta = x + ia_1, \\ &-[\mu + K_2^+(\zeta)]\Phi^-(\zeta) = \Omega_2(\zeta) - \Omega_1(\zeta), && \zeta = x + ia_2, \\ &[\lambda - K_1^-(\zeta)]\Phi^+(\zeta) = \Omega_3(\zeta) - \Omega_2(\zeta), && \zeta = x + ib_1, \\ &K_2^-(\zeta)\Phi^-(\zeta) + F(\zeta) = -\Omega_3(\zeta), && \zeta = x + ib_2. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Решение этой задачи, как и предыдущей, в общем виде неизвестно. Если функции K_1^+ и K_1^- аналитически продолжимы до прямой $\zeta = x + ib_1$, а функции K_2^+ и K_2^- — до прямой $\zeta = x + ia_2$, причем в конечном числе точек у этих функций допускаются полюсы, то исследование задачи (4.9) значительно упрощается. Эту задачу можно свести к задаче Римана различными способами. Наиболее удобным является, по-видимому, следующий. Установив, что все функции аналитичны в полосе $b_1 < \operatorname{Im} z < a_2$ (за исключением конечного числа точек, где у некоторых функций имеются полюсы), исключаем функции Ω_1 и Ω_3 и приводим условия (4.9) к виду:

$$\left.\begin{aligned} &A_1(z)\Phi^+(z) + B_1(z) = \Omega_2(z), \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad (b_1 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant a_2) \\ &A_2(z)\Phi^-(z) + B_2(z) = \Omega_2(z), \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

где A_i и B_i — известные функции, $\Phi^+ \in \{\{b_1, \infty\}\}$, $\Phi^- \in \{\{-\infty, a_2\}\}$, $\Omega_2 \in \{\{b_1, a_2\}\}$. Решение этой «площадной» задачи находится среди решений задачи Римана с краевым условием на двух прямых, которую мы получим, полагая $z = x + ia_2$ в верхней строке формулы (4.10) и $z = x + ib_1$ — в нижней.

Решение уравнения (4.1) определяется по формуле

$$\varphi = V_\gamma^{-1}(\Phi^+ - \Phi^-),$$

где $b_1 \leqslant \gamma \leqslant a_2$.

Подробное рассмотрение остальных случаев, наряду с вышеприведенными, позволяет заключить, что все они делятся на три группы:

1) Группа $b_1 = a_2$. Полуплоскости аналитичности функций $\Phi^+(\zeta)$ и $\Phi^-(\zeta)$ имеют общую границу. Ранг уравнения (4.1) удовлетворяет неравенствам $1 \leqslant n \leqslant 3$. Равенства $n = 1$ и $n = 3$ соответствуют случаям 1 и 2. В остальных случаях данной группы ранг равен 2 и краевые задачи по характеру занимают промежуточное положение по сравнению с задачами (4.5) и (4.6). Так же, как и система (4.6), краевые условия этих задач при дополнительных предположениях сводятся к условию (4.5) задачи Римана на одной прямой.

2) Группа $b_1 > a_2$. Полуплоскости аналитичности функций $\Phi^+(\zeta)$ и $\Phi^-(\zeta)$ разделены полосой. Ранг удовлетворяет неравенствам $2 \leqslant n \leqslant 4$. Равенства $n = 2$ и $n = 4$ соответствуют случаям 3 и 4. Краевые задачи остальных случаев занимают промежуточное положение по сравнению с задачами (4.7) и (4.8). Как и система (4.8), краевые условия этих задач при дополнительных предположениях сводятся к условию (4.7) задачи Римана на двух прямых.

3) Группа $b_1 < a_2$. Полуплоскости аналитичности функций $\Phi^+(\zeta)$ и $\Phi^-(\zeta)$ имеют общую полосу. Ранг удовлетворяет неравенствам $2 \leqslant n \leqslant 4$. Случай $n=4$ рассмотрен выше (случай 5). Во всех остальных случаях при дополнительных предположениях об аналитической продолжимости функций K_1^+, K_1^-, K_2^+ и K_2^- на соответствующие полосы краевые задачи можно свести к «площадной» задаче (4.10). Это сведéние осуществляется еще проще, чем в случае системы (4.9), так как число прямых, несущих краевые условия этих задач, меньше четырех.

§ 5. «Парные» уравнения

Парные уравнения (1.3) удобнее изучать, когда они записаны следующим образом:

$$B_1\varphi \equiv \lambda\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_1(x-t)\,\varphi(t)\,dt = f_+(x) + \psi_-(x), \qquad -\infty < x < \infty,$$

$$B_2\varphi \equiv \mu\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(x-t)\,\varphi(t)\,dt = -f_-(x) + \psi_+(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{5.1}$$

В этой системе неизвестными являются функции φ и $\psi = \psi_+ - \psi_-$. Будем предполагать, что

$$k_1(x) \in \{a_1, b_1\}, \quad k_2(x) \in \{a_2, b_2\}$$

и что $V_{a_i} k_{i+}$ и $V_{b_i} k_{i-}$ — ограниченные функции ($i = 1, 2$).

Решение φ будем искать в наиболее широком пространстве типа $\{\alpha, \beta\}$, к каждому элементу которого применимы операторы B_1 и B_2 (см. пп. 1 и 5 § 2):

$$\varphi(x) \in \{\min(b_1, b_2),\ \max(a_1, a_2)\}. \tag{5.2}$$

Опираясь на результаты § 2, нетрудно установить, что функцию $f = f_+ - f_-$ следует брать в пространстве

$$f(x) \in \{\max[a_1, \min(b_1, b_2)], \quad \min[b_2, \max(a_1, a_2)]\}. \tag{5.3}$$

Если f не принадлежит этому пространству, то система (5.1) заведомо неразрешима в пространстве (5.2).

Аналогично получаем классы для функций ψ_+ и ψ_-:

$$\begin{aligned} &\psi_+(x) \in \{\max[a_2, \min(b_1, b_2)],\ \infty\}, \\ &\psi_-(x) \in \{-\infty, \min[b_1, \max(a_1, a_2)]\}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Случай $\max(a_1, a_2) = \min(b_1, b_2) = a$. При $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$ этот случай рассматривался И. М. Рапопортом [8] *. Согласно (5.2), (5.3) и (5.4), имеем: $\varphi, f, \psi_+, \psi_- \in \{a, a\}$. Каждое уравнение системы (5.1) приводится к виду (3.6), где $n = 1$. Обычным преобразованием Фурье находим:

$$\left.\begin{aligned} &[\lambda + K_1(\zeta)]\,\Phi(\zeta) - F^+(\zeta) = \Psi^-(\zeta), \\ &[\mu + K_2(\zeta)]\,\Phi(\zeta) + F^-(\zeta) = \Psi^+(\zeta), \end{aligned}\right\} \quad \zeta = x + ia.$$

---

* В работе [8], а также в работах [6], [9] — [12], постановка краевых задач требует уточнения. Как указал Б. В. Хведелидзе, решение этих задач должно быть представимо интегралом типа Коши с плотностью из L_2. Здесь мы исправляем этот недочет.

Исключая функцию $\Phi(\zeta)$,

$$\Phi(\zeta) = \frac{\Psi^-(\zeta) + F^+(\zeta)}{\lambda + K_1(\zeta)} = \frac{\Psi^+(\zeta) - F^-(\zeta)}{\mu + K_2(\zeta)}, \tag{5.5}$$

приходим к задаче Римана: найти функции $\Psi^+(\zeta)$ и $\Psi^-(\zeta)$ в пространствах $\{\{a, \infty\}\}$ и $\{\{-\infty, a\}\}$ соответственно, удовлетворяющие условию (5.5) и дополнительному условию

$$\frac{\Psi^+(\zeta) - F^-(\zeta)}{\mu + K_2(\zeta)} \in \{\{a, a\}\}. \tag{5.6}$$

Эта задача решается так же, как задача (4.5). Отличие заключается лишь в том, что из общего решения задачи (5.5) необходимо выбрать решения, удовлетворяющие условию (5.6). Если функции $\lambda + K_1(\zeta)$ и $\mu + K_1(\zeta)$ удовлетворяют условию Гёльдера и не обращаются в нуль, то условие (5.6) удовлетворяется автоматически и мы получаем следующий результат:

Однородная система (5.1) имеет χ линейно независимых решений, если индекс

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} d \arg \frac{\mu + K_2(\zeta)}{\lambda + K_1(\zeta)}$$

положителен; при $\chi \leqslant 0$ однородная система имеет только нулевое решение; при $\chi \geqslant 0$ неоднородная система разрешима при любой правой части; при $\chi < 0$ решение существует, если правая часть удовлетворяет $(-\chi)$ условиям.

Определив Ψ^+ или Ψ^-, находим Φ по формуле (5.5), а затем — решение системы (1.3) по формуле:

$$\varphi = V_a^{-1}\Phi.$$

Случай $\max(a_1, a_2) = a < b = \min(b_1, b_2)$. Согласно (5.2) — (5.4), $\varphi, f \in \{b, a\}$, $\psi_+ \in \{b, \infty\}$, $\psi_- \in \{-\infty, a\}$. Преобразование системы (5.1) в соответствии с § 3 (ранг равен двум) приводит к следующей краевой задаче: найти функции Φ^+, Φ^-, Ψ^+, Ψ^-, Ω_1 и Ω_2 в пространствах $\{b, \infty\}\}$, $\{\{-\infty, a\}\}$, $\{\{b, \infty\}\}$, $\{\{-\infty, a\}\}$, $\{\{a, b\}\}$ и $\{\{a, b\}\}$ соответственно, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned}
&[\lambda + K_1(\zeta)]\,\Phi^+(\zeta) - F^+(\zeta) = \Omega_1(\zeta), && \zeta = x + ib,\\
&[\lambda + K_1(\zeta)]\,\Phi^-(\zeta) + \Psi^-(\zeta) = \Omega_1(\zeta), && \zeta = x + ia,\\
&[\mu + K_2(\zeta)]\,\Phi^+(\zeta) - \Psi^+(\zeta) = \Omega_2(\zeta), && \zeta = x + ib,\\
&[\mu + K_2(\zeta)]\,\Phi^-(\zeta) - F^-(\zeta) = \Omega_2(\zeta), && \zeta = x + ia.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

При дополнительных предположениях относительно функций $\lambda + K_1(\zeta)$ и $\mu + K_2(\zeta)$ в работе ([11]) дано решение сходной задачи *. Здесь мы ограничимся формулировкой одного результата: если функции $\lambda + K_1(\zeta)$ и $\mu + K_2(\zeta)$ удовлетворяют условию Гёльдера и не обращаются в нуль,

* В работе ([11]) функции ψ_+ и ψ_- введены по-иному, вследствие чего условия (4.14) работы ([11]) отличаются от условий (5.7). Это обстоятельство, однако, не влияет ни на метод решения, ни на конечный результат.

то однородная система (5.1) имеет $\max(\chi, \nu, 0)$ линейно независимых решений, где

$$\chi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{ia-\infty}^{ia+\infty} d\arg[\mu + K_2(\zeta)[- \frac{1}{2\pi}\int\limits_{ib-\infty}^{ib+\infty} d\arg[\lambda + K_1(\zeta)],$$

а ν — число общих нулей функций $\lambda + K_1(z)$ и $\mu + K_2(z)$ в полосе $a < \operatorname{Im} z < b$; при $\chi \geqslant \nu$ неоднородная система разрешима при любой правой части f; при $\chi < \nu$ неоднородная система разрешима, если удовлетворены необходимые и достаточные условия, число которых равно $\nu - \chi$. Функция $\varphi(x)$ находится по формуле

$$\varphi = V_b^{-1}\Phi^+ - V_a^{-1}\Phi^-.$$

Случай $a_1 \leqslant b_1 < a_2 \leqslant b_2$. Преобразование системы (5.1) приводит к задаче Римана: найти функции Ψ^-, Φ и Ψ^+ в пространствах $\{\{-\infty, b_1\}\}$, $\{\{b_1, a_2\}\}$ и $\{\{a_2, \infty\}\}$ соответственно, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} &[\lambda + K_1(\zeta)]\,\Phi(\zeta) - F^+(\zeta) = \Psi^-(\zeta), \quad \zeta = x + ib_1, \\ &[\mu + K_2(\zeta)]\,\Phi(\zeta) + F^-(\zeta) = \Psi^+(\zeta), \quad \zeta = x + ia_2. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Этот случай рассматривался также в работе ([11]) (стр. 45—46).

Последний случай является единственным среди большой группы случаев, характеризующейся неравенством

$$\max(a_1, a_2) > \min(b_1, b_2);$$

изучение этого случая непосредственно сводится к изучению задачи Римана (5.8). В остальных случаях получаются более сложные задачи.

В качестве примера рассмотрим

Случай $b_1 < b_2 < a_1 < a_2$. Преобразование системы (5.1) приводит к следующей задаче: найти функции $\Phi(\zeta)$, $\Omega_1(\zeta)$ и $\Omega_2(\zeta)$, принадлежащие пространству $\{\{b_1, a_2\}\}$, и функции $\Psi^+(\zeta)$ и $\Psi^-(\zeta)$, принадлежащие пространствам $\{\{a_2, \infty\}\}$ и $\{\{-\infty, b_1\}\}$ соответственно, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} [\lambda - K_1^-(\zeta)]\,\Phi(\zeta) - \Psi^-(\zeta) &= \Omega_1(\zeta), \quad \zeta = x + ib_1, \\ -K_1^+(\zeta)\,\Phi(\zeta) + F^+(\zeta) &= \Omega_1(\zeta), \quad \zeta = x + ia_2, \\ [\mu + K_2^+(\zeta)]\,\Phi(\zeta) - \Psi^+(\zeta) &= \Omega_2(\zeta), \quad \zeta = x + ia_2, \\ K_2^-(\zeta)\,\Phi(\zeta) - F^-(\zeta) &= \Omega_2(\zeta), \quad \zeta = x + ib_1. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Эта задача исследована в предположении, что функции $K_1^+(\zeta)$ и $K_2^-(\zeta)$ продолжимы соответственно на полосы $b_1 < \operatorname{Im} z < a_1$ и $b_2 < \operatorname{Im} z < a_2$, в которых они имеют конечное число полюсов. В этом случае задачу (5.9) можно свести к задаче (5.8), на решение Φ которой накладываются дополнительные условия; число этих условий равно числу полюсов функций K_1^+ и K_2^- в указанных выше полосах минус число общих полюсов этих функций в полосе $b_2 < \operatorname{Im} z < a_1$.

Аналогичный характер носит исследование и в остальных случаях.

§ 6. Полное уравнение

Рассмотрим частный случай уравнения (3.3):

$$\frac{\lambda+\mu}{2}\varphi(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}a_1(x-t)\varphi(t)\,dt+\frac{\lambda-\mu}{2}\varphi(x)\operatorname{sgn}x+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}a_2(x-t)\varphi(t)\operatorname{sgn}t\,dt+T\varphi=f(x),\quad -\infty<x<\infty,\qquad(6.1)$$

где $a_j(x)\in\{\alpha,\alpha\}$, $V_\alpha a_j=A_j(\zeta)$ — ограниченные функции, $j=1,2$, T — вполне непрерывный оператор в пространстве $\{\alpha,\alpha\}$. В этом пространстве ищется решение φ и задается правая часть f. Уравнению (6.1) можно придать вид:

$$M\varphi\equiv C(x)\varphi(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}k_1(x-t)\varphi(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}k_2(x-t)\varphi(t)\,dt+T\varphi=f(x),\quad -\infty<x<\infty,\qquad(6.2)$$

где $k_1=a_1+a_2$, $k_2=a_1-a_2$, $C=\dfrac{(\lambda+\mu)+(\lambda-\mu)\operatorname{sgn}x}{2}$. Уравнение (6.1) — ранга 1, все его члены принадлежат пространству $\{\alpha,\alpha\}$. Обычное преобразование Фурье уравнения (6.1) дает:

$$\left[\frac{\lambda+\mu}{2}+A_1(\zeta)\right]\Phi(\zeta)+\frac{\frac{\lambda-\mu}{2}+A_2(\zeta)}{\pi i}\int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty}\frac{\Phi(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta}+T_1\Phi=F(\zeta),\ \ \zeta=x+i\alpha.\qquad(6.3)$$

Здесь $\Phi, F\in\{\{\alpha,\alpha\}\}$, $T_1=V_\alpha T$ — вполне непрерывный оператор. При преобразовании мы использовали формулу

$$V_\alpha(\varphi(x)\operatorname{sgn}x)=\frac{1}{\pi i}\int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty}\frac{\Phi(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta},\quad \zeta=x+i\alpha,$$

которую нетрудно доказать, опираясь на теоремы 90 и 91 книги ([4]). Уравнение (6.3) является особым уравнением с ядром типа Коши. На основании эквивалентности уравнений (6.1) и (6.3), все результаты теории особых интегральных уравнений, применимые к уравнению (6.3) см. ([13]), ([15]), ([17])], без труда переносятся на уравнение (6.1). Элементы теории уравнения вида (6.1) приведены в работе ([12]) *.

В качестве еще одного примера, в котором используется указанный в § 3 метод преобразования, рассмотрим уравнение (6.2) при следующих

---

* В этой работе теория уравнения (6.1) построена без перехода к уравнению (6.3). Следует отметить, что некоторые рассуждения автора нуждаются в обосновании. Так, задача Римана решена там без предположений, связанных с выполнимостью условия Гёльдера (обоснование сделано позднее М. Г. Крейном и И. Ц. Гохбергом); неравенство на стр. 52 может оказаться несправедливым (однако и в этом случае оператор

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}b^*(x-t)\,dt\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}n_1(t,\tau)f(\tau)\,d\tau$$

остается вполне непрерывным); неточно сформулирована теорема на стр. 46.

предположениях: $k_1(x) \in \{\beta, \beta\}$, $k_2(x) \in \{\alpha, \alpha\}$, $\alpha < \beta$, $V_\beta k_1$ и $V_\alpha k_2$ — ограниченные функции, T — вполне непрерывный оператор, действующий в пространстве $\{\beta, \alpha\}$. Пользуясь пп. 2, 4 и 7 § 2, нетрудно установить, что оператор M переводит всякую функцию пространства $\{\beta, \alpha\}$ в новую функцию того же пространства. Решение φ будем искать в пространстве $\{\beta, \alpha\}$; в том же пространстве следует брать свободный член f.

Представляем уравнение (6.2) в виде (3.6):

$$\underset{\{\beta,\ \beta\}}{\left[(\lambda+\mu)\varphi_+(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} k_1(x-t)\varphi_+(t)\,dt + T_+\varphi - f_+(x)\right]} +$$

$$+\underset{\{\alpha,\ \alpha\}}{\left[-(\lambda-\mu)\varphi_-(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} k_2(x-t)\varphi_-(t)\,dt - T_-\varphi + f_-(x)\right]} = 0.$$

Здесь $T_\pm = \frac{(\pm I + S)T}{2}$. Ранг равен двум. Преобразование по Фурье дает:

$$[\lambda+\mu+K_1(\zeta)]\Phi^+(\zeta) + V_\beta T_+(V_\beta^{-1}\Phi^+ - V_\alpha^{-1}\Phi^-) - F^+(\zeta) = \Omega(\zeta), \quad \zeta = x+i\beta,$$
$$[\lambda-\mu+K_2(\zeta)]\Phi^-(\zeta) + V_\alpha T_-(V_\beta^{-1}\Phi^+ - V_\alpha^{-1}\Phi^-) - F^-(\zeta) = \Omega(\zeta), \quad \zeta = x+i\alpha. \tag{6.4}$$

Получена краевая задача: найти функции Φ^+, Φ^- и Ω, принадлежащие соответственно пространствам $\{\{\beta, \infty\}\}$, $\{\{-\infty, \alpha\}\}$ и $\{\{\alpha, \beta\}\}$ и удовлетворяющие условиям (6.4). Задачу (6.4) нетрудно свести к особому уравнению с ядром Коши. Для этого достаточно заменить функции Φ^+, Φ^- и Ω интегралом типа Коши и его плотностью

$$\Phi(\zeta) = \begin{cases}\Omega(\zeta) - \Phi^+(\zeta), & \zeta = x+i\beta,\\ \Omega(\zeta) - \Phi^-(\zeta), & \zeta = x+i\alpha\end{cases}$$

по формулам Ю. В. Сохоцкого:

$$\Omega(\zeta) = \frac{\Phi(\zeta)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\Phi(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta}, \quad \zeta \in \gamma,$$

$$\Phi^+(\zeta) = -\frac{\Phi(\zeta)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\Phi(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta}, \quad \zeta = x+i\beta,$$

$$\Phi^-(\zeta) = -\frac{\Phi(\zeta)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\Phi(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta}, \quad \zeta = x+i\alpha,$$

где γ обозначает контур, состоящий из прямой $\operatorname{Im}\zeta = \alpha$, проходимой слева направо, и прямой $\operatorname{Im}\zeta = \beta$, проходимой справа налево. Вместо первой строки (6.4) будем иметь:

$$[\lambda+\mu+K_1(\zeta)]\left[-\frac{\Phi(\zeta)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\Phi(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta}\right] + V_\beta T_+[V_\beta^{-1}(-\Phi+\Omega) -$$
$$- V_\alpha^{-1}(-\Phi+\Omega)] - F^+(\zeta) = \frac{\Phi(\zeta)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\Phi(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta}$$

или

$$-\frac{\lambda+\mu+1+K_1(\zeta)}{2}\Phi(\zeta) + \frac{\lambda+\mu-1+K_1(\zeta)}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\Phi(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta} +$$
$$+ V_\beta T_+ W\Phi = F^+(\zeta), \quad \zeta = x+i\beta, \tag{6.5}$$

где $W\Phi \equiv V_{\gamma}^{-1}\Phi(x+i\alpha) - V_{\beta}^{-1}\Phi(x+i\beta)$. Аналогично, вторую строку условий (6.4) можно записать в виде:

$$-\frac{\lambda-\mu+1+K_2(\zeta)}{2}\Phi(\zeta)+\frac{\lambda-\mu-1+K_2(\zeta)}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\Phi(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta}+$$
$$+V_{\alpha}T_{-}W\Phi=F^{-}(\zeta),\quad \zeta=x+i\alpha. \tag{6.6}$$

Нетрудно установить, что оператор

$$T_1\Phi=\begin{cases}V_{\beta}T_{+}W\Phi, & \zeta=x+i\beta,\\ V_{\gamma}T_{-}W\Phi, & \zeta=x+i\alpha,\end{cases}$$

является вполне непрерывным в гильбертовом пространстве $L_2(\gamma)$ функций, квадрат модуля которых интегрируем вдоль контура γ. Совокупность равенств (6.5), (6.6) есть особое уравнение на контуре γ с ядром типа Коши.

Ввиду эквивалентности уравнений (6.5) — (6.6) и (6.1), на последнее уравнение с очевидными изменениями переносится вся теория особых интегральных уравнений, приложимая к уравнениям (6.5) — (6.6).

Поступило
22.IV. 1957

ЛИТЕРАТУРА

[1] Сущинский М. М., О нахождении истинного контура линии комбинационного рассеяния света по наблюдаемому, ЖЭТФ, 25, вып. 1(7) (1953), 87—94.

[2] Ван дер Поль Б. и Бреммер Х., Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа, ИЛ, 1952.

[3] Wiener N. und Hopf E., Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen, Sitz. Akad. Wiss., Berlin (1931), 696—706.

[4] Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, М.—Л., 1948.

[5] Фок В. А., О некоторых интегральных уравнениях математической физики, Матем. сборн., 14(56) : 1—2 (1944), 3—50.

[6] Рапопорт И.М., Об одном классе сингулярных интегральных уравнений, Доклады Ак. наук СССР, 59, № 8 (1948), 1403—1406.

[7] Снеддон И., Преобразования Фурье, ИЛ, 1955.

[8] Рапопорт И. М., О некоторых «парных» интегральных и интегродифференциальных уравнениях, Сборн. трудов Института матем. АН УССР, № 12 (1949), 102—118.

[9] Гахов Ф. Д. и Черский Ю. И., Особые интегральные уравнения типа свертки и площадная задача типа задачи Римана, Учен. зап. Казанск. гос. ун-та, 114, кн. 8 (1954), 21—33.

[10] Гахов Ф. Д. и Черский Ю. И., Интегральные уравнения типа свертки, Доклады Ак. наук СССР, 99, № 2 (1954), 197—199.

[11] Гахов Ф. Д. и Черский Ю. И., Особые интегральные уравнения типа свертки, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 20 (1956), 33—52.

[12] Черский Ю. И., О некоторых особых интегральных уравнениях, Учен. зап. Казанск. гос. ун-та, 113, кн. 10 (1953), 43—55.

[13] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, М.—Л., 1946.

[14] Гахов Ф. Д., Краевые задачи аналитических функций и сингулярные интегральные уравнения, Изв. Казанск. физ.- матем. об-ва, 14, сер. 3 (1949), 75—159.

[15] Чикин Л. А., Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений, Учен. зап. Казанск. гос. ун-та, 113, кн. 10 (1953), 57—106.

[16] Хведелидзе Б. В., Сингулярные интегральные уравнения в особых интегралах Коши — Лебега, Сообщ. АН Груз. ССР, 8, № 7 (1947), 427—434.

[17] Михлин С. Г., Сингулярные интегральные уравнения, Успехи матем. наук, III, вып 3(25) (1948), 29—112.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 379—386

Г. Ц. ТУМАРКИН и С. Я. ХАВИНСОН

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ КЛАССА В. И. СМИРНОВА (КЛАССА S)

(*Представлено академиком* **В. И. Смирновым**)

Понятие областей класса S, введенное В. И. Смирновым для односвязного случая и играющее важную роль в теории аналитических функций, обобщается на случай многосвязных областей. Устанавливается эквивалентность различных возможных путей введения класса S в многосвязном случае. Исследуются свойства аналитических функций в многосвязных областях класса S.

Введение

Известна роль, которую играют в различных вопросах теории аналитических функций в односвязных областях области, введенные В. И. Смирновым в работе (1) [см. также (2)].

Напомним их определение. Конечная односвязная область G с жордановой спрямляемой границей называется областью В. И. Смирнова ($G \in S$), если $\ln|\varphi'(w)|$, где $\varphi(w)$ — конформное отображение круга $|w|<1$ на G, представляется в круге $|w|<1$ интегралом Пуассона:

$$\ln|\varphi'(re^{i\alpha})| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\alpha)} \ln|\varphi'(e^{i\theta})|\, d\theta. \qquad (1)$$

В случае, когда G содержит ∞, надо пользоваться отображением на $|w|>1$ или предварительно перевести G в конечную область G^* отображением $\frac{1}{z-z_0}$, где $z_0 \overline{\in} G$. (Равносильность этих определений показывается без труда.)

В последнее время в связи с различными вопросами теории аналитических функций в многосвязных областях, как, например, экстремальные проблемы и проблемы аппроксимации [см. (3), (4), (5)], потребовалось рассмотреть многосвязный аналог областей класса S. Этот класс естественно определять двумя способами. Первый способ содержится в следующем определении:

Определение. n-связная область $G \in S$, если каждая из односвязных областей $G_i \in S$. Здесь G_i — односвязная область, содержащая G и ограниченная компонентой γ_i границы Γ области G.

Это определение и было принято в работах (3), (4), (5). Другой путь состоит в том, чтобы прямо пользоваться определением, действующим в односвязном случае, с естественной заменой отображения на круг

отображением на круговую каноническую область и заменой формулы Пуассона формулой Грина. Мы покажем в этой работе, что оба указанных определения эквивалентны. При доказательстве этой эквивалентности мы выбираем не наиболее прямой путь, который должен был бы состоять в непосредственном изучении связи между свойствами конформного отображения G на круговую каноническую область и свойствами конформных отображений каждой области G_i на круг. Зато избранный нами вариант доказательства позволяет попутно установить ряд результатов, которые, на наш взгляд, представляют самостоятельный интерес.

Кроме того, в работе изучаются свойства различных классов аналитических функций в областях класса S.

§ 1. Классы E_p в областях $G \in S$

Пусть G — n-связная область с жордановой спрямляемой границей $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i$. Мы будем рассматривать классы $E_p(G)$ однозначных аналитических в G функций, которые определяются следующим образом [см. ([3])]: $f(z) \in E_p(G)$, $p > 0$, если в G существует последовательность (для каждой $f(z)$ своя) спрямляемых контуров $\Gamma^j = \bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i^j$, где γ_i^j — замкнутые контуры и $\gamma_i^j \xrightarrow[j\to\infty]{} \gamma_i$, такая, что

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \text{ дл. } \Gamma^j < \infty, \tag{2}$$

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \int_{\Gamma^j} |f(z)|^p \, |dz| < \infty. \tag{3}$$

В односвязном случае классы E_p были введены и изучены в работе В. И. Смирнова ([1]). Впоследствии М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев ([6]) показали, что при определении класса E_p в односвязном случае можно от условия (2) отказаться. Однако использование ограничения (2) позволяет доказывать некоторые свойства функций из $E_p(G)$ путем редукции к односвязному случаю при помощи следующей, легко проверяемой теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы $f(z) \in E_p(G)$, необходимо и достаточно, чтобы имело место разложение:*

$$f(z) = f_1(z) + \ldots + f_n(z), \tag{4}$$

где $f_i(z) \in E_p(G_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (G_i определено во введении).

Из теоремы 1 непосредственно следует, что функция $f(z) \in E_p(G)$ имеет почти всюду на Γ угловые граничные значения $f(\zeta)$ и

$$\int_{\Gamma} |f(\zeta)|^p \, |d\zeta| < \infty.$$

Из разложения (4) вытекает также распространение на многосвязный случай хорошо известных теорем В. И. Смирнова [см. ([1]), ([2])].

ТЕОРЕМА 2. *Если $f(z) \in E_p(G)$, причем $G \in S$, и граничные значения $f(\zeta)$ функции $f(z)$ суммируемы в степени $p' > p$, то $f(z) \in E_{p'}(G)$.*

При помощи теоремы 1 доказательство настоящего утверждения немедленно приводится к случаю односвязной области.

ТЕОРЕМА 3. *Если $f(z) \in E_p(G)$, причем $G \in S$, а граничные значения $f(\zeta)$ функции $f(z)$ ограничены почти всюду на Γ, $|f(\zeta)| \leqslant M$, то функция $f(z)$ в области G ограничена по модулю той же константой M.*

Так как $|f(\zeta)| \leqslant M$, то $|f(\zeta)|$ суммируема в любой степени $p_1 > p$. Следовательно, по предыдущей теореме, $f(z) \in E_{p_1}(G)$ при любом $p_1 > p$. Отсюда, в свою очередь, следует, что функции $[f(z)]^n$ при любом целом положительном n входят в класс $E_1(G)$. Представим $[f(z)]^n$ по формуле Коши. (Хорошо известно, что если G — односвязная область, то $E_1(G)$ совпадает с классом функций, представимых интегралом Коши через свои граничные значения [см. (1), а также (2)]. Этот факт при помощи теоремы о разложении легко переносится и на многосвязный случай [см., например, (3)]. Мы имеем:

$$[f(z)]^n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{[f(\zeta)]^n}{\zeta - z}\, d\zeta, \tag{5}$$

откуда следует:

$$|f(z)| \leqslant M \sqrt[n]{N},$$

где число N зависит лишь от положения точки $z \in G$. При $n \to \infty$ найдем:

$$|f(z)| \leqslant M,$$

что и требовалось доказать.

Примененный нами метод основан на хорошо известном приеме Ландау [см., например, (7)].

Нам потребуется еще класс $D(G)$ функций, впервые рассматривавшийся для односвязного случая в работе (1).

Пусть $\{G^j\}$ — последовательность жордановых областей с границами Γ^j, исчерпывающая G. Обозначим через $\omega^j(E, G^j, z_0)$ гармоническую меру множества $E \in \Gamma^j$ относительно области G^j, вычисленную в z_0.

Определение. Аналитическая в области G функция $f(z) \in D(G)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $\omega^j(E, G^j, z_0) < \delta$ вытекает неравенство

$$\int_E \ln^+ |f(z)|\, d\omega^j(e, G^j, z_0) < \varepsilon.$$

Здесь z_0 — произвольная точка в области G. Свойство, фигурирующее в определении $D(G)$, мы кратко будем называть равностепенной абсолютной непрерывностью семейства

$$\left\{\int_E \ln^+ |f(z)|\, d\omega^j\right\}$$

относительно гармонической меры. В односвязном случае так определенный класс $D(G)$ совпадает с рассматривавшимся В. И. Смирновым.

Имеет место следующая теорема разложения, проверяемая несколько сложнее, чем теорема 1.

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы $f(z) \in D(G)$, необходимо и достаточно, чтобы имело место разложение (4), где функции $f_i(z) \in D(G_i)$ определяются единственным образом с точностью до постоянных слагаемых.*

Теперь можно доказать следующую теорему 5, которая понадобится нам в дальнейшем.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть область $G \in S$. Тогда при любом $p > 0$ $E_p(G) \subset \subset D(G)$. Обратно, пусть для какого-либо $p_0 > 0$ $E_{p_0}(G) \subset D(G)$. Тогда $G \in S$.*

Докажем сперва вторую часть теоремы. Допустим, что $E_{p_0}(G) \subset D(G)$, но $G \bar{\in} S$. Тогда найдется такой граничный контур γ_i, что $G_i \bar{\in} S$. Рассмотрим класс $E_{p_0}(G_i)$, который, как известно, не содержится в $D(G_i)$, если $G_i \bar{\in} S$. [Примеры функций, входящих в $E_{p_0}(G_i)$, но не содержащихся в $D(G_i)$, см., например, в книге (²), гл. III.]

Возьмем функцию $f_i(z)$, обладающую указанным свойством. Тогда

$$f_i(z) \in E_{p_0}(G_i) \subset E_{p_0}(G).$$

Но $f_i(z) \bar{\in} D(G_i)$ и, следовательно, $f_i(z) \bar{\in} D(G)$ (в силу разложения (4), единственного с точностью до постоянных констант).

Значит, класс $E_{p_0}(G)$, вопреки условию, не содержится в $D(G)$.

Пусть теперь $G \in S$. Надо доказать включение $E_p(G) \subset D(G)$. В самом деле, если $f(z) \in E_p(G)$, то, согласно теореме 1, имеет место разложение (4), где $f_i(z) \in E_p(G_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Но $G_i \bar{\in} S$ по условию, а известно, что в такой односвязной области $E_p(G_i) \subset D(G_i)$ [см., например, (²), стр. 260]. Поэтому $f_i(z) \in D(G_i)$ и, следовательно, по теореме 4, $f(z) \in D(G)$.

Следствие. *Если для некоторого p_0 $E_{p_0}(G) \subset D(G)$, то и при всех p $E_p(G) \subset D(G)$.*

Наконец, мы будем еще пользоваться аналитическими функциями класса $H_p(G)$, которые были в последнее время исследованы в ряде работ [см. (⁸), (⁹)].

Определение. $f(z) \in H_p(G)$, $p > 0$, если $|f(z)|^p$ имеет в области G гармоническую мажоранту.

В конечносвязной области для классов $H_p(G)$ имеет место теорема разложения, аналогичная теоремам 1 и 4 [см. (⁸)]. Отметим, кроме того, что при любом p $H_p(G) \subset D(G)$.

§ 2. Представимость $\ln|\varphi'(w)|$, где $z = \varphi(w)$ — конформное отображение канонической круговой области на область G, по формуле Грина *

Целью настоящего параграфа является доказательство того факта, что $\ln|\varphi'(\omega)|$ представляется по формуле Грина тогда и только тогда, когда $G \in S$. Таким образом, отправляясь при введении многосвязных областей типа S от редукции к односвязным областям, мы получаем

* Здесь, как и всюду, предполагается, что граница G спрямляемая.

возможность определять S при помощи конформного отображения G на K, причем полученный критерий (теорема 8) полностью аналогичен тому, который действует в односвязном случае.

ТЕОРЕМА 6. *Для того чтобы функция* $\ln|\varphi'(w)|$ *была представима в области* K *по формуле Грина, необходимо и достаточно, чтобы* $\frac{1}{\varphi'(w)} \in D(G)$.

Доказательство. Предположим, что для $\ln|\varphi'(w)|$ имеет место формула Грина:

$$\ln|\varphi'(w)| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Lambda} \ln|\varphi'(\zeta)| \frac{\partial g}{\partial n} ds. \tag{6}$$

Здесь $g(\zeta, w)$ — функция Грина области K с полюсом w. Заметим, что включение $\varphi'(w) \in H_1(K)$ — факт, хорошо известный для односвязных областей со спрямляемой границей [см., например, ([2])] и проверяемый аналогичными рассуждениями для конечносвязных областей. Так как $H_1(K) \subset D(K)$, то $\varphi'(w) \in D(K)$. Поэтому наилучшая гармоническая мажоранта $u(w)$ функции $\ln^+|\varphi'(w)|$ представляется в K по формуле Грина [см. ([10]), теорема 2 и ([11]), теорема 4]:

$$u(w) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Lambda} \ln^+|\varphi'(\zeta)| \frac{\partial g}{\partial n} ds. \tag{7}$$

Используя равенство

$$\ln|\varphi'(w)| = \ln^+|\varphi'(w)| - \ln^+\frac{1}{|\varphi'(w)|},$$

легко заключить, что функция

$$u(w) - \ln|\varphi'(w)| = u_1(w)$$

будет гармонической мажорантой в K для $\ln^+\frac{1}{|\varphi'(w)|}$, и, в силу равенств (6) и (7), получаем, что $u_1(w)$ представляется по формуле Грина:

$$u_1(w) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Lambda} \ln^+\frac{1}{|\varphi'(\zeta)|} \frac{\partial g}{\partial n} ds, \tag{8}$$

а это, как нетрудно заметить, и означает, что

$$\frac{1}{\varphi'(w)} \in D(K).$$

Доказательство достаточности проводится путем вывода равенства (6) из равенств (7) и (8).

ТЕОРЕМА 7. *Для того чтобы* $E_p(G) \subset D(G)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\frac{1}{\varphi'(w)} \in D(K)$.

Доказательство. Как и для односвязных областей [см., например, ([2])], можно доказать, что для того чтобы $f(z) \in E_p(G)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $|f[\varphi(w)]|^p |\varphi'(w)|$ имела гармоническую мажоранту в K, а это, в свою очередь, эквивалентно равномерной огра-

ниченности интегралов

$$\int_{\Lambda^j} |f[\varphi(w)]|^p \, |\varphi'(w)| \, d\omega^j < C, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Λ^j — границы областей K^j, исчерпывающих K [см. ([12])].

Докажем, что из (9) следует, что семейство интегралов

$$\int_E \ln^+ \{ |f[\varphi(w)]|^p \, |\varphi'(\omega)| \} \, d\omega^j, \quad E \subset \Lambda^j, \tag{10}$$

равностепенно абсолютно непрерывно относительно гармонической меры контуров Λ^j. Для этого воспользуемся неравенством между геометрическим и арифметическим средними:

$$\int_E \ln^+ \{ |f[\varphi(w)]|^p \, |\varphi'(w)| \} \, d\omega^j < \int_E \ln \{ |f[\varphi(w)]|^p \, |\varphi'(w)| + 1 \} \, d\omega^j <$$

$$< \omega^j(E) \times \ln \left\{ \frac{1}{\omega^j(E)} \cdot \int_E \{ |f[\varphi(w)]|^p \, |\varphi'(w)| + 1 \} \, d\omega^j \right\}. \tag{11}$$

Используя (9), получаем из (11):

$$\int_E \ln^+ \{ |f[\varphi(w)]|^p \, |\varphi'(w)| \} \, d\omega^j < \omega^j(E) \times \ln \left[\frac{C}{\omega^j(E)} + 1 \right], \tag{12}$$

откуда и следует равностепенная абсолютная непрерывность семейства (10) относительно гармонической меры.

Предположим теперь, что $f(z) \in E_p(G)$ и $\frac{1}{\varphi'(w)} \in D(K)$. Тогда, используя неравенство

$$\ln^+ |f[\varphi(w)]|^p \leqslant \ln^+ \{ |f[\varphi(w)]|^p \, |\varphi'(w)| \} + \ln^+ \frac{1}{|\varphi'(w)|}$$

и только что доказанную равностепенную абсолютную непрерывность относительно гармонической меры семейства (10), убедимся в равностепенной абсолютной непрерывности относительно гармонической меры семейства

$$\left\{ \int_E \ln^+ |f[\varphi(w)]| \, d\omega^j \right\}, \quad E \subset \Lambda_j.$$

Это и доказывает включение $f(z) \in D(G)$.

Пусть $E_p(G) \subset D(G)$; докажем, что тогда $\frac{1}{\varphi'(w)} \in D(K)$. Действительно, в этом случае $E_1(G) \subset D(G)$ (см. следствие из теоремы 5). Поэтому входящая в $E_1(G)$ функция $\psi'(z)$, где $w = \psi(z)$ отображает конформно G на K, будет принадлежать $D(G)$ [доказательство для односвязного случая см. в ([2])]. В силу конформной инвариантности класса $D(G)$, отсюда следует, что

$$\frac{1}{\varphi'(w)} = \psi'[\varphi(w)] \in D(K),$$

что и требовалось доказать.

Сопоставляя теоремы 5, 6, 7, мы получаем следующую теорему, являющуюся непосредственным распространением на многосвязные области определения односвязных областей класса S, состоящего в представимости $\ln|\varphi'(w)|$ интегралом Пуассона.

ТЕОРЕМА 8. *Для того чтобы конечносвязная область G со спрямляемой границей принадлежала классу S, необходимо и достаточно, чтобы функция $\ln|\varphi'(w)|$ представлялась в области K по формуле Грина.*

Эта теорема может быть доказана и непосредственно.

Из доказанных утверждений непосредственно вытекают следующие предложения.

ТЕОРЕМА 9. *Для того чтобы $f(z) \in E_p(G)$ в области $G \in S$, необходимо и достаточно, чтобы $f(z) \in D(G)$ и $\int\limits_{\Gamma} |f(\zeta)|^p dS < +\infty$.*

Необходимость следует из теоремы 5 и замечания к теореме 1. Достаточность вытекает из теорем 4 и 1 и из того, что доказываемая теорема верна для односвязных областей [см. (2)].

Таким образом, в областях Смирнова существует полный аналог теоремы П. Я. Полубариновой-Кочиной, в то время как для произвольных областей со спрямляемой границей справедлива лишь достаточность этого утверждения; при этом уже для односвязных областей известны примеры функций $f(z) \in E_p(G)$, но $f(z \bar{\in} D(G)$ [см., например, (2)].

ТЕОРЕМА 10. *Если $f(z) \in E_p(G)$ в области $G \in S$ и $\int\limits_{\Gamma} |f(\zeta)|^q \frac{\partial g}{\partial n}\, ds < +\infty$, то $f(z) \in H_q(G)$.*

ТЕОРЕМА 11. *Если $f(z) \in H_q(G)$ в области $G \in S$ и $\int\limits_{\Gamma} |f(\zeta)|^p ds < +\infty$, то $f(z) \in H_q(G)$.*

Доказательства теорем 10 и 11 следуют из теоремы 9 и из свойств функций классов H_p.

Используя результаты о существовании в многосвязных областях однозначных аналитических функций с заданным на границе модулем, можно высказать еще следующую теорему.

ТЕОРЕМА 12. *Для того чтобы при некотором $p > 0$ $H_p(G) = E_p(G)$, необходимо и достаточно, чтобы $0 < C_1 < |\psi'(z)| < C_2$, $z \in G$, где $w = \psi(z)$ — конформное отображение области G на круговую каноническую область K.*

Поступило
27. II. 1957

ЛИТЕРАТУРА

1 Смирнов В. И., Sur les formules de Cauchy et de Green et quelques problèmes que s'y rattachent, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 3(1932), 337—372.

2 Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, изд. 2-ое, М.—Л., Гостехиздат, 1950.

3 Хавинсон С. Я., Экстремальные задачи для некоторых классов аналитических функций в конечносвязных областях, Матем. сборн, 36 (78): 3 (1955), 445—478.

4 Penez J., Approximation by boundary values of analytic functions, Proc. Nat. Ac. Sci. U. S. A., 40, № 4 (1954), 240—243.

[5] Тумаркин Г. Ц., Об одновременном приближении функций, заданных на нескольких контурах многочленами и рациональными дробями, Доклады Ак. наук СССР, 114, № 4 (1957), 710—713.

[6] Келдыш М. В. и Лаврентьев М. А., Sur la représentation conforme des domaines limites par des courbes rectifiables, Ann. Ecole Norm., 59 (1937), 1—38.

[7] Полиа Г. и Сеге Г., Задачи и теоремы из анализа, т. I, М.—Л., ОНТИ, 1937.

[8] Rudin W., The classes H_p in general domain, Trans. Amer. Math. Soc., 78, № 1 (1955), 46—66.

[9] Parreau M., Moyennes des fonctions harmoniques et analytiques, Ann. Inst. Fourier, 3 (1951), 103—197.

[10] Тумаркин Г. Ц. и Хавинсон С. Я., О стирании особенностей у аналитических функций одного класса (класса D), Успехи матем. наук, XII, вып. 4 (76) (1957), 193—199.

[11] Тумаркин Г. Ц. и Хавинсон С. Я., Условия представимости гармонических функций в многосвязных областях по формуле Грина, Матем. сб., 44(86) : 2 (1958), 225—234.

[12] Тумаркин Г. Ц. и Хавинсон С. Я., К определению аналитических функций класса E_p в многосвязных областях, Успехи матем. наук, XIII, вып. 1(79)(1958), 201—206.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 387—394

А. Ф. ЛЕОНТЬЕВ

О ЗНАЧЕНИЯХ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА В ЗАДАННЫХ ТОЧКАХ

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В работе приводятся необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять числа a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ для того, чтобы они могли быть значениями в заданных точках λ_n, расположенных не очень часто, хотя бы одной целой функции из класса $[\rho, \infty)$ или целой функции из класса $[\rho, \infty]$.

Введение

Вопросом построения по заданным значениям в заданных точках целой функции конечного порядка занимался ряд авторов. М. Мурси и Винн [1] доказали, что если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln|\lambda_n|} = \rho, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln|\lambda_{n+1}|}{\ln|\lambda_n|} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} n \frac{|\lambda_{n+1}| - |\lambda_n|}{|\lambda_n|} > 0$$

и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\ln|a_n|}{\ln|\lambda_n|} = \sigma > 0,$$

то имеется функция $\omega(z)$ порядка $\leqslant \max(\rho, \sigma)$ со свойством $\omega(\lambda_n) = a_n$.

Макинтайр и Вильсон [2] установили аналогичную теорему: если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln|\lambda_n|} = \rho, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\ln|a_n|}{\ln|\lambda_n|} = \sigma \geqslant 0$$

и если для фиксированного h круги с центрами в λ_n радиусов $|\lambda_n|^{-h}$ не перекрываются, то существует интерполирующая функция порядка $\leqslant \max(\rho, \sigma)$.

Ц. Мурси [3] занимался построением целой функции конечного порядка, которая вместе со своими производными до определенных порядков принимает в заданных точках заданные значения (порядки производных меняются от точки к точке).

В работах автора [4] и [5] указаны необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять точки λ_n, $\lambda_n \to \infty$, для того, чтобы по любой системе чисел $\{a_n\}$, удовлетворяющей (естественному) условию

$$|a_n| < e^{|\lambda_n|^{\rho+\varepsilon}}, \quad n > N(\varepsilon),$$

можно было найти интерполирующую функцию порядка $\leqslant \rho$ (т. е. в классе $[\rho, \infty]$). Вот эти условия:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln|\lambda_n|} \leqslant \rho, \tag{1}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\ln \frac{1}{\eta_n}}{\ln|\lambda_n|} \leqslant \rho, \quad \eta_n = \prod_{\substack{|\lambda_m-\lambda_n|<1 \\ m\neq n}} |\lambda_m - \lambda_n|. \tag{2}$$

Аналогичные условия получаются [что сделано частично в работах ([6]), ([7]) и полностью — в работе ([5])*], если функцию $\omega(z)$ искать в классе $\rho, \infty)$ целых функций не выше порядка ρ конечного типа и в соответствии с этим требовать, чтобы выполнялось неравенство:

$$|a_n| < e^{K|\lambda_n|^\rho}, \quad n > N.$$

Эти условия состоят в следующем:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho} < \infty, \tag{3}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \frac{1}{\eta_n}}{|\lambda_n|^\rho} < \infty, \quad \eta_n = \prod_{\substack{|\lambda_m-\lambda_n|<\delta|\lambda_n| \\ m\neq n}} \left|1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_m}\right|. \tag{4}$$

Г. Трошин ([8]), ([9]) подобные условия отыскивал применительно к классу функций, аналитических в полуплоскости или в угле.

Г. Лапин ([10]) нашел условия, которым должны удовлетворять данные числа a_{np} для того, чтобы в классе $[\rho, \infty]$ или $[\rho, \infty)$ существовала функция $\omega(z)$ со свойством:

$$\omega(\lambda_n) = a_{n0}, \quad \omega'(\lambda_n) = a_{n1}, \ \ldots, \ \omega^{(k_n)}(\lambda_n) = a_{n,k_n} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

В настоящей работе рассматривается следующий вопрос. Пусть $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условию (1) или (3) и, возможно, не удовлетворяет условию (2) или (4). Требуется узнать, какими должны быть числа a_n ($n = 1, 2, \ldots$) для того, чтобы соответственно в классе $[\rho, \infty]$ или $[\rho, \infty)$ имелась по крайней мере одна функция $\omega(z)$ со свойством $\omega(\lambda_n) = a_n$.

Обозначим через

$$\mu_1^{(n)} \ (\mu_1^{(n)} = \lambda_n), \ \mu_2^{(n)}, \ \ldots, \ \mu_{q_n}^{(n)}$$

те точки из $\{\lambda_m\}$, которые лежат в круге

$$|z - \lambda_n| < |\lambda_n|^{-h}$$

$h \geqslant 0$ — фиксированное число), а через

$$\alpha_1^{(n)} \ (\alpha_1^{(n)} = a_n), \ \alpha_2^{(n)}, \ \ldots, \ \alpha_{q_n}^{(n)}$$

— те числа из $\{a_m\}$, которые соответствуют указанным точкам в силу соответствия $\lambda_m \to a_m$. Введем величины:

$$A_1^{(n)} = \mu_1^{(n)}\alpha_1^{(n)}, \ \ldots, A_k^{(n)} = \mu_1^{(n)} \ldots \mu_k^{(n)} \sum_{p=1}^{k} \frac{\alpha_p^{(n)}}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{k} (\mu_j^{(n)} - \mu_p^{(n)})} \quad (k = 2, \ \ldots, \ q_n$$

(сумма справа — разделенная разность) и обозначим через β_n максимум из их модулей.

* Как мне стало известно, подобные условия получены также О. Фирсаковой.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы при условии* (1) *в классе* $[\rho, \infty]$ *имелась хотя бы одна функция* $\omega(z)$ *со свойством* $\omega(\lambda_n) = a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *необходимо и достаточно, чтобы было:*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\ln\beta_n}{\ln|\lambda_n|} \leqslant \rho.$$

При рассмотрении класса $[\rho, \infty)$ величины β_n определяются как и выше, с той лишь разницей, что, в отличие от предыдущего случая, $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \ldots, \mu_{q_n}^{(n)}$ берутся в круге $|z-\lambda_n| < \delta|\lambda_n|$, где $\delta > 0$ — фиксированное число.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы при условии* (3) *в классе* $[\rho, \infty)$ *имелась интерполирующая функция, необходимо и достаточно, чтобы было:*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\beta_n}{|\lambda_n|^\rho} < \infty. \tag{5}$$

В частных случаях, когда $\lambda_n > 0$ или $|\arg\lambda_n| \leqslant \frac{\pi}{2m}$, где m — целое $> \rho$, теореме 2 можно придать другую форму. Именно, в этих случаях ранее было показано (в первом случае — в работах (7), (10), а во втором случае — в работе (11)), что для существования интерполирующей функции необходимо и достаточно, чтобы последовательность полиномов Дирихле

$$P_n(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j L_{n+1,\infty}(\nu_j)}{L'_{1,\infty}(\nu_j)} e^{-\nu_j z} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\nu_j = \lambda_j^\rho, \quad L_{k,\infty}(z) = \prod_{s=k}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\nu_s^2}\right),$$

сходилась равномерно внутри некоторого угла $|\arg z| < \mu$, $|z| > R$.

Идеи доказательств теорем 1 и 2 схожи, однако доказательство теоремы 2 более тонкое. По этой причине мы приведем доказательство только теоремы 2, имея в виду, что после этого доказать теорему 1 не составит уже никакого труда.

§ 1. Доказательство теоремы 2

1. Докажем сперва необходимость условия (5). С этой целью допустим, что числа a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ являются значениями в точках λ_n функции $\omega(z) \in [\rho, \infty)$. Мы имеем:

$$A_k^{(n)} = \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int\limits_{|t-\lambda_n| = \delta_1|\lambda_n|} \frac{\omega(t)\,dt}{\left(1 - \frac{t}{\mu_1^{(n)}}\right)\cdots\left(1 - \frac{t}{\mu_k^{(n)}}\right)},$$

где $\delta_1 > \delta$, а δ есть число, которое входит в определение β_n. Так как

$$|t - \lambda_n| = \delta_1|\lambda_n|, \quad |\mu_j^{(n)} - \lambda_n| < \delta|\lambda_n|,$$

то

$$\left|1 - \frac{t}{\mu_j^{(n)}}\right| = \frac{|\mu_j^{(n)} - t|}{|\mu_j^{(n)}|} = \frac{|(\mu_j^{(n)} - \lambda_n) + (\lambda_n - t)|}{|\mu_j^{(n)}|} > \frac{\delta_1 - \delta}{1 + \delta} = a$$

(интересен, очевидно, случай $a < 1$), в силу чего

$$|A_k^{(n)}| \leqslant \frac{\delta_1|\lambda_n|}{a^{q_n}} \max_{|t-\lambda_n| = \delta_1|\lambda_n|} |\omega(t)| = \frac{1}{a^{q_n}} \exp[O(|\lambda_n|^\rho)].$$

Из условия (3) находим:

$$q_n = O((1+\delta)^\rho \mid \lambda_n \mid^\rho) = O(\mid \lambda_n \mid^\rho).$$

Поэтому из предыдущего неравенства получим:

$$\mid A_k^{(n)} \mid = \exp [O(\mid \lambda_n \mid^\rho)], \qquad (*)$$

откуда и вытекает условие (5).

Замечание. Если $a_n = F(\lambda_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, где $F(z)$ — функция, аналитическая в угле $\alpha < \arg z < \beta$, $\beta - \alpha < 2\pi$, и растущая в этом угле как функция из класса $[\rho, \infty)$:

$$\mid F(z) \mid = \exp [O(\mid z \mid^\rho)],$$

и если λ_n лежат в угле $\alpha < \alpha_1 < \arg z < \beta_1 < \beta$ и подчиняются условию (3), то, дословно повторив предыдущие рассуждения, получим, что при малом δ выполняется условие (5) (δ входит в определение β_n и его надо выбрать так, чтобы круги $\mid z - \lambda_n \mid < \delta_1 \mid \lambda_n \mid$, $\delta_1 > \delta$, содержались в угле $\alpha < \arg z < \beta$).

2. Докажем теперь достаточность условия (5). С этой целью допустим, что оно выполняется, и установим, что в классе $[\rho, \infty)$ имеется функция $\omega(z)$ со значениями a_n в точках λ_n.

Возьмем интерполирующий многочлен

$$Q_n(z) = \alpha_1^{(n)} + \sum_{k=2}^{q_n} (-1)^{k-1} A_k^{(n)} \left(1 - \frac{z}{\mu_1^{(n)}}\right) \ldots \left(1 - \frac{z}{\mu_{k-1}^{(n)}}\right), \qquad (6)$$

принимающий в точках $\mu_j^{(n)}$ $(j = 1, 2, \ldots, q_n)$ значения $\alpha_j^{(n)}$, и оценим его по модулю в круге $\mid z - \lambda_n \mid < \delta \mid \lambda_n \mid$. Так как для z из этого круга

$$\left| 1 - \frac{z}{\mu_j^{(n)}} \right| \leqslant b = \text{const}$$

и так как, далее, $q_n = O(\mid \lambda_n \mid^\rho)$, то, в силу условия (5), будем иметь:

$$\mid Q_n(z) \mid < b^{q_n} q_n \exp [O(\mid \lambda_n \mid^\rho)] = \exp [O(\mid \lambda_n \mid^\rho)]. \qquad (7)$$

3. Рассмотрим какую-нибудь функцию из класса $[\rho, \infty)$, имеющую в точках λ_n простые нули, например, функцию

$$F(z) = \Pi \left(1 - \frac{z^m}{\lambda_n^m}\right),$$

где m — целое число $> \rho$ и произведение (чтобы у $F(z)$ не было кратных нулей) распространено по тем λ_n, m-степени которых все различны. Воспользуемся следующей теоремой (см., например, ([12]), стр. 73). Пусть $F(z)$ — целая функция и $M(R) = \max \mid F(Re^{\varphi i}) \mid$. Для любых $\eta > 0$ и $k > 1$ существует такая константа $H = H(\eta, k)$, не зависящая от z и R, что неравенство

$$\ln \mid F(z) \mid > -H \ln M(R)$$

имеет место во всем круге $\mid z \mid \leqslant \frac{R}{k}$, исключая, быть может, значения z, лежащие в кружках с общей суммой радиусов, не большей $2\eta R$.

Пусть r_1 — произвольное положительное число, $\mu > 0$ — фиксированное число. Положим $R = k(1+\mu)r_1$ и будем считать, что z находится в кольце

$$r_1 \leqslant |z| \leqslant \frac{R}{k} = (1+\mu)\, r_1.$$

Мы имеем:

$$R = k(1+\mu)\, r_1 < k(1+\mu)\, |z|.$$

Пусть $F(z) \in [\rho, \infty)$, т. е. $M(R) < e^{aR^\rho}$. Тогда, согласно теореме,

$$\ln |F(z)| > -H \ln M(R) > -HaR^\rho > -Ha\,[k(1+\mu)]^\rho\, |z|^\rho$$

во всем кольце $r_1 \leqslant |z| \leqslant (1+\mu)\, r_1$, исключая, быть может, значения z, лежащие в кружках с общей суммой радиусов, не большей $2\eta R = 2\eta k(1+\mu)\, r_1$. Так как число $\varepsilon = 2\eta k(1+\mu)$ может быть сколь угодно малым, то можно утверждать следующее: если $F(z) \in [\rho, \infty)$, то при любом $\varepsilon > 0$ и $\mu > 0$ существует такая постоянная H_1, не зависящая от r_1, что неравенство

$$|F(z)| > e^{-H_1|z|^\rho} \tag{8}$$

имеет место во всем кольце $r_1 \leqslant |z| \leqslant (1+\mu)\, r_1$, исключая, быть может, значения z, лежащие в кружках с общей суммой радиусов, не большей εr_1.

Имея в виду оценку (8), разобьем плоскость на кольца K_n:

$$r_n \leqslant |z| \leqslant r_{n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

шириной $< \frac{1}{2}\delta r_n$; каждое кольцо с помощью лучей, выходящих из начала, разобьем на криволинейные четырехугольники и все это сделаем так, чтобы диаметр четырехугольника из кольца K_n был меньше δr_n и чтобы на границах четырехугольников имела место оценка (8). Те четырехугольники, в каждом из которых содержатся точки из $\{\lambda_n\}$, расположим в порядке удаления от начала и обозначим через $D_1, D_2, \ldots, D_m, \ldots$

4. Пусть $\lambda_{n_m} \in D_m$. Положим $\nu_m = \lambda_{n_m}$,

$$P_m(z) = \sum \frac{a_p}{F'(\lambda_p)} \left(\frac{z}{\lambda_p}\right)^{s_m} \frac{1}{z - \lambda_p}, \quad s_m = [\alpha\, |\nu_m|^\rho], \quad \alpha > 0,$$

где сумма распространена по всем λ_p, содержащимся в D_m.

Функцию $\omega(z)$ будем искать в виде

$$\omega(z) = F(z) \sum_{m=1}^{\infty} P_m(z). \tag{9}$$

Пусть C_m — граница D_m. Имеем:

$$P_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_m} \frac{Q_{n_m}(t)}{F(t)} \left(\frac{z}{t}\right)^{s_m} \frac{dt}{t - z}. \tag{10}$$

Отсюда, в силу неравенств (7), (8) на C_m, получим при $|z - \nu_m| > \delta |\nu_m| + 1$ оценку:

$$|P_m(z)| < \left|\frac{\beta z}{\nu_m}\right|^{\alpha |\nu_m|^\rho}, \quad \beta > 1. \tag{11}$$

5. Пусть $N = N(r)$ — наименьшее целое число такое, что

$$|\nu_N| > 2\beta r, \quad r = |z|.$$

В силу неравенства (11), находим (учитывая, на основании (3), что $m \leqslant n_m \leqslant \gamma |\lambda_{n_m}|^\rho = \gamma |\nu_m|^\rho$):

$$\left|\sum_N^\infty P_m(z)\right| < \sum_N^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha|\nu_m|^\rho} < \sum_N^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{\gamma} m} < 1,$$

в результате чего получаем:

$$\left|F(z)\sum_N^\infty P_m(z)\right| < |F(z)|. \tag{12}$$

Оценим

$$\omega_1(z) = \sum_1^{N-1} F(z) P_m(z).$$

Если $|z - \nu_m| > \delta|\nu_m| + 1$, то, в силу (11),

$$|F(z) P_m(z)| < \left|\frac{\beta z}{\nu_m}\right|^{\alpha|\nu_m|^\rho} e^{O(|z|^\rho)}. \tag{13}$$

Аналогичное неравенство, поскольку $F(z) P_m(z)$ — целая функция, имеет место и внутри круга $|z - \nu_m| \leqslant \delta |\nu_m| + 1$. Таким образом, можно считать, что неравенство (13) имеет место всюду. Теперь заметим, что

$$\left(\frac{\beta r}{|\nu_m|}\right)^{\alpha|\nu_m|^\rho} \leqslant \exp\left(\frac{\alpha\beta^\rho}{e\rho} r^\rho\right) = \exp[O(r^\rho)]$$

(в этом можно убедиться, отыскивая максимум функции $f(x) = \left(\frac{\beta r}{x}\right)^{\alpha x^\rho}$). На основании этого,

$$|F(z) P_m(z)| < \exp[O(r^\rho)]$$

и потому

$$|\omega_1(z)| < N \exp[O(r^\rho)] = \exp[O(r^\rho)], \tag{14}$$

ибо (так как $|\nu_{N-1}| \leqslant 2\beta r$ и $N - 1 \leqslant \gamma |\nu_{N-1}|^\rho$) $N = O(r^\rho)$. Из неравенств (12) и (14) следует, что $\omega(z) \in [\rho, \infty)$, что и требовалось доказать.

2. Следствия из теоремы 2

Отметим некоторые следствия из теоремы 2.

Следствие 1. *Пусть λ_n расположены в угле $\alpha_1 < \arg z < \beta_1$, $\beta_1 - \alpha_1 < 2\pi$, и удовлетворяют условию (3). Если имеется функция $F(z)$, регулярная в угле $\alpha < \arg z < \beta$ $(\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta)$, причем в этом угле*

$$|F(z)| < e^{\lambda |z|^\rho}, \qquad |z| > r_0,$$

которая в точках λ_n принимает значения a_n, то имеется целая функция $\omega(z) \in [\rho, \infty)$ со свойством $\omega(\lambda_n) = a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Это следствие непосредственно вытекает из теоремы 2, если учесть замечание п. 1 § 1.

Чтобы сформулировать следствие 2, обозначим через G_k $(k = 1, 2, \ldots, s)$ угол с центром в начале раствора меньше 2π. Предположим, что угол G_1 имеет общую часть (общие внутренние точки) с углом G_2, угол G_2 — с углом $G_3, \ldots$, угол G_{s-1} — с углом G_s и, наконец, угол G_s — с углом G_1. Пусть $\lambda_m^{(k)}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ — точки из $\{\lambda_n\}$, которые лежат в G_k, и $a_m^{(k)}$ — те числа из $\{a_n\}$, которые соответствуют точкам $\lambda_m^{(k)}$ в силу закона $\lambda_n \to a_n$.

Следствие 2. *Если для каждого* $k = 1, 2, \ldots, s$ *числа* $a_m^{(k)}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ *являются значениями в точках* $\lambda_m^{(k)}$ *функции* $F_k(z)$, *регулярной в угле* $G'_k \supset G_k$ *и удовлетворяющей в этом угле условию*

$$|F_k(z)| < e^{A|z|^\rho}, \quad |z| > r_0,$$

то имеется целая функция $\omega(z) \in [\rho, \infty)$ *со свойством* $\omega(\lambda_n) = a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Это следствие также непосредственно получается из теоремы 2, если учесть вышеуказанное замечание.

Из теоремы 2 в качестве следствия можно вывести также следующее утверждение, о котором говорилось во введении:

Следствие 3. *Для того чтобы по любой системе чисел* $\{a_n\}$ *такой, что*

$$|a_n| < e^{K|\lambda_n|^\rho}, \quad n > N, \tag{15}$$

можно было найти функцию $\omega(z) \in [\rho, \infty)$ *со свойством* $\omega(\lambda_n) = a_n$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (3) *и чтобы*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{\eta_n}}{|\lambda_n|^\rho} < \infty, \quad \eta_n = \eta(\lambda_n) = \prod_{\substack{|\lambda_m - \lambda_n| < \delta_1 |\lambda_n| \\ m \neq n}} \left|1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_m}\right|. \tag{4}$$

Докажем сначала достаточность условий (3) и (4). С этой целью допустим, что они выполняются и что имеется система чисел $\{a_n\}$ со свойством (15). Нам надо показать, что тогда будет выполняться условие (5). Оценим величины

$$A_k^{(n)} = \sum_{p=1}^{k} \frac{\mu_p^{(n)} \alpha_p^{(n)}}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{k} \left(1 - \frac{\mu_p^{(n)}}{\mu_j^{(n)}}\right)}.$$

Заметим, что так как $\mu_j^{(n)}$ и $\mu_p^{(n)}$ лежат в круге $|z - \lambda_n| < \delta|\lambda_n|$, в силу чего $|\mu_p^{(n)}| > (1 - \delta)|\lambda_n|$ и $|\mu_j^{(n)} - \mu_p^{(n)}| < 2\delta|\lambda_n|$, то

$$|\mu_j^{(n)} - \mu_p^{(n)}| < \frac{2\delta}{1 - \delta} |\mu_p^{(n)}|.$$

Пусть δ таково, что $\frac{2\delta}{1-\delta} < \delta_1$. При таком δ точки $\mu_j^{(n)}$ целиком содержатся в круге $|z - \mu_p^{(n)}| < \delta_1 |\mu_p^{(n)}|$, а при малом δ_1 для любой точки z из этого круга имеем:

$$\left|1 - \frac{\mu_p^{(n)}}{z}\right| < \frac{\delta_1}{1 - \delta_1} < 1.$$

Следовательно, произведение, стоящее под знаком суммы в знаменателе, по модулю будет больше величины $\eta(\mu_p^{(n)})$, которая, согласно (4), имеет оценку снизу вида $e^{-O(|\lambda_n|^\rho)}$. Если теперь учесть (15) и то, что $|\mu_p^{(n)}| < 2|\lambda_n|$, $k \leqslant q_n = O(|\lambda_n|^\rho)$, то для $A_k^{(n)}$ получим оценку: $|A_k^{(n)}| < e^{O(|\lambda_n|^\rho)}$, из которой следует условие (5). По теореме 2 отсюда выводим, что интерполирующая функция существует, что и надо было показать.

Докажем теперь необходимость условий (3) и (4). Для этого допустим, что по любой системе чисел $\{a_n\}$ со свойством (15) можно найти в классе $[\rho, \infty)$ интерполирующую функцию $\omega(z)$. Пусть, в частности, $a_1 = 1$, $a_n = 0$ при $n > 1$. Тогда для функции $\omega(z)$ из класса $[\rho, \infty)$ точки λ_n $(n = 2, 3, \ldots)$ будут нулями и потому должно выполняться условие (3).

Предположим теперь, что условие (4) не выполняется. Из этого будет следовать, что найдется такая подпоследовательность $\{m_k\}$ целых положительных чисел, для которой

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{\eta_{m_k}}}{|\lambda_{m_k}|^{\rho}} = \infty. \tag{16}$$

Числа m_k мы будем считать столь редкими, чтобы круги радиусов $\delta|\lambda_{m_k}|$ с центрами в λ_{m_k} $(k = 1, 2, \ldots)$ не пересекались между собой.

Положим $a_{m_k} = 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $a_n = 0$ при $n \neq m_k$ и обозначим по-прежнему через $\omega(z) \in [\rho, \infty)$ соответствующую интерполирующую функцию. Так как $a_n = \omega(\lambda_n)$, $\omega(z) \in [\rho, \infty)$, то, приняв во внимание неравенство (*) из § 1, получим:

$$\frac{1}{\eta_{m_k}} = |A_{m_k}^{(m_k)}| \leqslant \beta_{m_k} = \exp[O(|\lambda_{m_k}|^{\rho})].$$

Но это противоречит соотношению (16). Следовательно, условие (4) должно иметь место. Следствие 3 полностью установлено.

Поступило
21.I.1957

ЛИТЕРАТУРА

[1] Mursi M. and Winn E., On the interpolated integral function of given order, Quart. J. of Math., Oxford, 4 (1933), 173—179.

[2] Macintyre A. and Wilson R., On the order of the interpolated integral functions, Quart. J. of Math., Oxford, 5 (1934), 211—220.

[3] Mursi Z., Sur l'ordre de fonctions entières définies par interpolation, Bull. Sci. Math., 73 (1949), 96—112.

[4] Леонтьев А. Ф., Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка, Доклады Ак. наук СССР, 61, № 5 (1948), 785—787.

[5] Леонтьев А. Ф., К вопросу об интерполировании в классе целых функций конечного порядка, Матем. сборн., 41 (83) : 1 (1957), 81—96.

[6] Леонтьев А. Ф., Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка нормального типа, Доклады Ак. наук СССР, 66, № 2 (1949), 153—156.

[7] Леонтьев А. Ф., Ряды полиномов Дирихле и их обобщение, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, 39, 1951.

[8] Трошин Г. Д., Об интерполировании функций, аналитических в угле, Матем. сборн., 36 (78):1 (1955), 39—56.

[9] Трошин Г. Д., Об интерполировании функций, аналитических в угле, Матем. сборн., 39 (81) : 2 (1956), 239—252.

[10] Лапин Г. П., Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка и конечного типа, Матем. сборн., 29 (71): 3 (1951), 565—580.

[11] Трошин Г. Д., Об одной интерполяционной задаче в классе целых функций конечного порядка и конечного типа, Ученые записки Горьков. ун-та, серия физико-матем., вып. 28 (1955), 143—153.

[12] Чеботарев Н. Г. и Мейман Н. Н., Проблема Рауса—Гурвица для полиномов и целых функций, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, 26, 1949.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 395—432

Г. Х. СИНДАЛОВСКИЙ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* М. А. Лаврентьевым)

В работе вводятся понятия φ-непрерывности и φ-дифференцируемости измеримой функции и изучается их связь с обычной непрерывностью и дифференцируемостью на множествах положительной меры.

Введение

В этой работе мы изучим некоторые условия, позволяющие установить непрерывность или дифференцируемость измеримой по Лебегу функции $f(x)$* на множестве положительной меры. Эти условия являются своеобразными обобщениями понятия непрерывности и понятия производной.

Введем основные обозначения. Определим первую и вторую разности $f(x)$, положив

$$\Delta_1^\varphi(x, h) = f(x-\varphi(h)) - f(x-\varphi(h)-h),$$

$$\Delta_2^\varphi(x, h) = f(x-\varphi(h)+h) - 2f(x-\varphi(h)) + f(x-\varphi(h)-h),$$

где $\varphi(h)$ — функция-сдвиг, определенная в правой окрестности нуля $(0, \delta)$, $\delta > 0$. Всюду в дальнейшем будем считать, что $\varphi(h)$ измерима и $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h) = 0$.

Если в точке x для $f(x)$ выполнено условие

$$\lim_{h\to 0}\Delta_1^\varphi(x, h) = 0$$

или

$$\lim_{h\to 0}\Delta_2^\varphi(x, h) = 0,$$

то мы назовем $f(x)$ φ^1-непрерывной или, соответственно, φ^2-непрерывной в точке x. Аналогично определяется φ-дифференцируемость:

$$f'_\varphi(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta_1^\varphi(x, h)}{h}**.$$

Известные виды симметрической, левой и правой непрерывности получаются соответственно при $\varphi(h) \equiv -\frac{h}{2}$, $\varphi(h) \equiv 0$, $\varphi(h) \equiv -h$ (для пер-

* Функцию $f(x)$ будем считать определенной на интервале $(0,1)$ и конечной всюду.

** При рассмотрении совокупности E точек x мы считаем $\varphi(h)$ от x не зависящей.

вой разности $\Delta_1^{\varphi}(x, h)$). Случаи стремления к нулю симметрической, а также односторонней (левой или правой) вторых разностей получаются аналогично при разных $\varphi(h)$ для $\Delta_2^{\varphi}(x, h) \to 0$ $(h \to 0)$. Понятие φ-производной охватывает, естественно, случаи симметрической, а также левой и правой производных. Мы не будем требовать, чтобы h пробегала обязательно все значения в правой окрестности нуля. Пусть $h \in Q$, где Q — совершенное множество с левым концом в нуле. Тогда выражение «$f(x)$ является φ^1-непрерывной на множестве E» надо понимать так: $\Delta_1^{\varphi}(x, h) \to 0$ при $x \in E$ и $h \to 0$, причем h стремится к нулю, оставаясь на Q, где $\varphi(h)$ и Q одинаковы для всех точек множества E.

В дальнейшем мы будем предполагать, что нуль является точкой правосторонней плотности множества Q. Ясно, что из непрерывности в точке следует φ^1- и φ^2-непрерывность в этой точке. Обратное утверждение для единичной точки, конечно, не имеет места (например, точка симметрической непрерывности* функции не обязана быть точкой обычной непрерывности).

Функция может быть φ-непрерывной или φ-дифференцируемой для одних видов $\varphi(h)$ и не обладать этим свойством для других видов $\varphi(h)$.

Будет показано, что при некоторых условиях, наложенных на $\varphi(h)$, из φ^1-непрерывности или из φ^2-непрерывности $f(x)$ на множестве E положительной меры следует обычная непрерывность $f(x)$ почти всюду на E (теорема 1), а из φ-дифференцируемости следует существование почти всюду обычной производной (теорема 2).

Теоремы 1 и 2 будут обобщать, в частности, следующую теорему: *пусть измеримая на (a, b) функция $f(x)$ является симметрически непрерывной (или дифференцируемой) на множестве E точек x, $E \subset (a, b)$, $\operatorname{mes} E > 0$. Тогда $f(x)$ непрерывна (или дифференцируема) в обычном смысле почти всюду на множестве E.*

Эта теорема для случая симметрической дифференцируемости была доказана А. Я. Хинчиным [см. ([3])]. Перечислим другие известные автору результаты, имеющие отношение к данной работе**. Ф. А. Кабаковым (неопубликованная диссертация) было доказано, что из стремления к нулю второй односторонней разности $f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$ при $h \to 0$ на множестве E следует непрерывность $f(x)$ почти всюду на E. Для односторонней первой разности аналогичный результат получается очень просто, что отмечено Н. Н. Лузиным [см. ([4]), стр. 322]. То, что из односторонней дифференцируемости следует обычная дифференцируемость почти всюду, следует из известной теоремы Данжуа о производных числах. Перечислен-

---

* Функция называется симметрически непрерывной в точке x, если

$$\lim_{h \to 0}\left[f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right)\right] = 0.$$

Симметрическая производная определяется следующим образом:

$$f_s'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right)}{h}.$$

** Ранее [см. ([6])] автором были изучены некоторые вопросы φ^2-непрерывности. Некоторые результаты данной работы были опубликованы без доказательства [см. ([7])].

ные результаты являются следствием доказанных в настоящей работе теорем 1 и 2.

В основных теоремах работы мы будем требовать от сдвига $\varphi(h)$ наличия определенных свойств, касающихся отображений функцией $\varphi(h)$ множеств положительной меры. В вопросах непрерывности (теорема 1) мы накладываем на $\varphi(h)$ одно из следующих требований:

условие L: $\varphi(h)$ удовлетворяет условию Липшица на $[0, \delta]$, $\delta > 0$;

условие α: $\varphi(h)$ — неубывающая положительная функция на интервале $(0, \delta)$, $\delta > 0$, удовлетворяющая условию $\varphi(h) < Ch$, где C — некоторое положительное число;

условие β: $\varphi(h)$ — дифференцируемая на $(0,\delta)$, $\delta > 0$, функция, у которой $\varphi'(h)$ положительна и не возрастает на $(0, \delta)$ (при этом допускается случай $\lim\limits_{h\to 0} \varphi'(h) = +\infty$)*.

Как мы увидим, условия L, α, β можно охватить одним общим условием S_C**, и теорема 1 будет доказываться в предположении, что $\varphi(h)$ удовлетворяет этому последнему условию. Определим свойство S_c.

Будем говорить, что $\varphi(h)$ (на $0, \delta)$) обладает свойством S_c, если для некоторого постоянного ρ, $0 < \rho < 1$, существуют последовательности $a_i \to 0$, $b_i \to 0$, $0 < a_i < b_i < \delta$, удовлетворяющие условию: каково бы ни было замкнутое множество $P \subset [a_i, b_i]$, для которого

$$\frac{\operatorname{mes} CP(a_i, \xi)}{\xi} < \rho \quad (a_i \leqslant \xi \leqslant b_i)^{***},$$

будет выполняться либо неравенство

$$\frac{\overline{\operatorname{mes}}\, \varphi(P)}{\sup\limits_{0<h\leqslant b_i} |\varphi(h)|} > \rho,$$

либо неравенство

$$\frac{\overline{\operatorname{mes}}\, \psi(P)}{\sup\limits_{0<h\leqslant b_i} |\psi(h)|} > \rho,$$

где $\psi(h) \equiv \varphi(h) + h$**** (выбор между φ и ψ может зависеть от P). В выбранном неравенстве знаменатель предполагается не равным нулю.

В вопросах дифференцируемости (теорема 2) будет фигурировать или одно из условий α, β, или совокупность условий S'_d, S''_d, которые формулируются следующим образом:

---

* Наряду с функциями $\varphi(h)$, удовлетворяющими условиям α или β, можно было бы рассмотреть такие $\varphi(h)$, для которых $[-\varphi(h)]$ удовлетворяет условиям α или β (в вопросах со второй разностью $\Delta_2^{\varphi}(x, h)$), или такие, для которых $[-\varphi(h) - h]$ удовлетворяет условиям α или β (в вопросах с первой разностью $\Delta_1^{\varphi}(x, h)$). Переход от $f(x)$ к $f(-x)$ позволяет свести рассмотрение этих новых видов $\varphi(h)$ к случаю условий α и β. Подробнее на этом мы не останавливаемся.

** Это будет следовать из лемм 4—6.

*** Под $C\mathcal{E}$ мы всегда будем понимать дополнение $\mathcal{E}$ до $(0,1)$ для любого множества $\mathcal{E}$.

**** Символы $\varphi(\mathcal{E})$, $\psi(\mathcal{E})$ и т. д. обозначают образ множества $\mathcal{E}$ при отображении, осуществляемом соответствующей функцией.

Условие S'_d: каково бы ни было замкнутое множество P, для которого нуль является точкой плотности, либо множество $\varphi^{-1}(P)$, либо множество $\psi^{-1}(P)$* имеет справа в точке нуль положительную нижнюю плотность.

Очевидно, $\varphi^{-1}(P)$ и $\psi^{-1}(P)$ — измеримые множества, что легко следует из определения измеримости функции.

Условие S''_d: существуют такие числа ρ, $0<\rho<1$, и $\delta>0$, что для каждого $b \in (0, \delta)$ и каждого замкнутого множества $P \subset [0, b]$, у которого $\frac{\text{mes}\, P}{b} > 1-\rho$, будут выполняться либо неравенства

$$\frac{\overline{\text{mes}}\, \varphi(P)}{\sup\limits_{0<h<b} |\varphi(h)|} > \rho \quad \text{и} \quad \sup\limits_{0<h\leqslant b} |\varphi(h)| > \rho b,$$

либо неравенства

$$\frac{\overline{\text{mes}}\, \psi(P)}{\sup\limits_{0<h<b} |\psi(h)|} > \rho \quad \text{и} \quad \sup\limits_{0<h\leqslant b} |\psi(h)| > \rho b^{**}$$

(ρ зависит лишь от $\varphi(h)$). Например, $\varphi(h) = Ch^{\alpha}$ ($\alpha > 0$) удовлетворяет условиям S'_d и S''_d (см. § 4).

Теоремы 1 и 2 справедливы для некоторых видов $\varphi(h)$ с неограниченным $\frac{\varphi(h)}{h}$, так как они верны при $\varphi(h)$, удовлетворяющих условию β. Как будет показано на примере, теоремы 1 и 2 перестают быть верными, если в условии α ограничиться требованием $\varphi(h) < Ch$ (без монотонности функции $\varphi(h)$). Именно, мы построим φ непрерывную (и φ-дифференцируемую) на E, $\text{mes}\, E > 0$, функцию $f(x)$, которая, тем не менее, будет разрывной всюду на E, причем сдвиг $\varphi(h)$ можно подобрать таким, чтобы

---

* $\varphi^{-1}(P)$ есть совокупность всех точек h, которые отображаются во множестве P функцией $\varphi(h)$. Аналогично определяется $\psi^{-1}(P)$.

** Условие S''_d сильнее условия S_c. Если функция $\varphi(h)$ удовлетворяет условию S''_d с постоянной ρ, то она удовлетворяет условию S_c с постоянной $\frac{\rho}{2}$. Действительно, для каждого b_i, где $b_i \to 0$ — любая последовательность (см. определение S_c), положим $a_i = \frac{\rho b_i}{2}$. Если теперь взять множество $P \subset [a_i, b_i]$, удовлетворяющее условию

$$\frac{\text{mes}\, CP\,(a_i, \xi)}{\xi} < \frac{\rho}{2} \qquad (a_i \leqslant \xi \leqslant b_i),$$

то

$$\text{mes}\, P = b_i - a_i - \text{mes}\, CP(a_i, b_i) > b_i - a_i - \frac{\rho}{2} b_i = b_i(1-\rho), \qquad \frac{\text{mes}\, P}{b_i} > 1-\rho.$$

Согласно условию S''_d, либо

$$\frac{\overline{\text{mes}}\, \varphi(P)}{\sup\limits_{0<h<b_i} |\varphi(h)|} > \rho > \frac{\rho}{2},$$

либо

$$\frac{\overline{\text{mes}}\, \psi(P)}{\sup\limits_{0<h<b_i} |\psi(h)|} > \rho > \frac{\rho}{2}.$$

Это значит, что выполнено условие S_c с постоянной $\frac{\rho}{2}$.

$\lambda_1(h) < \varphi(h) < \lambda_2(h)$ с любыми наперед заданными монотонными и непрерывными $\lambda_1(h), \lambda_2(h)$ $(\lim\limits_{h\to 0} \lambda_i(h) = 0,\ i = 1, 2)$ (см. § 3). В полученном примере $\varphi(h)$ будет иметь только счетное число разрывов. Аналогичного примера с непрерывной на $(0, \delta)$ функцией $\varphi(h)$ построить не удалось. (Если считать, что $h \in Q$, где Q — совершенное, нигде не плотное в окрестности нуля множество, то в построенном примере можно, согласно C-свойству Н. Н. Лузина, считать $\varphi(h)$ непрерывной на Q.) Можно также построить (см. § 5) функцию $f(x)$, имеющую обыкновенную производную и не имеющую φ-производной на множестве положительной меры. В этом случае $\varphi(h)$ может быть взята любой наперед заданной непрерывной функцией, у которой

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \left| \frac{\varphi(h)}{h} \right| = \infty.$$

Будет установлено, что для φ-производных чисел неверна теорема, аналогичная теореме Данжуа об обыкновенных производных числах.

Для тех видов $\varphi(h)$, для которых верны теоремы 1 и 2, естественно возникает вопрос о возможности существования несчетного множества (меры нуль) точек разрыва или точек отсутствия производной у φ-непрерывной или у φ-дифференцируемой функции $f(x)$. Для симметрической первой и второй стремящейся к нулю разности (и для случая симметрической дифференцируемости) мы построим (см. § 3) примеры с несчетным множеством точек разрыва (точек отсутствия производной). В качестве одного из следствий теорем, доказываемых в работе, мы получаем следующий результат: пусть для каждой точки $x \in E$, $\operatorname{mes} E > 0$, существует множество Q_x, имеющее в точке x плотность единица (хотя бы одностороннюю), причем для различных x множества Q_x конгруэнтны; пусть, далее, функция $f(x)$ имеет производную (или непрерывна) по множеству Q_x в каждой точке множества E. Тогда $f(x)$ имеет обычную производную (или непрерывна) почти всюду на E*.

§ 1

Докажем несколько вспомогательных лемм.

ЛЕММА 1. *Если $f(x)$ — функция, измеримая по Лебегу на* $(0,1)$, *то существует измеримое по Борелю множество $B \subset (0,1)$, обладающее следующими свойствами*: 1) $\operatorname{mes} B = 1$, 2) $f(x)$ *измерима по Борелю на* B, 3) *для каждой точки $x \in CB$ (если CB не пусто) можно подобрать последовательность точек $c_i \to x\ (i \to \infty)$, $c_i \in B$, такую, что* $\lim\limits_{i\to\infty} f(c_i) = f(x)$.

Доказательство. Возьмем последовательность совершенных множеств $P_1 \subset P_2 \ldots \subset P_n \subset \ldots$ и последовательность функций $f_n(x)$ таких, что $f_n(x) = f(x)$ на P_n, где $f_n(x)$ — непрерывные функции на $(0,1)$; $\operatorname{mes} \sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n = 1$. Это можно сделать в силу C-свойства Н. Н. Лузина.

---

* Это утверждение можно усилить, а именно, потребовать от Q_x не плотности 1 справа в нуле, а лишь положительной нижней плотности справа в нуле для дифференцируемости и положительной верхней плотности справа в нуле для непрерывности. Этого мы не будем доказывать. Если требовать лишь того, чтобы множество Q_x было 2-й категории (плотности 0), то утверждение перестает быть верным (см. § 3).

Положим $B_1 = \sum_{n=1}^{\infty} P_n$. Очевидно, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для каждого $x \in B_1$. Функция $f(x)$ является пределом последовательности непрерывных функций на измеримом по Борелю множестве B_1 и, следовательно, измерима по Борелю на B_1. Пусть множество CB_1 не пусто. Рассмотрим график функции $y = f(x)$, определенной на множестве CB_1, т. е. плоское множество Q точек (x, y), где $x \in CB_1$, $y = f(x)$. Если Q — бесконечное несчетное множество, то выделим в этом множестве счетное подмножество $R \subset Q$, всюду плотное в Q. Пусть R_x — проекция R на ось x. R_x — счетное множество, следовательно, $f(x)$ измерима по Борелю на R_x и на $B = B_1 + R_x$, причем $\text{mes}\, B = \text{mes}\, B_1 = 1$*. Предположим, что CB не пусто. Пусть x_0 — любая точка из CB, $x_0 \in CB_1$, $(x_0, f(x_0)) \in Q$. Возьмем последовательность $(c_i, f(c_i)) \in R$ такую, что $(c_i, f(c_i)) \to (x_0, f(x_0))$. Это означает, что $c_i \to x_0$, $\lim_{i\to\infty} f(c_i) = f(x_0)$, $c_i \in R_x \subset B$. Итак, множество B удовлетворяет требованиям леммы.

ЛЕММА 2. *Пусть функция $f(x)$ измерима по Лебегу на $(0,1)$. Пусть, далее, выражения*

$$\Delta_2(x, h) = f(x+h) - 2f(x) + f(x-h),$$

$$\Delta_1(x, h) = f(x) - f(x-h), \qquad \frac{\Delta_1(x, h)}{h}$$

*(и вообще $\Delta_2(x, h)\cdot a(h)$ и $\Delta_1(x, h)\cdot a(h)$, где $a(h)$ — непрерывная на $(0, 1)$ функция) рассматриваются для значений x и h $(h > 0)$, удовлетворяющих тому условию, что $x-h, x, x+h$ (для случая Δ_2) или $x, x-h$ (для случая Δ_1) одновременно принадлежат множеству $B \subset (0,1)$, определенному в лемме 1, и $h \in Q$ (Q — совершенное множество с левым концом в нуле). Обозначим соответствующее плоское множество точек (x, h) через D_2 (или D_1). Тогда перечисленные выражения измеримы по Борелю по совокупности переменных x, h на плоских множествах D_2 или D_1***.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\Phi_1(x, h) \equiv f(x+h)$ для значений $0 < x < 1$, $0 < h < 1 - x$, т. е. для x и h, удовлетворяющих неравенствам $0 < x < x + h < 1$. $\Phi_1(x, h)$ определена в открытом треугольнике T плоскости (x, h) с вершинами в точках $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$. Пусть множество B удовлетворяет требованиям леммы 1. Функцию $\Phi_1(x, h)$ будем рассматривать лишь на плоском множестве $N_1 \subset T$ точек (x, h), для которых $x + h \in B$, т. е. на множестве тех прямых, параллельных гипотенузе T, которые пересекают ось x в точках множества B. Имеем:

$$\Phi_1(x, h) = f(x+h) = f(c)$$

для точек прямой $x + h = c$, $c \in B$.

T можно представить суммой счетного числа замкнутых прямоугольников Π_i, где Π_i имеет сторону, параллельную гипотенузе T:

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} \Pi_i.$$

---

* Если Q — конечное или счетное множество, то мы положим $R = Q$, и тогда $B = (0,1)$, т. е. CB пусто.

** При этом D_2 лежит в открытом треугольнике T_2 с вершинами $(0,0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $(1,0)$, а D_1 — в открытом треугольнике T_1 с вершинами $(0,0)$, (1.1), $(1,0)$.

$N_1\Pi_i$ — плоское множество, состоящее из отрезков, параллельных стороне Π_i. На каждом таком отрезке функция $\Phi_1(x, h)$ постоянна, а на отрезке, ему перпендикулярном, функция измерима по Борелю, так как получается сжатием с коэффициентом $k = \cos\frac{\pi}{4}$ из функции $f(x)$, определенной на B. Ясно, что $\Phi_1(x, h)$ измерима по Борелю на $N_1\Pi_i$ как функция двух переменных, а следовательно, она измерима по Борелю и на $N_1 = \sum_{i=1}^{\infty} N_1\Pi_i$. Аналогичное утверждение имеет место и для функции

$$\Phi_2(x, h) \equiv f(x-h) \quad (x - h \in B,\ 0 < h < x < 1)$$

в треугольнике (0,0), (1,1), (1,0) на некотором множестве N_2. Ясно, что функция $f(x)$, не зависящая от h, будет измерима по Борелю как функция двух переменных x и h на множестве K вертикальных прямых $x = \text{const}$, $x \in B$. Таким образом, функции $f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)$ и $f(x) - f(x-h)$ измеримы по Борелю соответственно на множествах $N_1 \cdot N_2 \cdot K$ или $N_2 \cdot K$ (т. е. когда все три точки $x+h$, x, $x-h$ или две x, $x-h$ одновременно попадают на B). Но h должно оставаться на Q. Это равносильно рассмотрению наших функций на пересечении $N_1 \cdot N_2 \cdot K$ или $N_2 \cdot K$ с плоским множеством Q' параллельных прямых $h = \text{const}$ ($h \in Q$). Q' измеримо по Борелю. Положим

$$N_1 \cdot N_2 \cdot K \cdot Q' = D_2, \quad N_2 \cdot K \cdot Q' = D_1.$$

Ясно, что $D_2 \subset T_2$, $D_1 \subset T_1$. Умножение любой из рассматриваемых двух функций на $\frac{1}{h}$, $h > 0$ (и вообще на непрерывную функцию $a(h)$), не изменяет ее свойства быть измеримой по Борелю на D_2 или D_1.

ЛЕММА 3. *Пусть $f(x)$ измерима по Лебегу на (0,1), а $\varphi(h)$ непрерывна на множестве Q *, $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$. Если $\Delta_2^\varphi(x, h)$, или $\Delta_1^\varphi(x,h)$, или $\frac{\Delta_1^\varphi(x, h)}{h}$ ** стремится к $g(x)$ *** при $h \to 0$ $(h > 0)$, $h \in Q$, для $x \in E$, $\operatorname{mes} E > 0$, то существует совершенное множество $P \subset E$, на котором это стремление будет равномерным по x, если $h \to 0$ $(h \in Q)$ таким образом, что $x - \varphi(h) + h$, $x - \varphi(h)$, $x - \varphi(h) - h$ (или $x - \varphi(h)$, $x - \varphi(h) - h$) будут оставаться на множестве B, удовлетворяющем условиям леммы 1. Мера $E - P$ может быть сделана сколь угодно малой.*

Доказательство. Проведем рассуждение лишь для $\Delta_2^\varphi(x, h)$ (для других функций, упомянутых в лемме, доказательство аналогично). Рассмотрим $\Delta_2(x, h)$ на множестве D_2, определенном в лемме 2. D_2 лежит в открытом треугольнике T_2: (0,0), $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, (1,0), $\Delta_2(x, h)$ измерима по Борелю на D_2. Сделаем преобразование переменных $x = \bar{x} - \varphi(h)$,

---

* Считаем $\varphi(h)$ непрерывной в каждой точке множества Q по этому множеству. Q удовлетворяет условиям леммы 2.

** И вообще функция вида $\Delta_2^\varphi(x, h) \cdot a(h)$ или $\Delta_1^\varphi(x, h) \cdot a(h)$, где $a(h)$ непрерывна для $h > 0$.

*** В вопросах φ-непрерывности $g(x) \equiv 0$ для $x \in E$.

$h \quad h$, т. е. непрерывный сдвиг, зависящий от h. При этом D_2 перейдет в множество D_2^*. В силу непрерывности сдвига всякое измеримое по Борелю подмножество D_2 перейдет в измеримое по Борелю подмножество D_2^*. Имеем:

$$\Delta_2(x, h) = \Delta_2(\bar{x} - \varphi(h), h) = \Delta_2^{\varphi}(\bar{x}, h),$$

т. е., по лемме 2, $\Delta_2^{\varphi}(x, h)$ измерима по Борелю на D_2^*. Если $x \in E$, а $h \to 0$ так, что (x, h) остается на D_2^*, то это равносильно тому, что

$$\lim_{h \to 0} \Delta_2^{\varphi}(x, h) = 0$$

при условиях:

$$x \in E, \quad h \in Q, \quad x - \varphi(h) + h \in B, \quad x - \varphi(h) \in B, \quad x - \varphi(h) - h \in B.$$

Г. П. Толстовым [см. ([1])] доказано, что если функция $z(x, h)$, $x \in (0,1)$, измерима по Борелю по совокупности переменных на плоском множестве S и

$$\lim_{h \to 0,\ (x\ h) \in S} z(x, h) = g(x)$$

(для $x \in E$, $\operatorname{mes} E > 0$), то можно подобрать сколь угодно близкое по мере к E совершенное множество $P \subset E$, на котором стремление $z(x, h) \to \to g(x)$ $(h > 0)$ будет равномерным по x (т. е. верна теорема Д. Ф. Егорова). Считая здесь

$$S = D_2^*, \qquad z(x, h) = \Delta_2^{\varphi}(x, h),$$

получаем утверждение леммы 3.

ЛЕММА 4. *Пусть* $\varphi(h)$ * *— монотонно возрастающая, непрерывная на* $[0, \delta]$ *функция,* $\varphi(0) = 0$, *у которой* $\varphi'(h)$ *монотонно не возрастает на* $(0, \delta)$ *(т. е. выполнено условие* β*). Тогда для каждой точки* $b \in (0, \delta)$ *и любого* η, $0 < \eta < 1$, *можно найти такое* $a \in (0, b)$, *что для любого замкнутого множества* $P \subset [a, b]$, *удовлетворяющего условию*

$$\frac{\operatorname{mes} CP(a, \xi)}{\xi} < \varepsilon(\eta) \quad (\textit{для всех}\ \xi,\ a \leqslant \xi \leqslant b), \tag{1}$$

будет выполняться неравенство

$$\frac{\operatorname{mes} \varphi(P)}{\varphi(b) - \varphi(0)} = \frac{\operatorname{mes} \varphi(P)}{\varphi(b)} > \eta,$$

где $\varepsilon(\eta)$ *зависит лишь от* η.

Доказательство. Так как $\varphi(h)$ непрерывна, то можно найти такую точку $a \in (0, b)$, что

$$\varphi(a) = \frac{1 - \eta}{2} \cdot \varphi(b) \tag{2}$$

(ясно, что можно считать η близким к 1). Пусть $\frac{1 - \eta}{2} < \frac{1}{4}$. Покажем, что эта точка a удовлетворяет требованиям леммы. Сделаем два замечания:

1) если два множества $A \subset (0, \delta)$ и $B \subset (0, \delta)$ расположены так, что

---

* Если $\varphi(h)$ удовлетворяет условиям леммы 4, то $\psi(h) \equiv \varphi(h) + h$ удовлетворяет тем же условиям и для нее верно утверждение леммы.

$\sup A \leqslant \inf B$ и $\operatorname{mes} A \geqslant \operatorname{mes} B$, то $\operatorname{mes} \varphi(A) \geqslant \operatorname{mes} \varphi(B)$, так как

$$\operatorname{mes} \varphi(A) = \int_A \varphi'(h)\, dh \geqslant \int_B \varphi'(h)\, dh = \operatorname{mes} \varphi(B),$$

в силу монотонности $\varphi'(h)$;

2) если $A \subset (0, \delta)$ и интервал $(e, f) \subset (0, \delta)$ таковы, что $e \leqslant \inf A$ и $\operatorname{mes}(e, f) = \operatorname{mes} A$, то $\operatorname{mes} \varphi((e, f)) \geqslant \operatorname{mes} \varphi(A)$. Действительно,

$$\operatorname{mes} \varphi((e, f)) = \int_e^f \varphi'(h)\, dh = \int_{A \cdot (e, f)} \varphi'(h)\, dh + \int_{(CA)(e, f)} \varphi'(h)\, dh \geqslant$$

$$\geqslant \int_{A \cdot (e, f)} \varphi'(h)\, dh + \int_{A - (e, f)} \varphi'(h)\, dh = \int_A \varphi'(h)\, dh = \operatorname{mes} \varphi(A).$$

Здесь мы использовали замечание 1) с учетом того, что

$$\operatorname{mes}(CA)(e, f) = \operatorname{mes}(A - (e, f)), \quad \text{а} \quad \sup(CA) \cdot (e, f) \leqslant \inf(A - (e, f)).$$

Перейдем к доказательству леммы. Рассмотрим отрезки $\Delta_1 = [a, 2a]$, $\Delta_2 = [2a, 3a]$, $\ldots$, $\Delta_n = [na, (n+1)a]$, где

$$(n+1)a \leqslant b < (n+2)a; \quad \varphi(a) \geqslant \operatorname{mes} \varphi(\Delta_1) \geqslant \operatorname{mes} \varphi(\Delta_2) \geqslant \ldots \geqslant \operatorname{mes} \varphi(\Delta_n),$$

согласно замечанию 1). Отсюда, в частности, следует:

$$\varphi(a) + \sum_{i=1}^{3} \operatorname{mes} \varphi(\Delta_i) \leqslant 4\varphi(a) < \varphi(b),$$

т. е. $n \geqslant 3$.

Пусть множество $P \subset [a, b]$ удовлетворяет условиям леммы. Введем функцию $M(x) = \operatorname{mes}(CP) \cdot (a, x)$ на $[a, b]$. Она непрерывна и монотонно не убывает. Имеем:

$$M(a) = 0, \quad M(b) = \operatorname{mes}(CP) \cdot (a, b).$$

Согласно условию (1),

$$M(x) \leqslant \varepsilon x \tag{3}$$

(ε выберем в дальнейшем в зависимости от η). Определим точки

$$c_1 < c_2 < \ldots < c_r < c_{r+1}$$

следующим образом:

а) если $\operatorname{mes}(CP) \cdot (a, b) \geqslant 2\varepsilon a$, то полагаем $c_1 = a$; c_2 найдем из условия $\operatorname{mes}(CP) \cdot (c_1, c_2) = \varepsilon \cdot 2a$, c_3 определим так, чтобы $\operatorname{mes}(CP) \cdot (c_2, c_3) = \varepsilon a$ и т. д.,

$$\operatorname{mes}(CP) \cdot (c_i, c_{i+1}) = \varepsilon a, \quad i = 2, 3, \ldots, r,$$

$$c_{r+1} \leqslant b, \quad \operatorname{mes}(CP) \cdot (c_{r+1}, b) < \varepsilon a.$$

Если при этом $\operatorname{mes} CP(c_2, b) < \varepsilon a$, то будут определены лишь $c_1 = a$, c_2 $(r = 1)$. Покажем, что

$$ia \leqslant c_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r+1). \tag{4}$$

Для $i = 1$ это очевидно. Для $i = 2$ имеем:

$$\operatorname{mes} CP(a, c_2) = 2\varepsilon a = M(c_2) \leqslant \varepsilon c_2,$$

т. е. $2a \leqslant c_2$. Если $i > 2$, то

$$\operatorname{mes} CP(a, c_i) = \operatorname{mes} CP(c_1, c_2) + \sum_{j=2}^{j=i-1} \operatorname{mes} CP(c_j, c_{j+1}) = 2\varepsilon a + (i-2)\varepsilon a = i\varepsilon a, \tag{5}$$

$$\operatorname{mes} CP(a, c_i) = M(c_i) \leqslant \varepsilon c_i. \tag{6}$$

Сравнивая (5) и (6), получаем $ia \leqslant c_i$, т. е. формулу (4).

б) Если $\operatorname{mes} CP(a,b) < 2\varepsilon a$, то полагаем $c_1 = a$, $c_2 = b$. При $i = 1$ неравенство (4) очевидно. При $i = 2$ имеем: $2a < 4a \leqslant b = c_2$. Итак, неравенство (4) выполнено во всех случаях. При этом ясно, что $n \geqslant r$.

Введем отрезки $\sigma_k = [ka, ka + \operatorname{mes}(CP)\cdot(c_k, c_{k+1})]$, $k = 1, 2, \ldots, r$. Так как $\operatorname{mes}(CP)\cdot(c_k, c_{k+1}) \leqslant 2\varepsilon a$, то $\sigma_k \subset \Delta_k$ (считаем $2\varepsilon < 1$, $\operatorname{mes}\sigma_1 = 2\varepsilon a$, $\operatorname{mes}\sigma_k = \varepsilon a$ при $k \neq 1$). В силу (4), имеем: $\inf(CP)\cdot(c_k, c_{k+1}) \geqslant c_k \geqslant ka$. Так как $\operatorname{mes}(CP)\cdot(c_k, c_{k+1}) = \operatorname{mes}\sigma_k$, то, согласно замечанию 2),

$$\operatorname{mes}\varphi(CP\cdot(c_k, c_{k+1})) \leqslant \operatorname{mes}\varphi(\sigma_k). \tag{7}$$

Оценим $\operatorname{mes}\varphi(CP\cdot(a,b))$. Используя (7), получим:

$$\operatorname{mes}\varphi(CP\cdot(a,b)) = \sum_{k=1}^{r} \operatorname{mes}\varphi(CP(c_k, c_{k+1})) +$$

$$+ \operatorname{mes}\varphi(CP\cdot(c_{r+1}, b)) \leqslant \sum_{k=1}^{r} \operatorname{mes}\varphi(\sigma_k) + \operatorname{mes}\varphi(CP\cdot(c_{r+1}, b)) =$$

$$= \operatorname{mes}\varphi(\sigma_1) + \sum_{k=2}^{r} \operatorname{mes}\varphi(\sigma_k) + \operatorname{mes}\varphi(CP\cdot(c_{r+1}, b)). \tag{8}$$

В силу замечания 1) *, получаем:

$$\operatorname{mes}\varphi(\sigma_1) \leqslant 2\varepsilon\varphi(a), \tag{9}$$

так как отрезок σ_1 в $\frac{1}{2\varepsilon}$ раз меньше $[0, a]$ и расположен правее отрезка $[0, a]$.

Положим

$$l_k = \Delta_k - \sigma_k \quad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Тогда $\operatorname{mes} l_k \geqslant (1 - 2\varepsilon)\, a$. Так как

$$\operatorname{mes}\sigma_{k+1} \leqslant \varepsilon a \leqslant \frac{\varepsilon}{1 - 2\varepsilon} \operatorname{mes} l_k$$

и σ_{k+1} расположен правее l_k, то

$$\operatorname{mes}\varphi(\sigma_{k+1}) \leqslant \frac{\varepsilon}{1 - 2\varepsilon} \operatorname{mes}\varphi(l_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, r - 1). \tag{10}$$

Таким же образом получаем:

$$\operatorname{mes}\varphi(CP(c_{r+1}, b)) < \varepsilon\cdot\varphi(a). \tag{11}$$

Из (8) — (11) и равенств $l_k = \Delta_k - \sigma_k$ имеем:

$$\operatorname{mes}\varphi(CP(a,b)) \leqslant 2\varepsilon\cdot\varphi(a) + \frac{\varepsilon}{1 - 2\varepsilon}\cdot\sum_{k=1}^{r-1} \operatorname{mes}\varphi(l_k) + \varepsilon\cdot\varphi(a) <$$

$$< 3\varepsilon\varphi(a) + \frac{\varepsilon}{1 - 2\varepsilon}\cdot\varphi(b),$$

так как

$$\operatorname{mes}\sum_{k=1}^{r-1} \varphi(l_k) < \varphi(b).$$

Используя (2), находим:

$$\operatorname{mes}\varphi(CP(a,b)) \leqslant 3\cdot\varepsilon\cdot\frac{1-\eta}{2}\cdot\varphi(b) + \frac{\varepsilon}{1 - 2\varepsilon}\cdot\varphi(b) = \left(3\varepsilon\frac{1-\eta}{2} + \frac{\varepsilon}{1 - 2\varepsilon}\right)\varphi(b),$$

---

* Если $\sup A \leqslant \inf B$ и $\operatorname{mes} A = \omega \operatorname{mes} B$ $(\omega > 0)$, то $\operatorname{mes}\varphi(A) \geqslant \omega \operatorname{mes}\varphi(B)$. Для целых ω это сразу вытекает из замечания 1). Для рациональных ω это получается разбиением A и B на целое число множеств одинаковой меры, а для иррациональных ω — переходом к пределу от рациональных ω с использованием непрерывности $\varphi(h)$.

$$\operatorname{mes}\varphi(P)=\varphi(b)-\varphi(a)-\operatorname{mes}\varphi(CP(a,b))>$$
$$>\varphi(b)\cdot\left[1-\frac{1-\eta}{2}-3\varepsilon\cdot\frac{1-\eta}{2}-\frac{\varepsilon}{1-2\varepsilon}\right].$$

Но

$$1-\frac{1-\eta}{2}-3\varepsilon\cdot\frac{1-\eta}{2}-\frac{\varepsilon}{1-2\varepsilon}>\eta,$$

если подобрать $\varepsilon=\varepsilon(\eta)$ настолько малым, чтобы

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{\eta}{2}\right)-3\varepsilon\cdot\frac{1-\eta}{2}-\frac{\varepsilon}{1-2\varepsilon}$$

было положительным (а это можно сделать, если учесть, что $\eta<1$).

Итак, $\operatorname{mes}\varphi(P)>\varphi(b)\cdot\eta$, и лемма доказана.

Следствие. Из леммы 4 следует, что если функция $\varphi(h)$ удовлетворяет условию β, то она удовлетворяет условию S_c (с постоянной $\rho=\min(\varepsilon(\eta),\eta)$.

ЛЕММА 5. *Пусть* $\varphi(h)$ *монотонно не убывает на* $(0,\delta)$ $(\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0)$ *и удовлетворяет условию* $\varphi(h)<Ch$ $(C>0)$. *Тогда* $\varphi(h)$ *обладает свойствами* S_c, S_d', S_d''.

Доказательство. Достаточно доказать выполнение свойств S_d' и S_d'', так как свойство S_c слабее свойства S_d'' (см. введение). Функция $\psi(h)=\varphi(h)+h$ монотонно возрастает. Нижнее производное число $\underline{D}\psi$ не меньше 1, так как $\underline{D}\varphi(h)\geqslant 0$. Поэтому

$$\overline{\operatorname{mes}}\,\psi(P)\geqslant\operatorname{mes}P$$

для любого замкнутого множества P на $[0,\delta]$ (можно было бы брать $\operatorname{mes}\psi(P)$, так как образ замкнутого множества для монотонных функций измерим *). Докажем свойство S_d''. Положим $\rho=\frac{1}{C+2}$. Пусть

$$b\in(0,\delta),\quad P\subset[0,b],\quad \frac{\operatorname{mes}P}{b}>1-\rho.$$

Тогда

$$\overline{\operatorname{mes}}\,\psi(P)\geqslant\operatorname{mes}P>(1-\rho)\,b,\quad \psi(h)<(C+1)\,h,\quad \psi(b)<(C+1)\,b,$$
$$\frac{\overline{\operatorname{mes}}\,\psi(P)}{\psi(b)}>\frac{(1-\rho)\,b}{(C+1)\,b}=\frac{1-\frac{1}{C+2}}{C+1}=\rho,\quad \psi(b)=\sup_{0<h\leqslant b}\psi(h)>\rho b.$$

Свойство S_d'' доказано. Докажем свойство S_d'. Пусть замкнутое множество R имеет в нуле плотность 1. Надо доказать, что $\psi^{-1}(R)$ (заметим, что ψ^{-1} — однозначная функция) имеет справа в нуле нижнюю плотность положительной. Предположим противное. Тогда существует такое $b\in(0,\delta)$, что

$$\operatorname{mes}\psi^{-1}(R\cdot(0,\psi(b))<0{,}1b,$$

а

$$\frac{\operatorname{mes}CR\cdot(0,\psi(b))}{\psi(b)}<\frac{0{,}1}{C+1}. \tag{12}$$

Тогда

$$\operatorname{mes}CR\cdot(0,\psi(b))=\operatorname{mes}\psi\psi^{-1}\cdot(CR(0,\psi(b)))\geqslant$$
$$\geqslant\operatorname{mes}\psi^{-1}(CR\cdot(0,\psi(b)))>0{,}9b>0{,}9\cdot\frac{\psi(b)}{C+1},$$

* См., например ([2]), стр. 184, лемма 3.

т. е.

$$\frac{\operatorname{mes} CR \cdot (0, \psi(b))}{\psi(b)} > \frac{0{,}9}{C+1},$$

что противоречит неравенству (12). Свойство S'_d доказано.

ЛЕММА 6. *Пусть* $\varphi(h)$ *удовлетворяет условию Липшица на* $[0, \delta]$ $(\varphi(0) = 0)$, *т. е.* $|\varphi(h_1) - \varphi(h_2)| < C\,|h_1 - h_2|$ *для* $h_1, h_2 \in [0, \delta]$, *где* C — *постоянное число. Тогда* $\varphi(h)$ *удовлетворяет условию* S''_d (*и, следовательно,* S_c).

Доказательство. Заметим, что в силу непрерывности $\varphi(h)$, все фигурирующие в доказательстве множества будут измеримыми. Пусть $b \in (0, \delta)$. Из двух значений $\varphi(b)$ и $\psi(b) = \varphi(b) + b$ хотя бы одно по модулю не меньше $\frac{b}{2}$. Пусть $\lambda(h)$ — та из функций $\varphi(h)$, $\psi(h)$, для которой

$$|\lambda(b)| \geqslant \frac{b}{2}, \tag{13}$$

и пусть замкнутое множество $P \subset [0, b]$ удовлетворяет условию

$$\frac{\operatorname{mes} P}{b} > 1 - \rho$$

$\left(\rho = \frac{1}{4(C+1)};\ \rho < \frac{1}{4}\right)$, а $\delta_k = (a_k, b_k)$ — смежные интервалы P относительно $(0, b)$.

Имеем:

$$\operatorname{mes} \lambda(\delta_k) \leqslant (C+1) \cdot |b_k - a_k|, \tag{14}$$

так как $\operatorname{mes} \lambda(\delta_k) = \lambda(\xi_1) - \lambda(\xi_2) \leqslant (C+1) \cdot |\xi_1 - \xi_2| \leqslant (C+1) \cdot |b_k - a_k|$, где ξ_1 и ξ_2 — точки наибольшего и наименьшего значений $\lambda(h)$ на $[a_k, b_k]$. Учитывая (14), получим:

$$\operatorname{mes} \lambda(CP \cdot (0, b)) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{mes} \lambda(\delta_k) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} (C+1) \operatorname{mes} \delta_k =$$

$$= (C+1) \cdot \operatorname{mes} CP \cdot (0, b) < (C+1)\rho b, \tag{15}$$

$$\operatorname{mes} \lambda((0, b)) \leqslant \operatorname{mes} \lambda(P) + \operatorname{mes} \lambda(CP \cdot (0, b)). \tag{16}$$

Из (16), (15) и (13) выводим:

$$\frac{\operatorname{mes} \lambda(P)}{\sup\limits_{0<h\leqslant b} |\lambda(h)|} \geqslant \frac{\operatorname{mes} \lambda(P)}{\operatorname{mes} \lambda((0, b))} \geqslant \frac{\operatorname{mes} \lambda((0, b)) - \operatorname{mes} \lambda(CP \cdot (0, b))}{\operatorname{mes} \lambda((0, b))} >$$

$$> 1 - \frac{(C+1)\rho b}{\operatorname{mes} \lambda((0, b))} \geqslant 1 - \frac{\frac{b}{4}}{|\lambda(b)|} \geqslant 1 - \frac{\frac{b}{4}}{\frac{b}{2}} = 1 - \frac{1}{2} > \rho$$

и, кроме того,

$$\sup_{0<h\leqslant b} |\lambda(h)| \geqslant |\lambda(b)| \geqslant \frac{b}{2} > \rho b.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 7. *Пусть функция* $\varphi(h)$ *обладает свойством* S_c. *Пусть* z *является точкой плотности замкнутого множества* T, *а последователь-*

ность $x_j \to z$ $(j \to \infty)$. *Тогда можно выбрать такое* $h_0 \in Q$ (Q — *фиксированное замкнутое множество плотности* 1 *справа в нуле*) *и такое* i, *что либо*

$$x_i + h_0 \in T, \quad x_i + 2h_0 \in T, \quad x_i + h_0 + \varphi(h_0) = x_i + \psi(h_0) \in T, \tag{17}$$

либо

$$x_i - h_0 \in T, \quad x_i + h_0 \in T, \quad x_i + \varphi(h_0) \in T \tag{18}$$

(h_0 *и* $|z - x_i|$ *могут быть выбраны сколь угодно малыми*).

Доказательство. Возьмем $b_k > 0$ (из определения S_c-свойства) таким малым, чтобы для любого t, $0 < t \leqslant 3b_k + 2M$, где

$$M = \max\left\{\sup_{0<h\leqslant b_k} |\varphi(h)|, \sup_{0<h\leqslant b_k} |\psi(h)|\right\},$$

выполнялись неравенства:

$$\frac{CT\cdot(z,\ z \pm t)}{t} < \frac{\rho}{16}, \quad \frac{\operatorname{mes} CQ\cdot(0,\ t)}{t} < \frac{\rho}{8} \tag{19}$$

(число ρ, $0 < \rho < 1$, взято из определения S_c-свойства). По фиксированному b_k найдем число $a_k \in (0, b_k)$, удовлетворяющее требованиям свойства S_c. Далее, из последовательности $\{x_j\}$ выбираем x_i столь близко к z, чтобы выполнялись неравенства

$$|x_i - z| < \frac{\rho}{32} a_k, \quad |x_i - z| < K, \tag{20}$$

где K равно меньшей из величин $\sup\limits_{0<h\leqslant b_k} |\varphi(h)|$, $\sup\limits_{0<h\leqslant b_k} |\psi(h)|$, если обе они положительны, и равно большей из них, если одна из них равна нулю. Обе эти величины одновременно в нуль не обращаются. Покажем, что

$$\frac{\operatorname{mes} CT\ (x_i + a_k,\ x_i + \xi)}{\xi} < \frac{\rho}{8} \quad (a_k \leqslant \xi \leqslant 2b_k) \tag{21}$$

и

$$\frac{\operatorname{mes} CT\ (x_i - a_k,\ x_i - \xi)}{\xi} < \frac{\rho}{8} \quad (a_k \leqslant \xi \leqslant 2b_k). \tag{22}$$

Так как, в силу (20), $|x_i - z| < a_k$, то

$$\operatorname{mes} CT\ (x_i \pm a_k,\ x_i \pm \xi) \leqslant \operatorname{mes} CT\cdot(z,\ x_i \pm \xi),$$

а так как

$$|x_i \pm \xi - z| < a_k + \xi < 3b_k,$$

то, на основании (19),

$$\operatorname{mes} CT\cdot(x_i \pm a_k,\ x_i \pm \xi) \leqslant \operatorname{mes} CT\ (z,\ x_i \pm \xi) \leqslant \frac{\rho}{16}\cdot|x_i \pm \xi - z| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\rho}{16}\left(\frac{|x_i - z|}{\xi} + 1\right)\xi \leqslant \frac{\rho}{16}\left(\frac{|x_i - z|}{a_k} + 1\right)\xi \leqslant \frac{\rho}{16}\cdot 2\xi = \frac{\rho}{8}\xi,$$

т. е. неравенства (21) и (22) доказаны. Если обозначить через Q_{x_i} множество, конгруэнтное Q, но сдвинутое на x_i, то из (19) получим:

$$\frac{\operatorname{mes} CQ_{x_i}(x_i,\ x_i + \xi)}{\xi} < \frac{\rho}{8} \quad (0 < \xi \leqslant b_k),$$

а следовательно, и

$$\frac{\operatorname{mes} CQ_{x_i}\ (x_i + a_k,\ x_i + \xi)}{\xi} < \frac{\rho}{8} \quad (a_k \leqslant \xi \leqslant b_k). \tag{23}$$

Пусть теперь ξ меняется от a_k до b_k. Обозначим через $T_1 = \{x_i + \xi\}$ множество таких точек из $[x_i + a_k,\ x_i + b_k]$, для которых $x_i - \xi \in T$, а через $T_2 = \{x_i + \xi\}$ — множество точек на том же сегменте, для которых $x_i + 2\xi \in T$. Когда точка $x_i + \xi$ пробегает отрезок $[x_i + a_k,\ x_i + b_k]$, точка $x_i - \xi$ описывает отрезок $[x_i - a_k,\ x_i - b_k]$, а точка $x_i + 2\xi$ — отрезок $[x_i + 2a_k,\ x_i + 2b_k]$. Множество T_1 симметрично $T \cdot [x_i - a_k,\ x_i - b_k]$ относительно x_i, а множество $T \cdot [x_i + 2a_k,\ x_i + 2b_k]$ получается из T_2 растяжением в 2 раза с центром растяжения в x_i. Используя (22), получаем:

$$\frac{\text{mes}\, CT_1 \cdot [x_i + a_k,\ x_i + \xi]}{\xi} < \frac{\rho}{8} \quad (a_k \leqslant \xi \leqslant b_k). \tag{24}$$

Учитывая (21), находим:

$$\frac{\text{mes}\, CT \cdot [x_i + 2a_k,\ x_i + 2\xi]}{2\xi} \leqslant \frac{\text{mes}\, CT \cdot [x_i + a_k,\ x_i + 2\xi]}{2\xi} < \frac{\rho}{8},$$

если $a_k \leqslant \xi \leqslant b_k$, следовательно,

$$\frac{\text{mes}\, CT_2 \cdot [x_i + a_k,\ x_i + \xi]}{\xi} < \frac{\rho}{8} \quad (a_k \leqslant \xi \leqslant b_k). \tag{25}$$

Пусть $T_3 = T \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot Q_{x_i}$. Тогда

$$CT_3 \cdot [x_i + a_k,\ x_i + \xi] = (CT + CT_1 + CT_2 + CQ_{x_i}) \cdot [x_i + a_k,\ x_i + \xi]$$

для $a_k \leqslant \xi \leqslant b_k$. Из (21), (23), (24), (25) получаем:

$$\frac{\text{mes}\, CT_3 \cdot [x_i + a_k,\ x_i + \xi]}{\xi} < 4 \cdot \frac{\rho}{8} < \rho \quad (a_k \leqslant \xi \leqslant b_k). \tag{26}$$

Если $x_i + h$ пробегает T_3, то h при этом пробегает некоторое замкнутое множество $P \subset [a_k,\ b_k]$. Согласно (26),

$$\frac{\text{mes}\, CP\,(a_k,\ \xi)}{\xi} < \rho \quad (a_k \leqslant \xi \leqslant b_k)$$

и поэтому, по свойству S_c функции $\varphi(h)$, имеем либо $\dfrac{\overline{\text{mes}}\, \varphi(P)}{\sup\limits_{0<h\leqslant b_k} |\varphi(h)|} > \rho$,

либо $\dfrac{\overline{\text{mes}}\, \psi(P)}{\sup\limits_{0<h\leqslant b_k} |\psi(h)|} > \rho$, т. е. одно из неравенств:

$$\frac{\overline{\text{mes}}\, \{x_i + \varphi(P)\}}{\sup\limits_{0<h\leqslant b_k} |\varphi(h)|} > \rho, \qquad \frac{\overline{\text{mes}}\, \{x_i + \psi(P)\}}{\sup\limits_{0<h\leqslant b_k} |\psi(h)|} > \rho, \tag{27}$$

где $\{x_i + \varphi(P)\}$ обозначает множество точек, получающихся путем сдвига множества $\varphi(P)$ на x_i. Аналогично определяется $\{x_i + \psi(P)\}$. Пусть $\lambda(h)$ — та из функций $\varphi(h)$, $\psi(h)$, для которой осуществляется неравенство (27) (согласно выбору, $\sup\limits_{0<h\leqslant b_k} |\lambda(h)| \neq 0$). Тогда

$$\overline{\text{mes}}\, \{x_i + \lambda(P)\} > \rho \cdot \sup_{0<h\leqslant b_k} |\lambda(h)|. \tag{28}$$

В силу (20), имеем:

$$\left.\begin{aligned}\{x_i+\lambda(P)\}\subset [z-|x_i-z|-\sup_{0<h\leqslant b_k}|\lambda(h)|,\\ z+|x_i-z|+\sup_{0<h\leqslant b_k}|\lambda(h)|]\subset[z-K-\sup_{0<h\leqslant b_k}|\lambda(h)|,\\ z+K+\sup_{0<h\leqslant b_k}|\lambda(h)|]\subset[z-2\sup_{0<h\leqslant b_k}|\lambda(h)|,z+2\sup_{0<h\leqslant b_k}|\lambda(h)|].\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Далее, согласно (19),

$$\operatorname{mes} CT\,[z-2\sup_{0<h\leqslant b_k}|\lambda(h)|, z+2\sup_{0<h\leqslant b_k}|\lambda(h)|]<$$
$$<\frac{\rho}{16}4\sup_{0<h\leqslant b_k}|\lambda(h)|=\frac{\rho}{4}\sup_{0<h\leqslant b_k}|\lambda(h)|. \quad (30)$$

Так как $\rho\sup_{0<h\leqslant b_k}|\lambda(h)|>\frac{\rho}{4}\sup_{0<h\leqslant b_k}|\lambda(h)|$, то из(28), (29), (30) получаем, что множество T пересекается с множеством $\{x_i+\lambda(P)\}$, т. е. существует такое $h_0\in P\ (x+h_0\in T_3,)$, для которого

$$x_i+\lambda(h_0)\in T. \quad (31)$$

Принадлежность $x_i+h_0\in T_3$ означает, что одновременно

$$x_i-h_0\in T,\quad x_i+h_0\in T\quad x_i+2h_0\in T. \quad (32)$$

Из (31) и (32) следует, что выполнено либо условие (17), либо условие (18). Лемма доказана.

§ 2

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $f(x)$ — измеримая по Лебегу функция на $(0,1)$, для которой $\lim\limits_{h\to 0,\,h\in Q}\Delta_2^{\varphi}(x,h)=0$ (или $\lim\limits_{h\to 0,\,h\in Q}\Delta_1^{\varphi}(x,h)=0$) на множестве E положительной меры, а сдвиг $\varphi(h)$ обладает свойством S_c*. Q считаем совершенным множеством, имеющим в нуле точку правосторонней плотности. Тогда $f(x)$ непрерывна почти всюду на E.*

Доказательство. Так как $\varphi(h)$ измерима, то, не уменьшая общности, можно считать $\varphi(h)$ непрерывной на Q по этому множеству. По лемме 3, существует совершенное множество P, мера которого сколь угодно близка к $\operatorname{mes} E$, на котором $\Delta_2^{\varphi}(x,h)\to 0$ (или $\Delta_1^{\varphi}(x,h)\to 0$) равномерно по x, когда $h\to 0$ и

$$x-\varphi(h)+h\in B,\quad x-\varphi(h)\in B,\quad x-\varphi(h)-h\in B$$
$$(\text{или } x-\varphi(h)\in B,\ x-\varphi(h)-h\in B),\quad h\in Q, \quad (33)$$

где B — фиксированное множество, удовлетворяющее условиям леммы 1 ($\operatorname{mes} B=1$).

Пусть $T\subset PB$ — замкнутое множество, близкое по мере к $\operatorname{mes} P$ (и к $\operatorname{mes} E$) и такое, что $f(x)$ непрерывна по этому множеству. Это возможно в силу C-свойства Н. Н. Лузина. Докажем, что $y=f(x)$ непрерывна в каждой точке плотности множества T (т. е. почти всюду на T). Пусть $z\in T$ — точка плотности множества T. Покажем сначала, что $y=f(x)$ непре-

* В частности, $\varphi(h)$ есть функция из классов α, β или L (см. леммы 4—6).

рывна по множеству B в точке z. Предположим, что это не так. Тогда можно выбрать такую последовательность $x_j \to z$, $x_j \in B$, что

$$|f(x_j) - f(z)| > \varepsilon,$$

где ε — положительное число, не зависящее от j. Для определенности считаем $f(x_j) - f(z) > \varepsilon$ (случай $f(x_j) - f(z) < -\varepsilon$ рассматривается аналогично). Пусть $t_0 > 0$ таково, что

$$|f(x) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{16} \text{ при } |z - t| < t_0, \quad x \in T. \tag{34}$$

Возьмем $\eta > 0$ столь малым, что при условии (33) и $x \in P$

$$|\Delta_2^\varphi(x, h)| < \frac{\varepsilon}{8} \text{ (или } |\Delta_1^\varphi(x, h)| < \frac{\varepsilon}{8}), \tag{35}$$

если $0 < h < \eta$. Согласно лемме 7, можно найти такие x_i и $h_0 \in Q$, что либо

$$x_i + h_0 \in T, \quad x_i + 2h_0 \in T, \quad x_i + h_0 + \varphi(h_0) \in T, \tag{17}$$

либо

$$x_i - h_0 \in T, \quad x_i + h_0 \in T, \quad x_i + \varphi(h_0) \in T. \tag{18}$$

При этом мы можем взять h_0 и $|z - x_i|$ настолько малыми, чтобы

$$|z - (x_i \pm 2h_0)| < t_0, \quad h_0 < \eta. \tag{36}$$

Рассмотрим отдельно случаи: 1) $\Delta_2^\varphi(x, h) \to 0$, 2) $\Delta_1^\varphi(x, h) \to 0$. Сперва рассмотрим случай 1) и предположим, что выполняется условие (17). Так как $x = x_i + h_0 + \varphi(h_0) \in T \subset P$, $x_i \in B$, $x_i + h_0 \in B$, $x_i + 2h_0 \in B$, то, в силу (35),

$$|\Delta_2^\varphi(x_i + h_0 + \varphi(h_0), h_0)| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Это дает:

$$|f(x_i + 2h_0) - 2f(x_i + h_0) + f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{8}. \tag{37}$$

Из (37), учитывая (34), (36), получим:

$$|f(x_i) - f(x_i + h_0)| < \frac{\varepsilon}{8} + |f(x_i + h_0) - f(x_i + 2h_0)| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{8} + |f(x_i + h_0) - f(z)| + |f(z) - f(x_i + 2h_0)| < \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{16} + \frac{\varepsilon}{16} = \frac{\varepsilon}{4}. \tag{38}$$

Используя (34) и (38), находим:

$$|f(z) - f(x_i)| \leqslant |f(z) - f(x_i + h_0)| + |f(x_i) - f(x_i + h_0)| < \frac{\varepsilon}{16} + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но это противоречит предположению, что $f(x_i) - f(z) > \varepsilon$. Допустим, что имеет место случай 1) и в то же время выполняется условие (18). Тогда

$$|\Delta_2^\varphi(x_i + \varphi(h_0), h_0)| < \frac{\varepsilon}{8},$$

т. е.

$$|f(x_i + h_0) - 2f(x_i) + f(x_i - h_0)| < \frac{\varepsilon}{8}. \tag{39}$$

Учитывая (34), получим:

$$f(x_i) - f(x_i - h_0) = f(x_i) - f(z) + f(z) - f(x_i - h_0) \geqslant f(x_i) - f(z) -$$

$$- |f(z) - f(x_i - h_0)| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{16} > \frac{\varepsilon}{2}. \tag{40}$$

Аналогично находим:

$$f(x_i) - f(x_i + h_0) > \frac{\varepsilon}{2}. \tag{41}$$

Из (40), (41) следует:

$$2f(x_i) - f(x_i - h_0) - f(x_i + h_0) = -(f(x_i + h_0) - 2f(x_i) + f(x_i - h_0)) > \varepsilon,$$

т. е.

$$|f(x_i + h_0) - 2f(x_i) + f(x_i - h_0)| > \varepsilon,$$

что противоречит (39).

Рассмотрим теперь случай 2). Предположим, что выполнено условие (17). Тогда $|\Delta_1^{\varphi}(x_i + h_0 + \varphi(h_0), h_0)| < \frac{\varepsilon}{8}$, т. е.

$$|f(x_i + h_0) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{8}. \tag{42}$$

Из (34) и (42) получаем:

$$|f(z) - f(x_i)| \leqslant |f(z) - f(x_i + h_0)| + |f(x_i + h_0) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{16} + \frac{\varepsilon}{8} < \frac{\varepsilon}{2},$$

что противоречит предположению, что $|f(x_i) - f(z)| > \varepsilon$. В случае (18) имеем:

$$|\Delta_1^{\varphi}(x_i + \varphi(h_0), h_0)| < \frac{\varepsilon}{8},$$

т. е.

$$|f(x_i) - f(x_i - h_0)| < \frac{\varepsilon}{8}. \tag{43}$$

Из (34) и (43) следует:

$$|f(z) - f(x_i)| \leqslant |f(z) - f(x_i - h_0)| + |f(x_i - h_0) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{16} + \frac{\varepsilon}{8} < \frac{\varepsilon}{2},$$

что противоречит предположению, что $|f(x_i) - f(z)| > \varepsilon$.

Таким образом, $f(x)$ непрерывна в z по множеству B. Покажем, что $f(x)$ непрерывна в обычном смысле в точке z. Если бы существовала последовательность $v_i \in CB$, $v_i \to z$, такая, что $|f(z) - f(v_i)| > \varepsilon_1 > 0$ (ε_1 не зависит от i), то для каждого i можно было бы, согласно лемме 1, найти такое ξ_i, что

$$|f(v_i) - f(\xi_i)| < \frac{\varepsilon_1}{2}, \qquad \xi_i \in B, \quad |\xi_i - v_i| < \frac{1}{i}.$$

Тогда

$$|f(z) - f(\xi_i)| > |f(z) - f(v_i)| - |f(v_i) - f(\xi_i)| > \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1}{2} = \frac{\varepsilon_1}{2},$$

но это противоречит непрерывности по множеству B в точке z, так как $\xi_i \to z$, $\xi_i \in B$. Так как $\operatorname{mes} T$ сколь угодно близка к $\operatorname{mes} E$, то теорема доказана.

Если взять $\varphi(h) \equiv 0$ или $\varphi(h) \equiv -h$, то получается такое

Следствие. *Если для каждого* $x \in E$, $\operatorname{mes} E > 0$, *существует множество* Q_x, *имеющее в* x *плотность* 1 (*хотя бы с одной стороны*), *причем* Q_x *конгруэнтны для всех* x, *по которым* $f(x)$ *непрерывна, то* $f(x)$ *непрерывна в обычном смысле почти всюду на* E.

В случае равномерного стремления к нулю второй разности на всем интервале функция будет всюду непрерывной. Это доказано автором в работе ([6]) (стр. 181). Для случая первой разности аналогичное утверждение очевидно.

§ 3

Построим измеримую на (0,1) функцию $f(x)$, которая будет φ^1- и φ^2-непрерывна (и даже φ-дифференцируема) в каждой точке любого наперед заданного нигде не плотного совершенного множества $E\subset(0,1)$ положительной меры и в то же время будет разрывной всюду на E. Построим сначала функцию-сдвиг $\varphi(h)$ на $(0,\delta)$ $(\delta>0)$. При этом мы удовлетворим требованию $\lambda_1(h)<\varphi(h)<\lambda_2(h)$, где $\lambda_1(h)$ и $\lambda_2(h)$ — любые наперед заданные монотонные непрерывные функции на $(0,\delta)$,

$$\lambda_1(h)\neq\lambda_2(h),\quad \lim_{h\to 0}\lambda_1(h)=\lim_{h\to 0}\lambda_2(h)=0.$$

Пусть r_i — центры смежных интервалов множества E. Обозначим через F_i множество чисел $\xi\in(-1,1)$, для которых $r_i+\xi\in E$. F_i — совершенные нигде не плотные множества. Множество

$$K=(-1,1)-\sum_{j=1}^{\infty}F_j=\prod_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\delta_{im}$$

есть множество 2-й категории и типа G_δ: для каждого m интервалы δ_{im} не пересекаются и не имеют общих концов. Для любого множества $\mathscr{E}$ обозначим через $\mathscr{E}_h$ множество, получаемое из $\mathscr{E}$ сдвигом на h. Пусть $T=\{\theta_k\}$ — какое-нибудь счетное множество, всюду плотное на $(-1,1)$. Выберем $0<\delta<\frac{1}{2}$ таким, что при всех h, $0<h<\delta$,

$$\lambda_1(h)\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\qquad \lambda_2(h)\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Пусть $h\in(0,\delta)$. Положим

$$L^{(h)}=K_h(\lambda_1(h),\lambda_2(h))=\left\{\prod_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\delta_{i,m}\right\}_h(\lambda_1(h),\lambda_2(h))=\prod_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sigma^h_{i,m},$$

$$M_{(h)}=K_{-h}(\lambda_1(h),\ \lambda_2(h))=\left\{\prod_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\delta_{i,m}\right\}_{-h}(\lambda_1(h),\ \lambda_2(h))=\prod_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}l^h_{i,m},$$

$$K(\lambda_1(h),\ \lambda_2(h))=\prod_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\rho^h_{i,m}.$$

Здесь σ^n_{im}, l^h_{im}, ρ^h_{im} — интервалы, принадлежащие $(\lambda_1(h),\ \lambda_2(h))$. Сумма

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sigma^h_{im}\ \left(\text{или }\sum_{i=1}^{\infty}l^h_{im}\right)$$

получена из порции суммы $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\delta_{im}$ при помощи сдвига на h (или на $-h$).

Сумма $\sum\limits_{1=i}^{\infty}\rho^h_{im}$ есть порция суммы $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\delta_{im}$. При фиксированных m и h интервалы σ^h_{im} не имеют общих внутренних точек и общих концов (то же для l^h_{im} и ρ^h_{im}) и образуют всюду плотное на $(\lambda_1(h),\ \lambda_2(h))$ множество. Положим

$$R^{(h)}=\prod_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\rho^h_{im}\sum_{i=1}^{\infty}\sigma^h_{im}\sum_{i=1}^{\infty}l^h_{im}\right).$$

$R^{(h)}$ есть множество 2-й категории и типа G_δ. Ясно, что

$$R^{(h)} \subset K(\lambda_1(h),\ \lambda_2(h)), \quad R^{(h)} \subset L^{(h)}, \quad R^{(h)} \subset M^{(h)}.$$

Укажем в $R^{(h)}$ число (точку), которое определим как $\varphi(h)$. Выбор $\varphi(h)$ в $R^{(h)}$ будет произведен конструктивно. В сумме $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_{i,1}^{h}$ выберем наибольший интервал, а если их окажется несколько, то возьмем самый правый из них. Выбор будем производить из интервалов, лежащих строго внутри $(\lambda_1(h),\ \lambda_2(h))$, т. е. из тех, концы которых не попадают в точки $\lambda_1(h)$, $\lambda_2(h)$. Если же в сумме имеется лишь один интервал, совпадающий с $(\lambda_1(h),\ \lambda_2(h))$, то его и выберем. Обозначим выбранный интервал через ρ_1^h. Внутри ρ_1^h выберем две разные точки из T, которые обозначим через $\theta_{j_1 h,\rho}$, $\theta_{\bar{j}_1 h,\rho}$, причем потребуем, чтобы

$$0 < \theta_{\bar{j}_1 h,\rho} - \theta_{j_1 h,\rho} < \frac{1}{2^1}.$$

Пусть

$$\Delta_1^{\rho, h} = \left(\theta_{j_1 h,\rho},\ \theta_{\bar{j}_1 h,\rho}\right).$$

Для однозначности выбора будем считать, что $j_1^{h,\rho}$ — наименьший номер члена части $T\cdot\rho_1^h$ последовательности T, а $\bar{j}_1^{h,\rho}$ — наименьший номер члена части $T\cdot\left(\theta_{\bar{j}_1 h,\rho}, \theta_{\bar{j}_1 h,\rho} + \frac{1}{2^1}\right)\rho_1^h$. Строго внутри $\Delta_1^{\rho,h}$ выбираем наибольший и самый правый интервал из суммы

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_{i,1}^{h} \Delta_1^{\rho,h}.$$

Если же

$$\Delta_1^{\rho,h} \subset \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_{i,1}^{h},$$

то выбираем $\Delta_1^{\rho,h}$. Пусть выбран интервал $\sigma_{m_1,1}^{h}\,\Delta_1^{\rho,h}$. Обозначим его через σ_1^h. В этом интервале однозначно выберем точки $\theta_{\bar{j}_1 h,\sigma}, \theta_{\bar{j}_1}^{h,\sigma}$ так же как раньше, положив

$$(\theta_{j_1 h,\sigma},\quad \theta_{\bar{j}_1 h,\sigma}) = \Delta_1^{\sigma,h}, \qquad \left|\Delta_1^{\sigma,h}\right| < \frac{1}{2^1}.$$

Строго внутри $\Delta_1^{\sigma,h}$ выбираем наибольший и самый правый интервал из суммы

$$\sum_{i=1}^{\infty} l_{i,1}^{h} \Delta_1^{\sigma,h}.$$

Если

$$\Delta_1^{\sigma,h} \subset \sum_{i=1}^{\infty} l_{i,1}^{h},$$

то выбираем $\Delta_1^{\sigma,h}$. Обозначим выбранный интервал через l_1^h. В этом интервале однозначно выберем точки $\theta_{j_1 h,l}$, $\theta_{\bar{j}_1 h,l}$ так, что, положив

$$(\theta_{j_1 h,l},\ \theta_{\bar{j}_1 h,l}) = \Delta_1^{l,h},$$

получим:

$$\left|\Delta_1^{l,h}\right| < \frac{1}{2^1}.$$

Внутри $\Delta_1^{l,h}$ выбираем наибольший и самый правый интервал из суммы

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho_{i,2}^{h} \quad \Delta_1^{l,h}.$$

Если

$$\Delta_1^{l,h} \subset \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{i,2}^{h},$$

то выбираем $\Delta_1^{l,h}$. Обозначим выбранный интервал через ρ_2^h. В ρ_2^h находим интервал

$$(\theta_{j_2 h,\rho},\ \theta_{\bar{j}_2 h,\rho}) = \Delta_2^{\rho,h}, \qquad |\Delta_2^{\rho,h}| < \frac{1}{2^2}$$

и т. д. Продолжая процесс неограниченно, получаем интервалы

$$\Delta_1^{\rho,h} \supset \Delta_1^{\sigma,h} \supset \Delta_1^{l,h} \supset \Delta_2^{\rho,h} \supset \Delta_2^{\sigma,h} \supset \dots,$$

каждый из которых лежит строго внутри предыдущего. Длины $\Delta_m^{\rho,h}$, $\Delta_m^{\sigma,h}$, $\Delta_m^{l,h}$ меньше $\frac{1}{2^m}$. Очевидно, эта система определяет одну точку (число) из $R^{(h)}$, т. е. точку, общую всем этим интервалам. Это число примем за $\varphi(h)$. Тогда

$$\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0,$$

так как $\varphi(h) \in (\lambda_1(h),\ \lambda_2(h))$. Принадлежность $\varphi(h) \in R^{(h)}$, если учесть определение $R^{(h)}$, дает:

$$\varphi(h) \in K, \quad \varphi(h) + h \in K, \quad \varphi(h) - h \in K,$$

т. е.

$$\varphi(h) \,\bar{\in} \sum_{j=1}^{\infty} F_j, \quad \varphi(h) \pm h \,\bar{\in} \sum_{j=1}^{\infty} F_j,$$

а это означает, что при любом $x \in E$ и любом $h \in (0, \delta)$ точки $x - \varphi(h)$, $x - \varphi(h) \pm h$ не попадают в точки r_i. В самом деле, если бы $x - \varphi(h) = r_i$, то $x = r_i + \varphi(h)$, а так как $x \in E$, то $\varphi(h) \in F_i$, что противоречит условию $\varphi(h) \in K$. Аналогично, из $x - \varphi(h) \pm h = r_i$ следовало бы, что $\varphi(h) \mp h \in F_i$.

Определим теперь $f(x)$: $f(x) = 1$ при $x = r_i$, $f(x) = 0$ в $(0,1) - \{r_i\}$, где $\{r_i\}$ — множество всех точек r_i, $i = 1,2,\dots$. Эта функция разрывна всюду на E. Ясно, что

$$\Delta_1^{\varphi}(x, h) = \Delta_2^{\varphi}(x, h) \equiv 0$$

при $x \in E$ и любом $h \in (0, \delta)$, т. е. $f(x)$ φ^1- и φ^2- непрерывна на E. $f(x)$ φ-дифференцируема, так как

$$\frac{\Delta_1^{\varphi}(x, h)}{h} \equiv 0 \ \ (x \in E,\ h \in (0, \delta)),$$

и в то же время не имеет обычной производной на E. Этот пример показывает, что теоремы 1 и 2 неверны для любой $\varphi(h)$, удовлетворяющей условию $|\varphi(h)| < Ch$ (ср. с условием α; см. введение), так как в построенном примере можно предполагать, что $\varphi(h)$ удовлетворяет неравенству $-h < \varphi(h) < h$. Выясним структуру полученного сдвига $\varphi(h)$ (ясно, что при произвольном выборе $\varphi(h)$ в $R^{(h)}$ мы получили бы, вообще,

неизмеримую функцию $\varphi(h)$). Покажем, что $\varphi(h)$ имеет не более счетного множества точек разрыва. Обозначим через H^ρ множество тех h из $(0, \delta)$, для каждого из которых хотя бы один интервал $\delta_{i,m}$ имеет конец в точках $\lambda_1(h)$, $\lambda_2(h)$, или точки $T=\{\theta_k\}$ попадают в точки $\lambda_1(h)$, $\lambda_2(h)$. Множество H^ρ счетно в силу строгой монотонности $\lambda_1(h)$, $\lambda_2(h)$. Через H^σ обозначим множество значений h из $(0, \delta)$, для каждого из которых хотя бы один конец интервала вида $(\delta_{i,n})_h \cdot (-1,1)$ попадает в точку множества T. Аналогично определяем H^l (надо брать $(\delta_{i,n})_{-h} \cdot (-1,1)$). H^σ и H^l — счетные множества. В самом деле, если $\delta_{in} = (\alpha_{in}, \beta_{in})$, то уравнений типа

$$\alpha_{in} \pm h = \theta_k, \quad \beta_{in} \pm h = \theta_k$$

будет счетное множество, а следовательно, те значения h, которые удовлетворяют какому-либо из них, составят также счетное множество. Множество $H = H^\rho + H^\sigma + H^l$ счетно. Пусть $h_0 \in (0, \delta) - H$. Докажем непрерывность $\varphi(h)$ в h_0. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и определим n_0 из условия

$$\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon.$$

$\varphi(h_0)$ принадлежит всем интервалам

$$\Delta_1^{\rho, h_0} \supset \Delta_1^{\sigma, h_0} \supset \Delta_1^{l, h_0} \supset \Delta_2^{\rho, h_0}, \ldots,$$

а $\varphi(h)$ — интервалам

$$\Delta_1^{\rho, h} \supset \Delta_1^{\sigma, h} \supset \Delta_1^{l, h} \supset \Delta_2^{\rho, h} \supset \ldots.$$

При достаточно малом $|h_0 - h|$ будем иметь:

$$\Delta_1^{\rho, h} = \Delta_1^{\rho, h_0}.$$

В самом деле,

$$\Delta_1^{\rho, h_0} \subset \rho_1^{h_0}.$$

Если $\rho_1^{h_0}$ строго внутри $(\lambda_1(h_0), \lambda_2(h_0))$, то при малом $|h_0 - h|$ он останется самым большим и самым правым строго внутри $(\lambda_1(h), \lambda_2(h))$, так как $\lambda_1(h)$ и $\lambda_2(h)$ мало изменятся в силу непрерывности, а $h_0 \bar{\in} H^\rho$ (при $h_0 \in H^\rho$ $\rho_1^{h_0}$ мог бы потерять свойство быть наибольшим и самым правым при переходе от h_0 к $h \neq h_0$, так как это свойство могло бы перейти к интервалу, имеющему общий конец с $(\lambda_1(h_0), \lambda_2(h_0))$). Имеем:

$$\rho_1^h = \rho_1^{h_0}$$

и, следовательно,

$$\Delta_1^{\rho, h_0} = \Delta_1^{\rho, h}.$$

Если же

$$\rho_1^{h_0} = (\lambda_1(h_0), \lambda_2(h_0)),$$

то $\rho_1^{h_0}$ лежит строго внутри (так как $h_0 \bar{\in} H^\rho$) какого-то интервала $\delta_{i,n}$. Тогда при достаточно малом $|h - h_0|$ интервал $(\lambda_1(h), \lambda_2(h))$ лежит строго внутри того же $\delta_{i,n}$ и, следовательно,

$$\rho_1^h = (\lambda_1(h), \lambda_2(h)),$$

а также

$$\theta_{j_1^{h,\rho}}=\theta_{j_1^{h_0,\rho}},\quad \theta_{\bar{j}_1^{h,\rho}}=\theta_{\bar{j}_1^{h_0,\rho}}$$

(так как $\lambda_1(h_0)\overline{\in}T$, $\lambda_2(h_0)\overline{\in}T$, то при малом $|h-h_0|$ в $(\lambda_1(h),\lambda_2(h))$ не попадут точки из T с номерами, меньшими чем $j_1^{h,\rho}$, и, следовательно, $j_1^{h_0,\rho}=j_1^{h,\rho}$, а в $\left(\theta_{j_1^{h,\rho}},\theta_{j_1^{h,\rho}}+\frac{1}{2^i}\right)\rho_1^h$ не попадут точки с номерами, меньшими, чем $\bar{j}_1^{h_0\rho}$, и, значит, $\bar{j}_1^{h_0,\rho}=\bar{j}_1^{h,\rho}$).

Итак, $\Delta_1^{\rho,h_0}=\Delta_1^{\rho,h}$. Теперь покажем, что при достаточно малых $|h-h_0|$

$$\Delta_1^{\sigma,h}=\Delta_1^{\sigma,h_0}$$

Имеем:

$$\Delta_1^{\sigma,h_0}\subset\sigma_1^{h_0}\subset\Delta_1^{\rho,h_0},\quad \Delta_1^{\sigma,h}\subset\sigma_1^{h}\subset\Delta_1^{\rho,h},\quad \Delta_1^{\rho,h}=\Delta_1^{\rho,h_0}$$

(интервал σ_1^h рассматривается при определении $\Delta_1^{\sigma,h}$). Если σ_1^h лежит строго внутри Δ_1^{ρ,h_0}, то

$$\sigma_1^{h_0}=(\delta_{i,n})_{h_0}$$

для определенных i, n и, значит,

$$\sigma_1^{h}=(\delta_{i,n})_{h}$$

для тех же i, n остается самым большим и самым правым из лежащих строго внутри $\Delta_1^{\rho,h}$ (это следует опять из тех соображений, что концы Δ_1^{ρ,h_0}, которые принадлежат множеству T, не совпадают с концами интервалов вида $(\delta_{k,r})_{h_0}$, так как $h_0\overline{\in}H^\sigma$). Так как концы $\sigma_1^{h_0}$ не принадлежат T, то при достаточно малом $|h-h_0|$

$$\theta_{j_1^{h,\sigma}}=\theta_{j_1^{h_0}\sigma},\quad \theta_{\bar{j}_1^{h,\sigma}}=\theta_{\bar{j}_1^{h_0,\sigma}},$$

так как $\theta_{j_1^{h_0,\sigma}}$, $\theta_{\bar{j}_1^{h_0,\sigma}}$ останутся в σ_1^h, а точки из T с меньшими номерами в σ_1^h не попадут. Следовательно,

$$\Delta_1^{\sigma,h}=\Delta_1^{\sigma,h_0}.$$

Мы уже знаем, что $h_0\overline{\in}H^\sigma$ и концы интервала Δ_1^{ρ,h_0} не совпадают с концами интервалов $(\delta_{i,n})_{h_0}$. В таком случае, если $\sigma_1^{h_0}=\Delta_1^{\rho,h_0}$, то интервал $\sigma_1^{h_0}$ лежит строго внутри какого-то интервала $(\delta_{i,n})_{h_0}$. При достаточно малом $|h-h_0|$ σ_1^h будет лежать строго внутри $(\delta_{i,n})_h$ и

$$\sigma_1^h=\Delta_1^{\rho,h}=\Delta_1^{\rho,h_0}=\sigma_1^{h_0}.$$

Отсюда получаем:

$$\Delta_1^{\sigma,h}=\Delta_1^{\sigma,h_0}.$$

Совершенно аналогично можно доказать, что при достаточно малом $|h-h_0|$ будет выполняться равенство

$$\Delta_1^{l,h}=\Delta_1^{l,h_0}$$

и т. д. Вообще при достаточно малом $|h-h_0|$ $(|h-h_0|<\eta(n_0))$ будут выполняться равенства

$$\Delta_k^{\rho,h}=\Delta_k^{\rho,h_0},\quad \Delta_k^{\sigma,h}=\Delta_k^{\sigma,h_0},\quad \Delta_k^{l,h}=\Delta_k^{l,h_0}$$

для $k=1,2,\ldots,n_0$.

Так как $\varphi(h) \in \Delta_{n_0}^{l,h}$, $\varphi(h_0) \in \Delta_{n_0}^{l,h_0}$, то при достаточно малом $|h - h_0|$

$$|\varphi(h) - \varphi(h_0)| < |\Delta_{n_0}^{l,h_0}| < \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon,$$

т. е. $\varphi(h)$ непрерывна в точке h_0. Так как h_0 была любой точкой интервала $(0, \delta)$, не принадлежащей счетному множеству H, то $\varphi(h)$ непрерывна всюду на $(0, \delta)$, кроме счетного множества точек.

Замечание. Точки множества $x - h$, где $x \in E$, $h \in K$ (см. выше определение K), не попадают в точки r_i. Поэтому построенный пример $f(x)$ дает функцию, всюду разрывную на E, для которой

$$f(x) - f(x-h) \equiv 0 \quad \text{при } x \in E,\ h \in K.$$

Это значит, что односторонняя непрерывность по конгруэнтным множествам 2-й категории и типа G_δ не является достаточным условием для непрерывности почти всюду (ср. со следствием из теоремы 1). Аналогичное утверждение имеет место и для односторонней дифференцируемости.

Известно [см. (4), стр. 322], что если функция непрерывна слева (т. е. $\varphi(h) \equiv 0$) всюду на интервале, то множество точек разрыва не более, чем счетно. Это доказано Н. Н. Лузиным. Почти дословно аналогичное утверждение получаем, если функция $f(x)$ (на (a, b)) непрерывна слева в каждой точке некоторого множества $E \subset (a, b)$. Предположим, что M — несчетное подмножество E точек разрыва функции $f(x)$:

$$M = E \sum_{k=1}^{\infty} M_k = \sum_{k=1}^{\infty} E \cdot M_k,$$

где M_k — множество точек из интервала (a, b), в которых колебание функции не меньше $\frac{1}{k}$. Предположим, что EM_k несчетно для $k = k_0$. Тогда существует точка $\xi \in EM_{k_0}$, в любой близости которой слева есть точки из EM_{k_0}. В точке ξ слева колебание функции не меньше $\frac{1}{k_0}$, что противоречит непрерывности слева. Доказано, что множество точек разрыва в множестве точек φ^1-непрерывности функции $f(x)$ при $\varphi(h) \equiv 0$ не более, чем счетно. Это утверждение уже неверно для $\varphi(h) \equiv -\frac{h}{2}$, т. е. для симметрически непрерывной функции. Мы построим примеры всюду разрывных функций, для которых первая или вторая симметрическая разность стремится к нулю на множестве, содержащем совершенное подмножество (и, следовательно, несчетном). Приступим к построению. Существует множество A, обладающее свойствами:

1) $\operatorname{mes} A = 0$,

2) A содержит совершенное подмножество,

3) A симметрично относительно каждой своей точки (считаем множество A лежащим на единичной окружности),

4) A всюду плотно (это вытекает из свойств 2) и 3)),

5) AA_{h_0}, AA_{-h_0}, $A_{h_0}A_{-h_0}$ пусты для некоторого h_0, где A_h — множество, полученное из A сдвигом на h.

Такое множество A можно получить, рассматривая, например, совокупность A всех точек абсолютной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n!\, x}{n}.$$

Свойства 1) — 4) здесь выполнены [см. ([8]), стр. 134, 137, 145]. Далее, известно, что множество A точек абсолютной сходимости тригонометрического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin x$$

обладает тем свойством, что из $a \in A$ и $b \in A$ следует $a \pm b \in A$ $\left(\text{выводится из неравенства } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \sin n(a \pm b)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \sin na| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \sin nb|\right)$. Отсюда получаем, что из $a \in A$, $b \in A$, $c \in A$ следует $c + h \in A$, где $h = a - b$. Ясно, что множества A и A_h либо совпадают, либо не пересекаются. A имеет одинаковое строение (конгруэнтно) около любой своей точки. Так как для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n!x}{n}$$

$\operatorname{mes} A = 0$, то найдется такое h_0, что $a + h_0 \,\overline{\in}\, A$ и $a + 2h_0 \,\overline{\in}\, A$, где $a \in A$.

Множества AA_{h_0} и AA_{2h_0} пусты. $A_{h_0}A_{2h_0}$ также пусто, так как взаимное расположение A_{h_0} и A_{2h_0} такое же, как у A и A_{h_0}. Отсюда получаем, что A_{-h_0}, A, A_{h_0} не пересекаются друг с другом, так как их взаимное расположение такое же, как у A, A_{h_0}, A_{2h_0}, следовательно, выполнено свойство 5).

Покажем, что A_{-h_0} симметрично A_{h_0} относительно каждой точки $x_0 \in A$. Пусть $x_0 \in A$ и $y \in A_{-h_0}$. Тогда

$$y + h_0 \in A, \quad x_0 - (y + h_0 - x_0) \in A, \quad x_0 - (y + h_0 - x_0) + h_0 = 2x_0 - y \in A_{h_0},$$

а $2x_0 - y$ симметрична y относительно x_0, так как $\frac{2x_0 - y + y}{2} = x_0$. Обратное отношение доказывается аналогично. A_{-h_0} и A_{h_0} всюду плотны вместе с A.

Построим функцию $y = f(x)$: $f(x) = -1$ при $x \in A_{-h_0}$, $f(x) = 1$ при $x \in A_{h_0}$, $f(x) = 0$ в остальных точках. Функция $f(x)$ всюду разрывна и

$$f(x + h) - 2f(x) + f(x - h) \equiv 0 \qquad (\Delta_2^0(x, h) \equiv 0)$$

при $x \in A$. A — несчетное множество.

Для первой симметрической разности аналогичный пример получается проще. Берем множество A. Строим функцию $y = f(x)$: $f(x) = 1$ при $x \in A$, $f(x) = 0$ при $x \in CA$. Функция $f(x)$ всюду разрывна и симметрически непрерывна в каждой точке множества A. $\Delta_1^{\varphi}(x, h) \equiv 0$ $\left(\varphi(h) \equiv -\frac{h}{2}\right)$ при $x \in A$. Конгруэнтность A около каждой своей точки дает возможность строить разнообразные виды $\varphi(h)$, для которых имеет место то явление, которое мы описали для симметрического случая. Интересно было бы выяснить, существуют ли такие виды $\varphi(h)$, кроме

$\varphi(h)\equiv 0$ и $\varphi(h)\equiv -h$, для которых множество точек разрыва $f(x)$ не может быть несчетным.

§ 4

Перейдем к вопросам φ-дифференцируемости. Если функция $y=f(x)$ имеет обычную производную в точке x_0, то она не обязана в этой точке иметь φ-производную при любом $\varphi(h)$. Правда, если $\left|\frac{\varphi(h)}{h}\right| < M$ (при всех достаточно малых h и $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0$), то φ-производная существует в этой же точке и $f'_{\varphi}(x_0)=f'(x_0)$. Покажем это. Можно считать $f'(x_0)=0$ (рассматривая вместо $f(x)$ функцию $f(x)-f'(x_0)(x-x_0)$). Если $\varphi(h)\neq 0$ и $\varphi(h)+h\neq 0$, то

$$\left|\frac{f(x-\varphi(h))-f(x-\varphi(h)-h)}{h}\right| = \left|\frac{f(x)-f(x-\varphi(h))}{h} - \frac{f(x)-f(x-\varphi(h)-h)}{h}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{f(x)-f(x-\varphi(h))}{\varphi(h)}\cdot\frac{\varphi(h)}{h}\right| + \left|\frac{f(x)-f(x-\varphi(h)-h)}{\varphi(h)+h}\,\frac{\varphi(h)+h}{h}\right|. \qquad (44)$$

Каждое слагаемое правой части стремится к нулю при $h\to 0$, так как

$$f'(x_0)=0, \quad \lim_{h\to 0}\varphi(h)=0, \quad \lim_{h\to 0}[\varphi(h)+h]=0,$$

а $\frac{\varphi(h)}{h}$ и $\frac{\varphi(h)+h}{h}$ ограничены. Следовательно, $f'_{\varphi}(x_0)=f'(x_0)=0$. В случае обращения в нуль $\varphi(h)$ или $\varphi(h)+h$ левая часть неравенства (44) равна

$$\left|\frac{f(x)-f(x-h)}{h}\right| \quad \text{или} \quad \left|\frac{f(x-\varphi(h))-f(x)}{\varphi(h)}\,\frac{\varphi(h)}{h}\right|$$

и, значит, также будет стремиться к нулю при $h\to 0$, т. е. и в этом случае

$$f'_{\varphi}(x_0)=f'(x_0)=0.$$

Для любого $\varphi(h)$ с неограниченным $\frac{\varphi(h)}{h}$ можно легко построить пример, где $f'(x_0)$ существует, а $f'_{\varphi}(x_0)$ не существует. Мы построим пример для любой непрерывной $\varphi(h)$, где это будет выполнено на множестве положительной меры (см. § 5).

Ясно также, что из φ-дифференцируемости не следует обычная дифференцируемость в точке. Нашей основной задачей является выяснение условий, при которых из φ-дифференцируемости следует обычная дифференцируемость на множестве положительной меры (теорема 2).

Докажем несколько лемм.

ЛЕММА 8. *Пусть измеримая на интервале* $(0,1)$ *функция* $f(x)$ *имеет* φ-*производную, т. е.* $f'_{\varphi}(x)=\lim\limits_{h\to 0,\, h\in Q}\frac{\Delta_1^{\varphi}(x,h)}{h}$ *на измеримом множестве* $E\subset(0,1)$, *где* Q — *множество, имеющее нуль своей левой предельной точкой. Тогда* $f'_{\varphi}(x)$ — *измеримая функция*.*

Доказательство. Пусть $x\in E$. Тогда

$$f'_{\varphi}(x)=\lim_{h\to 0,\, h\in Q}\frac{f(x-\varphi(h))-f(x-\varphi(h)-h)}{h}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x-\varphi(h_n))-f(x-\varphi(h_n)-h_n)}{h_n},$$

* $\varphi(h)$ — произвольная функция на $(0,\delta)$, $\delta>0$; $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0$.

где $\{h_n\}$ — последовательность такая, что $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$, $h_n > 0$, $h_n \in Q$. $f(x-\varphi(h_n))$ и $f(x-\varphi(h_n)-h_n)$ — измеримые функции, так как получены сдвигом из $f(x)$*.

Итак, $f'_\varphi(x)$ есть предел последовательности измеримых функций

$$\Phi_n(x) = \frac{f(x-\varphi(h_n)) - f(x-\varphi(h_n)-h_n)}{h_n}$$

на множестве E и, следовательно, является измеримой функцией.

ЛЕММА 9. *Пусть измеримая на* $(0,1)$ *функция* $f(x)$ *имеет* φ*-производную на множестве* $E \subset (0,1)$, $\operatorname{mes} E > 0$, *а* $\varphi(h)$ *удовлетворяет условию* S'_d. *Тогда почти всюду на* E $y = f(x)$ *имеет асимптотическую производную и*

$$f'_{ac}(x) = f'_\varphi(x) = \lim_{h\to 0,\, h\in Q} \frac{\Delta_1^\varphi(x, h)}{h}$$

(Q — совершенное множество плотности 1 справа в нуле).

Доказательство. Возьмем замкнутое множество $P \subset E$ ($\operatorname{mes} P$ близка к $\operatorname{mes} E$), на котором $f'_\varphi(x)$ непрерывна по P (так как, по лемме 8, $f'_\varphi(x)$ — измеримая функция) и где стремление

$$\frac{f(x-\varphi(h)) - f(x-\varphi(h)-h)}{h} \to f'_\varphi(x)$$

будет равномерным по x при $h \to 0$ $(h \in Q)$, если $x-\varphi(h) \in B$, $x-\varphi(h)-h \in B$ и B (см. лемму 1) имеет полную меру. Последнее условие будет выполняться согласно лемме 3**. Пусть x_0 — точка плотности множества PB и $x_0 \in B$. Положим

$$x = x_0 + \varphi(h), \quad z = x_0 - h.$$

Рассмотрим те значения h, для которых

$$x_0 + \varphi(h) = x \in P.$$

Множество соответствующих значений $z = x_0 - h$ обозначим через $H^\varphi_{x_0}$. Аналогично, пусть $H^\psi_{x_0}$ — множество тех $z = x_0 + h$, для которых $x_0 + h + \varphi(h) \in P$. По свойству S'_d функции $\varphi(h)$, либо $H^\varphi_{x_0}$ имеет слева от x_0 нижнюю плотность больше нуля, либо $H^\psi_{x_0}$ обладает тем же свойством справа от x_0. Пусть, для определенности, $H^\varphi_{x_0}$ обладает упомянутым выше свойством. Тогда этим свойством обладает множество $H^\varphi_{x_0}BQ_{x_0}$ (Q_{x_0} — множество значений $x_0 - h$ при $h \in Q$), так как Q_{x_0} имеет в x_0 плотность 1 слева. Берем любое $z = x_0 - h \in H^\varphi_{x_0}BQ_{x_0}$. Когда $z \to x_0$, оставаясь на $H^\varphi_{x_0}BQ_{x_0}$, то

$$\frac{f(x_0) - f(z)}{x_0 - z} - f'_\varphi(x_0) =$$

$$= \left[\frac{f(x-\varphi(h)) - f(x-\varphi(h)-h)}{h} - f'_\varphi(x)\right] + [f'_\varphi(x) - f'_\varphi(x_0)] \to 0,$$

где $x = x_0 + \varphi(h) \in P$. Это следует из того, что $x - \varphi(h) = x_0 \in B$ и $x - \varphi(h) - h = z \in B$, $h \in Q$ и, следовательно,

---

* Мы можем считать $f(x)$ равной нулю вне интервала (0,1).

** Ясно, что можно считать $\varphi(h)$ непрерывной по множеству Q, переходя, если нужно, к его подмножеству также плотности 1 справа в нуле.

$$\frac{f(x-\varphi(h))-f(x-\varphi(h)-h)}{h}\to f'_\varphi(x)$$

равномерно по $x\,(x\in P)$ при $h\to 0$ $(h\to 0$ при $z\to x_0)$; $f'_\varphi(x)\to f'_\varphi(x_0)$ по определению множества P, так как $x\to x_0$, ибо $x-x_0=\varphi(h)\to 0$ при $h\to 0$, а $x\in P$, $x_0\in P$. Следовательно, $f(x)$ имеет производную в x_0 по множеству нижней плотности больше нуля слева от x_0, которая равна $f'_\varphi(x_0)$. Если же $H^{\psi}_{x_0}$ имеет положительную нижнюю плотность справа от x_0, то, рассуждая аналогично, докажем, что $f(x)$ имеет производную, равную $f'_\varphi(x_0)$ по множеству положительной нижней плотности справа от x_0. Итак, почти в каждой точке x_0 множества PB существует либо производная по $H^{\varphi}_{x_0}BQ_{x_0}$, либо по $H^{\psi}_{x_0}BQ_{x_0}$. По теореме А. Я.Хинчина — А. Данжуа [см. ([5]), стр. 426], отсюда следует асимптотическая дифференцируемость $f(x)$ почти всюду на PB. Этим, очевидно, доказана асимптотическая дифференцируемость $f(x)$ почти всюду на E. Ясно также, что

$$f'_{ac}(x)=f'_\varphi(x)$$

почти всюду на E, так как асимптотическая производная и производная по множеству положительной нижней плотности совпадают в точках их существования.

ЛЕММА 10. *Пусть $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а $\varphi(h)$ непрерывна и монотонно не убывает на $(0,\delta)$ $(\varphi(0)=0)$. Если существует $f'_\varphi(x_0)$, то $f(x)$ имеет в x_0 производную слева, которая равна $f'_\varphi(x_0)$*.*

Доказательство. Если $\varphi(h)=0$ для всех достаточно малых $h>0$, то лемма доказана, так как в этом случае $f'_\varphi(x)$ есть производная слева от $f(x)$ в точке x_0. Поэтому можно предположить, что $\varphi(h)\not\equiv 0$ в окрестности нуля справа. $\varphi(h)+h$ — монотонно возрастающая и непрерывная функция. Возьмем $x<x_0$. Подберем $h_1>0$ так, чтобы $x=x_0-\varphi(h_1)-h_1$ (x взято достаточно близко от x_0). Аналогично найдем такое $h_2>0$, чтобы $x+h_1=x_0-\varphi(h_2)-h_2$ и т. д. Мы получим последовательность положительных чисел h_i, $i=1,2,\ldots$, удовлетворяющих условиям:

$$x+h_1+h_2+h_3+\cdots+h_i=x_0-\varphi(h_{i+1})-h_{i+1},\quad i=1,2,3,\ldots.$$

Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}h_i$ сходится, так как $\sum\limits_{i=1}^{\infty}h_i<x_0-x$. Далее,

$$\sum_{i=1}^{\infty}h_i=x_0-x,$$

так как $\varphi(h_i)+h_i\to 0$ при $i\to\infty$. Имеем:

$$\frac{f(x_0-\varphi(h_i))-f(x_0-\varphi(h_i)-h_i)}{h_i}=f'_\varphi(x_0)+\varepsilon(h_i),$$

---

* Аналогичную лемму можно доказать для дифференцируемости справа, если предположить монотонность $\psi(h)=\varphi(h)+h$, $\psi(h)<0$. Наложенные на $\varphi(h)$ ограничения существенны. Например, для случая симметрической дифференцируемости $\left(\varphi(h)\equiv-\frac{h}{2}\right)$ лемма неверна.

где $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$, а так как

$$x_0-\varphi(h_i)=x_0-\varphi(h_{i+1})-h_{i+1},$$

то

$$\frac{f(x_0-\varphi(h_{i+1})-h_{i+1})-f(x_0-\varphi(h_i)-h_i)}{h_i}=f'_\varphi(x_0)+\varepsilon(h_i).$$

В силу непрерывности $f(x)$, получаем:

$$f(x)+\sum_{i=1}^{n}[f(x_0-\varphi(h_{i+1})-h_{i+1})-f(x_0-\varphi(h_i)-h_i)]=$$
$$=f(x_0-\varphi(h_{n+1})-h_{n+1})\to f(x_0)\quad (\text{при } n\to\infty).$$

Это значит, что

$$f(x_0)=f(x)+\sum_{i=1}^{\infty}[f(x_0-\varphi(h_{i+1})-h_{i+1})-f(x_0-\varphi(h_i)-h_i)]=$$
$$=f(x)+\sum_{i=1}^{\infty}h_i(f'_\varphi(x_0)+\varepsilon(h_i)),$$

т. е.

$$f(x_0)-f(x)=f'_\varphi(x_0)(x_0-x)+\sum_{i=1}^{\infty}h_i\,\varepsilon(h_i). \tag{45}$$

Заметим, что $h_1>h_2>\cdots>h_i>\ldots$. Действительно, из

$$x_0-\varphi(h_i)=x_0-\varphi(h_{i+1})-h_{i+1}$$

следует

$$\varphi(h_i)-\varphi(h_{i+1})=h_{i+1}>0,$$

т. е. $\varphi(h_i)>\varphi(h_{i+1})$, а в силу монотонности $\varphi(h)$ получаем $h_i>h_{i+1}$. Но

$$\sum_{i=1}^{\infty}h_i\varepsilon(h_i)=\theta(x_0-x),$$

где $|\theta|\leqslant\max\limits_{1\leqslant i<\infty}|\varepsilon(h_i)|$. Кроме того, $\max\limits_{1\leqslant i<\infty}|\varepsilon(h_i)|$ стремится к нулю при $x\to x_0$, так как

$$\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0 \text{ и } \lim_{x\to x_0}\max_{1\leqslant i<\infty}h_i=\lim_{x\to x_0}h_1=0.$$

Итак, из (45) следует, что

$$\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}=f'_\varphi(x_0)+\theta,\qquad \lim_{\substack{x<x_0\\ x\to x_0}}\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}=f'_\varphi(x_0).$$

Лемма доказана.

Теорема 2 будет доказана в предположении, что $\varphi(h)$ обладает свойствами S'_d и S''_d. Покажем, например, что $\varphi(h)\equiv Ch^\alpha$ $(\alpha>0)$ обладает этими свойствами. Достаточно взять $\varphi(h)\equiv h^\alpha$. Проверим свойство S''_d. Берем замкнутое множество $P\subset(0,b)$, $\operatorname{mes}P>(1-\rho)b$*. При $\alpha\leqslant 1$ имеем:

* Положим ρ, $0<\rho<\frac{1}{3}$, таким малым, чтобы $1-\rho^\alpha>\rho$.

$$\operatorname{mes}\varphi(P)=\int_P\varphi'(h)\,dh\geqslant\int_{b-\operatorname{mes}P}^{b}\varphi'(h)\,dh>\int_{b-(1-\rho)b}^{b}\varphi'(h)\,dh=$$
$$=(h^\alpha)_{\rho b}^{b}=b^\alpha(1-\rho^\alpha),$$
$$\frac{\operatorname{mes}\varphi(P)}{\varphi(b)}>\frac{b^\alpha(1-\rho^\alpha)}{b^\alpha}=1-\rho^\alpha>\rho,\quad \varphi(b)=b^\alpha>b>\rho b.$$

При $\alpha\geqslant 1$

$$\operatorname{mes}\psi(P)>\operatorname{mes}P>(1-\rho)b,$$
$$\frac{\operatorname{mes}\psi(P)}{\psi(b)}>\frac{(1-\rho)b}{b^\alpha+b}>\frac{(1-\rho)b}{2b}=\frac{1-\rho}{2}>\rho\quad\left(\text{при }\rho<\frac{1}{3}\right),\quad \psi(b)>\rho b.$$

Свойство S_d'' доказано. Докажем свойство S_d'. Если $\varphi\equiv h^\alpha$, то φ^{-1} — функция того же типа*. Если P — замкнутое множество плотности 1 в нуле, то оно отображается в множество положительной нижней плотности в нуле функцией $\varphi^{-1}\equiv h^\alpha$. Действительно, при $\alpha\leqslant 1$ это уже было установлено выше рассмотрением функции $\varphi(h)\equiv h^\alpha$ при $\alpha\leqslant 1$. Пусть теперь $\varphi^{-1}\equiv h^\alpha$, $\alpha\geqslant 1$. Если $P\subset[0,\ \varphi(b)]$, $\operatorname{mes}P>(1-\rho)\varphi(b)$, то

$$\operatorname{mes}\varphi^{-1}(P)=\int_P(h^\alpha)'\,dh\geqslant\int_0^{\operatorname{mes}P}(h^\alpha)'\,dh>\int_0^{(1-\rho)\varphi(b)}(h^\alpha)'\,dh=$$
$$=[(1-\rho)\varphi(b)]^\alpha=(1-\rho)^\alpha b$$

и

$$\frac{\operatorname{mes}\varphi^{-1}(P)}{\varphi^{-1}(\varphi(b))}>\frac{(1-\rho)^\alpha b}{b}=(1-\rho)^\alpha>\rho$$

(при достаточно малом ρ). Свойство S_d' доказано.

Рассмотрим основную теорему о φ-дифференцируемости.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $y=f(x)$ *измерима по Лебегу на* $(0,1)$ *и имеет* φ-*производную*

$$f_\varphi'(x)=\lim_{h\to 0,\,h\in Q}\frac{f(x-\varphi(h))-f(x-\varphi(h)-h)}{h}\,{}^{**}$$

для всех $x\in E$, $\operatorname{mes}E>0$, *причем* $\varphi(h)$ *обладает свойствами* S_d' *и* S_d''. *Тогда* $f(x)$ *имеет обычную производную почти всюду на* E *и* $f'(x)=f_\varphi'(x)$***.

Доказательство. Так как $\varphi(h)$ измерима, то, не уменьшая общности, можно считать $\varphi(h)$ непрерывной на Q по этому множеству. По лемме 3, существует совершенное множество $P\subset E$, где $\operatorname{mes}P$ близка к $\operatorname{mes}E$, на котором:

а) $\dfrac{f(x-\varphi(h))-f(x-\varphi(h))-h)}{h}$ стремится к $f_\varphi'(x)$ равномерно по x при $h\to 0$, $h\in Q$, если $x-\varphi(h)$, $x-\varphi(h)-h$ остаются на множестве B полной меры, определенном в лемме 1.

---

* Через φ^{-1} мы обозначаем обратную функцию для φ.

** Q, как и раньше, — совершенное множество, имеющее нуль своей точкой правосторонней плотности.

*** Теорема верна также тогда, когда $\varphi(h)$ удовлетворяет одному из условий α или β. В случае β $f(x)$ непрерывна почти всюду на E по теореме 1, а по лемме 10 $f(x)$ имеет производную слева почти всюду на E, т. е. является φ-дифференцируемой при $\varphi(h)\equiv 0$, а $\varphi(h)\equiv 0$ обладает свойствами S_d' и S_d'', так как в этом случае $\psi(h)\equiv h$. В случае α надо воспользоваться леммой 5.

Кроме того, мы можем предположить, что

б) $f'_\varphi(x)$ непрерывна на множестве P по этому множеству. Это возможно по теореме Н. Н. Лузина, так как согласно лемме 8 $f'_\varphi(x)$ — измеримая функция. Наконец, по лемме 9, можно считать, что

в) на всем множестве P $f'_\varphi(x) = f'_{ac}(x)$.

Пусть a — точка плотности множества P. Покажем сначала, что $f(x)$ дифференцируема по множеству B в точке a. Предположим противное. Тогда существует такая последовательность $x_i \to a$, $x_i \in B$, что

$$\left| \frac{f(x_i) - f(a)}{x_i - a} - f'_{ac}(a) \right| > \varepsilon > 0,$$

где ε не зависит от i. Не уменьшая общности, мы можем считать, что

$$f'_{ac}(a) = f'_\varphi(a) = 0$$

(это достигается заменой $f(x)$ на $f(x) - f'_{ac}(a)\cdot(x-a)$). Можно предполагать, кроме того, что $x_i > a$ для всех i. Если существует аналогичная последовательность $x_i < a$, то надо вместо $f(x)$ рассмотреть функцию $f(-x)$: эта функция имеет φ_1-производную при $\varphi_1 \equiv -\varphi(h) - h = -\psi(h)$ $(\psi_1 \equiv \varphi_1 + h \equiv -\varphi(h))$, причем ясно, что $\varphi_1(h)$ обладает свойствами S'_d и S''_d одновременно с $\varphi(h)$. Для $f(-x)$ выполнены все условия теоремы 2, и последовательность $x_i < a$ перейдет в последовательность $-x_i > -a$, т. е. мы получаем то же неравенство. Для определенности предположим, что

$$\frac{f(x_i) - f(a)}{x_i - a} > \varepsilon \tag{46}$$

$\left(\text{случай } \frac{f(x_i) - f(a)}{x_i - a} < -\varepsilon \text{ рассматривается аналогично}\right)$.

Обозначим через R множество всех точек x, для которых

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| < \frac{\varepsilon}{16}.$$

Так как $f'_{ac}(a) = 0$, то R имеет в точке a плотность 1.

Рассмотрим положительное число δ_0, удовлетворяющее следующим требованиям:

1) для любого $0 < \delta \leqslant \delta_0$ средняя плотность множества RB в $(a, a+\delta)$ больше $1 - \frac{\rho}{32}$ (ρ взято из определения свойства S''_d; $\rho < 1$);

2) для любого $0 < \delta \leqslant \delta_0 + M$, где

$$M = \max\left(\sup_{0<h\leqslant\frac{\delta_0}{4}} |\varphi(h)|, \quad \sup_{0<h\leqslant\frac{\delta_0}{4}} |\psi(h)| \right),$$

средняя плотность множества P в $(a, a \pm \delta)$ больше $1 - \frac{\rho^2}{16}$;

3) множество Q имеет в любом интервале $(0, \delta)$, $0 < \delta \leqslant \delta_0$, среднюю плотность, большую, чем $1 - \frac{\rho}{32}$;

4) $\left|\frac{\Delta_1^{\varphi}(x, h)}{h}\right| < \frac{\varepsilon}{16}$ при всех $0 < h \leqslant \delta_0$, $h \in Q$, $x \in P$, $|x-a| < \delta_0 + M$, $x-\varphi(h) \in B$, $x-\varphi(h)-h \in B$.

Последнему условию можно удовлетворить в силу равенства $f'_{\varphi}(a)=0$ и условий а) и б) для множества P. Кроме того, мы можем выбрать δ_0 таким образом, что

5) некоторая точка x_j из последовательности $\{x_i\}$ будет центром интервала $(a, a+\delta_0)$ $(x_j \in B)$.

Обозначим через Q_{x_j} множество, конгруэнтное Q, но сдвинутое на x_j. Средняя плотность $Q_{x_j}RB$ в $\left(x_j, x_j+\frac{\delta_0}{4}\right)$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{\operatorname{mes} Q_{x_j}RB\cdot\left(x_j, x_j+\frac{\delta_0}{4}\right)}{\frac{\delta_0}{4}} > \frac{\delta_0\left(1-\frac{\rho}{16}\right)-\frac{3}{4}\delta_0}{\frac{\delta_0}{4}} = 1-\frac{\rho}{4}. \qquad (47)$$

То же имеем в интервале $\left(x_j-\frac{\delta_0}{4}, x_j\right)$ для $\overline{Q}_{x_j}RB$, где $\overline{Q}_{x_j}$ симметрично Q_{x_j} относительно x_j, т. е.

$$\frac{\operatorname{mes} \overline{Q}_{x_j}RB\left(x_j-\frac{\delta_0}{4}, x_j\right)}{\frac{\delta_0}{4}} > \frac{\frac{1}{2}\delta_0\left(1-\frac{\rho}{16}\right)-\frac{\delta_0}{4}}{\frac{\delta_0}{4}} > 1-\frac{\rho}{4}. \qquad (48)$$

Обратимся к свойству S''_d функции $\varphi(h)$. Положим $b=\frac{\delta_0}{4}$. Пусть h пробегает множество тех значений между 0 и $\frac{\delta_0}{4}$, для которых

$$x_j+h \in Q_{x_i}RB.$$

Обозначим это множество через H_1. Аналогично, через H_2 обозначим множество тех значений h, для которых

$$x_j-h \in \overline{Q}_{x_j}RB \text{ и } x_i-h \in \left(x_j-\frac{\delta_0}{4}, x_j\right).$$

Пусть $H_3=H_1\cdot H_2$. Тогда

$$\frac{\operatorname{mes} H_3}{\frac{\delta_0}{4}} > 1-\frac{\rho}{4}-\frac{\rho}{4} = 1-\frac{\rho}{2};$$

следовательно, можно взять замкнутое множество $H \subset H_3$, удовлетворяющее условию

$$\frac{\operatorname{mes} H}{\frac{\delta_0}{4}} > 1-\rho.$$

По свойству S''_d, имеем либо

$$\frac{\overline{\operatorname{mes}}\,\varphi(H)}{\sup\limits_{0<h\leqslant\frac{\delta_0}{4}}|\varphi(h)|} > \rho \quad \text{и} \quad \sup_{0<h\leqslant\frac{\delta_0}{4}}|\varphi(h)| > \rho b, \qquad (49)$$

либо

$$\frac{\overline{\operatorname{mes}}\,\psi(H)}{\sup\limits_{0<h\leqslant\frac{\delta_0}{4}}|\psi(h)|} > \rho \quad \text{и} \quad \sup_{0<h\leqslant\frac{\delta_0}{4}}|\psi(h)| > \rho b. \qquad (50)$$

I. Если выполнено (49), то множество K^φ точек $x_j+\varphi(h)$, где $h \in H$, имеет внешнюю меру больше $\rho \sup\limits_{0<h\leqslant\frac{\delta_0}{4}} |\varphi(h)|$ и $\sup\limits_{0<h\leqslant\frac{\delta_0}{4}} |\varphi(h)| > \rho b$.

Покажем, что у K^φ и P существуют общие точки. В самом деле,

$$K^\varphi \subset [x_j - \sup_{0<h\leqslant\frac{\delta_0}{4}} |\varphi(h)|,\ x_j + \sup_{0<h\leqslant\frac{\delta_0}{4}} |\varphi(h)|],$$

$$\overline{\operatorname{mes}} K^\varphi > \rho \sup_{0<h\leqslant\frac{\delta_0}{4}} |\varphi(h)| > \frac{\rho}{2} 2 \sup_{0<h\leqslant\frac{\delta_0}{4}} |\varphi(h)| > \frac{\rho}{2}(\sup_{0<h\leqslant\frac{\delta_0}{4}} |\varphi(h)| + \rho b). \tag{51}$$

Далее, в силу условий 2) и 5) для δ_0 и равенства $b=\frac{x_j-a}{2}$, имеем:

$$\operatorname{mes} CP[x_j - \sup_{0<h\leqslant\frac{\delta_0}{4}} |\varphi(h)|,\ x_j + \sup_{0<h\leqslant\frac{\delta_0}{4}} |\varphi(h)|] \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{mes} CP[a - \sup_{0<h\leqslant\frac{\delta_0}{4}} |\varphi(h)|,\ x_j + \sup_{0<h\leqslant\frac{\delta_0}{4}} |\varphi(h)|] <$$

$$< \frac{\rho^2}{16}(x_j - a + 2 \sup_{0<h\leqslant\frac{\delta_0}{4}} |\varphi(h)|) = \frac{\rho^2}{16}(2b + 2 \sup_{0<h\leqslant\frac{\delta_0}{4}} |\varphi(h)|) <$$

$$< \frac{\rho}{8}(\rho b + \sup_{0<h\leqslant\frac{\delta_0}{4}} |\varphi(h)|). \tag{52}$$

Сравнивая (51) и (52), получаем, что K^φ и P имеют общие точки. Пусть x — одна из них. Тогда при некотором h_0' имеем:

$$x_j - h_0' \in \bar{Q}_{x_j} RB, \quad x_j \in B, \quad x = x_j + \varphi(h_0') \in P, \quad 0 < h_0' \leqslant \frac{\delta_0}{4}. \tag{53}$$

II. Пусть выполнено (50). Обозначим через K^ψ множество точек вида $x_j+\psi(h)$, где $h \in H$. Проведя точно те же оценки с заменой φ на ψ, мы увидим, что существует h_0, удовлетворяющее неравенству $0 < h_0 \leqslant \frac{\delta_0}{4}$ и такое, что

$$x_j + h_0 \in Q_{x_j} RB, \quad x_j \in B, \quad x = x_j + \psi(h_0) = x_j + h_0 + \varphi(h_0) \in P. \tag{54}$$

Рассмотрим случай (53). Учитывая определение множества R, получаем:

$$\left|\frac{f(x_j-h_0')-f(a)}{x_j-h_0'-a}\right| < \frac{\varepsilon}{16}, \tag{55}$$

а так как

$$x-\varphi(h_0') = x_j \in B, \quad x - \varphi(h_0') - h_0' = x_j - h_0' \in B, \ x = x_j + \varphi(h_0') \in P,$$
$$0 < h_0' < \delta_0, \quad h_0' \in Q, \quad |x-a| < \delta_0 + M,$$

то, в силу условия 4) для числа δ_0, будем иметь:

$$\left|\frac{f(x-\varphi(h_0'))-f(x-\varphi(h_0')-h_0')}{h_0'}\right| < \frac{\varepsilon}{16},$$

т. е.

$$\left|\frac{\Delta_1^\varphi(x, h_0')}{h_0'}\right| = \left|\frac{f(x_j)-f(x_j-h_0')}{h_0'}\right| < \frac{\varepsilon}{16}. \tag{56}$$

Так как $x_j - h_0' - a > 0$, то из (55) следует:

$$f(x_j - h_0') < f(a) + \frac{\varepsilon}{16}(x_j - h_0' - a).$$

Из (56) имеем:

$$f(x_j) < f(x_j - h_0') + \frac{\varepsilon}{16} h_0',$$

т. е.

$$f(x_j) < f(a) + \frac{\varepsilon}{16}(x_j - h_0' - a) + \frac{\varepsilon}{16} h_0', \quad f(x_j) - f(a) < \frac{\varepsilon}{16}(x_j - a),$$

что противоречит (46).

В случае (54), рассуждая так же, как при выводе неравенств (55) и (56), получим:

$$\left| \frac{f(x_j + h_0) - f(a)}{x_j + h_0 - a} \right| < \frac{\varepsilon}{16}, \tag{57}$$

$$\left| \frac{f(x_j) - f(x_j + h_0)}{h_0} \right| < \frac{\varepsilon}{16}. \tag{58}$$

Из (57) следует:

$$f(x_j + h_0) < f(a) + \frac{\varepsilon}{16}(x_j + h_0 - a),$$

а из (58) получаем:

$$f(x_j) < f(x_j + h_0) + \frac{\varepsilon}{16} h_0,$$

т. е.

$$f(x_j) < f(a) + \frac{\varepsilon}{16}(x_j + h_0 - a) + \frac{\varepsilon}{16} h_0 = f(a) + \frac{\varepsilon}{16}(x_j + 2h_0 - a).$$

Так как

$$2h_0 \leqslant \frac{\delta_0}{2}, \quad x_j - a = \frac{\delta_0}{2},$$

то

$$(x_j + 2h_0 - a) \leqslant 2(x_j - a)$$

и, следовательно,

$$f(x_j) < f(a) + \frac{2\varepsilon}{16}(x_j - a),$$

что противоречит (46). Итак, доказана дифференцируемость $f(x)$ в точке a по множеству B, причем

$$f_B'(a) = 0 = f_\varphi'(a).$$

Докажем существование в точке a обычной производной. Предположим, что существует последовательность $x_i \to a$, $x_i \in CB$, для которой

$$\frac{f(x_i) - f(a)}{x_i - a}$$

не стремится к $f_B'(a)$ при $i \to \infty$. Тогда, согласно лемме 1, мы могли бы связать с ней последовательность $\xi_i \to a$, $\xi_i \in B$, такую, что

$$|f(x_i) - f(\xi_i)| \to 0$$

и при этом взять $f(\xi_i)$ настолько близкими к $f(x_i)$, что

$$\frac{f(\xi_i) - f(a)}{\xi_i - a}$$

также не стремится к $f'_B(a)$, что противоречит дифференцируемости $f(x)$ по множеству B. Так как a есть произвольная точка плотности множества P и мера P может быть сделана сколь угодно близкой к $\operatorname{mes} E$, то теорема доказана.

Теорема 2 дает определенные условия, при которых из асимптотической дифференцируемости следует обычная дифференцируемость почти всюду.

Действительно, *если для* $x \in E$, $\operatorname{mes} E > 0$, *функция* $f(x)$ *асимптотически дифференцируема* (*хотя бы с одной стороны*), *причем множества* Q_x, *по которым* $f(x)$ *дифференцируема, конгруэнтны для всех* $x \in E$, *то* $f(x)$ *имеет почти всюду на* E *обычную производную*. Это следует из теоремы 2 при $\varphi(h) \equiv 0$ или $\varphi(h) \equiv -h$, так как $\varphi(h) \equiv 0$ и $\varphi(h) \equiv -h$, очевидно, обладают свойствами S'_d и S''_d.

Нами был построен пример функции $f(x)$ (см. § 3), φ-дифференцируемой и не имеющей обычной производной на множестве положительной меры, и были указаны свойства полученного сдвига $\varphi(h)$.

В § 3 мы построили пример ограниченной измеримой и всюду разрывной функции, которая удовлетворяла равенству

$$f(x+h) - f(x-h) \equiv 0$$

при $x \in A$ и всех h, где A — несчетное множество меры нуль (содержащее совершенное подмножество). Ясно, что для этой функции

$$\frac{\Delta_1^{\varphi}(x, h)}{h} \equiv 0, \qquad x \in A \quad \left(\varphi(h) \equiv -\frac{h}{2}\right).$$

Мы получаем симметрически дифференцируемую на A функцию, не имеющую нигде обыкновенной производной. Этот же пример дает φ-дифференцируемую на A функцию для других видов $\varphi(h)$. Такие $\varphi(h)$ нетрудно построить, пользуясь строением множества A.

§ 5

Построим пример функции $f(x)$, которая всюду на $(0,1)$ имеет обычную производную и не имеет φ-производной в каждой точке множества положительной меры, где $\varphi(h)$ — любая, но наперед заданная непрерывная функция, удовлетворяющая условию:

$$\overline{\lim_{h \to 0}} \left| \frac{\varphi(h)}{h} \right| = \infty.$$

(Мы одновременно построим два примера, каждый из которых будет обладать некоторыми дополнительными любопытными свойствами.)

Рассмотрим последовательности $\{t_i\}$, $\{\tau_i\}$, $\{\theta_i\}$, удовлетворяющие следующим условиям:

а) $\dfrac{\varphi(\theta_i)}{\theta_i}$ монотонно возрастает при возрастании i ($\theta_i \to 0$ монотонно) и $\lim\limits_{i \to \infty} \dfrac{\varphi(\theta_i)}{\theta_i} = +\infty$ ($+\infty$ для определенности);

б) t_i и τ_i монотонно стремятся к $+\infty$ при $i \to \infty$, а $\theta_i t_i \tau_i \to 0$ монотонно, причем $t_i > 1$, $\tau_i > 1$;

в)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta_i}{\varphi(\theta_i)} < \frac{1}{64}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta_i}{\varphi(\theta_i)} t_i \tau_i < \frac{1}{64}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i t_i \tau_i < \frac{1}{64}. \tag{59}$$

Пусть r_i — наименьшее из целых чисел, превосходящих $\frac{1}{\varphi(\theta_i)}$. Тогда

$$r_i > \frac{1}{\varphi(\theta_i)} \geqslant r_i - 1. \tag{60}$$

Для каждого i разделим отрезок $[0, 1]$ на $2r_i$ равных отрезков Δ_i^k и на каждом из них поместим концентрический интервал δ_i $(k=1, 2, \ldots, 2r_i)$, удовлетворяющий условию

$$\operatorname{mes} \delta_i^k = 4\theta_i t_i \tau_i. \tag{61}$$

Из (59), (60), (61) получаем:

$$\operatorname{mes} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2r_i} \delta_i^k \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2r_i} \operatorname{mes} \delta_i^k =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} 4\theta_i \tau_i t_i 2r_i \leqslant 8 \sum_{i=1}^{\infty} \theta \tau_{i_i} t_i \left(\frac{1}{\varphi(\theta_i)} + 1 \right) \leqslant 8 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta_i \tau_i t_i}{\varphi(\theta_i)} + 8 \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i t_i \tau_i < \frac{1}{4}. \tag{62}$$

Из (62) следует, что

$$[0, 1] - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2r_i} \delta_i^k = P$$

— замкнутое нигде не плотное множество положительной меры. Для каждого i отрезок длиной $\rho_i = \varphi(\theta_i)$, помещенный в любом месте отрезка $[0, 1]$, содержит, по крайней мере, один из интервалов δ_i^k строго внутри себя, так как из (60) следует, что

$$\varphi(\theta_i) > \frac{1}{r_i} = 2 \cdot \frac{1}{2r_i},$$

т. е. ρ_i более чем в два раза длиннее Δ_i^k. Интервалы δ_i^k для разных i могут перекрываться. Пусть

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2r_i} \delta_i^k = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j,$$

где σ_j — неперекрывающиеся смежные интервалы множества P. Для каждого σ_j можно подобрать наименьшее из чисел i, для которых

$$\sigma_j \sum_{k=1}^{2r_i} \delta_i^k$$

не пусто. Это число обозначим через i_j. Тогда

$$\lim_{j \to \infty} i_j = \infty.$$

В середине каждого σ_j поместим интервал σ'_j длиной $4\,\theta_{i_j}$.

Хотя бы один из интервалов $\delta_{i_j}^k$ содержится в σ_j, поэтому, согласно (61), $\sigma'_j \subset \sigma_j$.

а) Построим первую функцию $y = f(x)$. Пусть $f(x) = 0$ при $x \overline{\in} \sum_{j=1}^{\infty} \sigma'_j$, и пусть в каждом σ'_j функция будет отличной от нуля. В центре σ'_j положим $f(x) = t_{i_j}\theta_{i_j}$. Далее, на каждой половине σ'_j дополним функцию до линейной и непрерывной, а потом около концов σ'_j и около его середины слегка подправим функцию, чтобы она имела производную на всем σ'_j, причем на концах интервала и в его середине пусть производная будет равна нулю. Оставим функцию линейной на двух отрезках σ''_j и σ'''_j слева и справа от центра. Пусть каждый из этих отрезков по длине больше θ_{i_j}. Считаем, что на σ'_j выполнены неравенства

$$0 < f(x) \leqslant t_{i_j}\theta_{i_j}.$$

Угловые коэффициенты линейных частей графика на σ_j можем считать равными

$$\pm \frac{t_{i_j}\theta_{i_j}}{\frac{1}{2}\operatorname{mes}\sigma'_j} = \pm \frac{t_{i_j}\theta_{i_j}}{\frac{1}{2}\cdot 4\theta_{i_j}} = \pm \frac{t_{i_j}}{2}.$$

Таким образом, $f(x)$ построена. Она имеет всюду производную (это очевидно для всех точек σ_j). На концах σ_j односторонние производные (левая и правая) соответственно на правом и левом концах равны нулю. Пусть $x \in P$ (теперь мы не рассматриваем упомянутые ранее односторонние производные на концах σ_j). Тогда

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| = \frac{f(x+h)}{h}.$$

Если $f(x+h) \neq 0$, то $x + h \in \sigma'_j$ (при некотором j), $0 < f(x+h) \leqslant$ $\leqslant t_{i_j}\theta_{i_j}$ и

$$|h| > \frac{\operatorname{mes}\sigma_j - \operatorname{mes}\sigma'_j}{2} \geqslant \frac{\operatorname{mes}\delta^k_{i_j} - 4\theta_{i_j}}{2} = \frac{4\theta_{i_j}t_{i_j}\tau_{i_j} - 4\theta_{i_j}}{2} = 2\theta_{i_j}(t_{i_j}\tau_{i_j} - 1),$$

откуда

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| < \frac{t_{i_j}\theta_{i_j}}{2\theta_{i_j}(t_{i_j}\tau_{i_j} - 1)} = \frac{1}{2\left(\tau_{i_j} - \frac{1}{t_{i_j}}\right)}.$$

При $h \to 0$ будем иметь $i_j \to \infty$, так как P нигде не плотно. Следовательно,

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \to 0 \quad \text{при } h \to 0.$$

Таким образом, $f'(x) = 0$, если $x \in P$. Покажем, что почти всюду на P отсутствует φ-производная. Положим

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=k}^{\infty} E_i,$$

где E_i есть множество точек x, для которых $x \in P$, $x - \varphi(\theta_i) \in CP$.

Легко доказать, что

$$\lim_{i\to\infty} \operatorname{mes} E_i = 0.$$

В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число, а (α_i, β_i) $(\beta_i > \alpha_i)$ — смежные интервалы множества P. Тогда существует такое число n, что

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} |\beta_j - \alpha_j| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

По определению множества E_i, имеем:

$$E_i = P \cdot \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j + \varphi(\theta_i),\ \beta_j + \varphi(\theta_i)).$$

Пусть $i_0 = i_0(\varepsilon)$ так велико, что при $i > i_0$ выполнены неравенства:

$$\operatorname{mes} [(\alpha_j + \varphi(\theta_i),\ \beta_j + \varphi(\theta_i)) - (\alpha_j,\ \beta_j)] < \frac{\varepsilon}{2n} \quad \text{при } j \leqslant n.$$

Это возможно в силу того, что

$$\lim_{i\to\infty} \varphi(\theta_i) = 0.$$

Тогда при $i > i_0$ имеем:

$$\operatorname{mes} E_i \leqslant \sum_{j=1}^{n} \operatorname{mes} P \cdot (\alpha_j + \varphi(\theta_i),\ \beta_j + \varphi(\theta_i)) +$$

$$+ \sum_{j=n+1}^{\infty} \operatorname{mes} (\alpha_j + \varphi(\theta_i),\ \beta_j + \varphi(\theta_i)) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2n} + \sum_{j=n+1}^{\infty} |\beta_j - \alpha_j| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Этим доказано, что $\operatorname{mes} E_i \to 0$ при $i \to \infty$. Ясно, что $\operatorname{mes} E = 0$.

Пусть $x_0 \in P - E$ и является левосторонней предельной точкой P. Множество таких x_0 имеет меру, равную $\operatorname{mes} P$. Для x_0 существует такая последовательность θ_{m_k}, что

$$x_0 - \varphi(\theta_{m_k}) \in P$$

(так как $x_0 \bar{\in} E$), причем мы можем предположить, что

$$m_1 < m_2 < m_3 < \ldots.$$

Отрезок $[x_0 - \varphi(\theta_{m_k}),\ x_0]$ длиной $\varphi(\theta_{m_k})$ содержит внутри себя интервал $\delta^l_{m_k}$, удовлетворяющий условиям

$$\delta^l_{m_k} \subset \sigma_j, \quad i_j \leqslant m_k, \quad \operatorname{mes} \delta^l_{m_k} \leqslant \operatorname{mes} \delta^{l'}_{i_j},$$

где

$$1 \leqslant l' \leqslant 2r_{i_j}, \quad 1 \leqslant l \leqslant 2r_{m_k}.$$

Точки $x_0 - \varphi(\theta_{m_k})$ и $x_0 - \varphi(\theta_{m_k}) - \theta_{m_k}$ лежат левее интервала σ_j и, следовательно, левее интервала σ''_j. При этом длина σ''_j больше θ_{i_j} и, следовательно, больше θ_{m_k}, так как $i_j \leqslant m_k$. Пусть h пробегает все значения от θ_{m_k} до 0. Так как $\varphi(h)$ — непрерывная функция h и расстояние между $x_0 - \varphi(h) - h$ и $x_0 - \varphi(h)$ убывает с уменьшением h, то найдет-

ся положительное значение $h = h_1 < \theta_{m_k} \leqslant \theta_{i_j}$, для которого обе точки $x_0 - \varphi(h_1) - h_1$ и $x_0 - \varphi(h_1)$ попадут на σ_j'', где $f(x)$ линейна.

Мы будем иметь:

$$\frac{f(x_0 - \varphi(h_1)) - f(x_0 - \varphi(h_1) - h_1)}{h_1} = +\frac{1}{2} t_{i_j}.$$

Аналогично, найдется такое положительное $h_2 < \theta_{m_k}$, что

$$\frac{f(x_0 - \varphi(h_2)) - f(x_0 - \varphi(h_2) - h_2)}{h_2} = -\frac{1}{2} t_{i_j}.$$

Итак, для θ_{m_k} найдены $h_1 < \theta_{m_k}$, $h_2 < \theta_{m_k}$ с указанными свойствами. При $\theta_{m_k} \to 0\ (k \to \infty)$ $i_j \to \infty$ и $t_{i_j} \to \infty$, т. е.

$$\overline{\lim_{h \to 0}} \frac{\Delta_1^{\varphi}(x_0, h)}{h} = +\infty, \quad \underline{\lim_{h \to 0}} \frac{\Delta_1^{\varphi}(x_0, h)}{h} = -\infty.$$

Итак, дифференцируемость функции всюду не гарантирует даже конечности φ-производных чисел на положительной мере.

б) Построим вторую функцию $y = f(x)$. Все остается так, как в случае а), но на σ_j' функция определяется так, что ее график представляет катеты равнобедренного прямоугольного треугольника, гипотенузой которого служит σ_j', подправленные в середине и на концах σ_j' таким образом, чтобы всюду существовала производная. $f(x)$ имеет всюду обычную производную и

$$\overline{\lim_{h \to 0}} \frac{\Delta_1^{\varphi}(x, h)}{h} = 1, \quad \underline{\lim_{h \to 0}} \frac{\Delta_1^{\varphi}(x, h)}{h} = -1$$

на множестве положительной меры. Таким образом, наличие конечных φ-производных чисел на множестве положительной меры не гарантирует существования φ-производной ни на каком подмножестве положительной меры. Таким образом, для φ-производных неверна теорема, аналогичная теореме Н. Н. Лузина — А. Данжуа для обычных производных чисел.

Поступило
23. V. 1957

ЛИТЕРАТУРА

[1] Толстов Г. П., Замечание к теореме Д. Ф. Егорова, Доклады Ак. наук СССР, 22, № 6 (1939), 309—311.

[2] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, М.—Л., ГИТТЛ, 1950.

[3] Хинчин А. Я., Исследования о строении измеримых функций, Матем. сборн., 31 (1924), 265—285.

[4] Лебег А., Интегрирование и отыскание примитивных функций, М.—Л., ГТТИ, 1934.

[5] Сакс С., Теория интеграла, ИЛ, 1949.

[6] Синдаловский Г. Х., О некоторых вопросах непрерывности измеримых функций, Ученые записки МГУ, т. 8, вып. 181 (1956), 175—182.

[7] Синдаловский Г. Х., Некоторые вопросы непрерывности и дифференцируемости, Успехи матем. наук, т. XIII, вып. 2 (80) (1958), 236—237.

[8] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 433 — 438

А. Г. ПОСТНИКОВ

УСИЛЕННЫЙ ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ВЫБОРКИ ИЗ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Работа посвящена обоснованию статистического метода вычисления интегралов произвольной кратности. Для этого служит теорема, развивающая (в частном случае) результат Гливенко об эмпирической функции распределения.

Предварительно напомним введенное Н. М. Коробовым ([1]) понятие вполне равномерно распределенной последовательности *. Пусть имеется последовательность вещественных чисел, взятых с отрезка $[0, 1)$,

$$\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \tag{1}$$

(α обозначает всю последовательность (1)). Зададим любое натуральное $s \geqslant 1$ и рассмотрим последовательность точек s-мерного единичного куба:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{s+1})\ldots(\alpha_x, \alpha_{x+1}, \ldots, \alpha_{x+s-1})\ldots. \tag{2}$$

Последовательность (1) называется вполне равномерно распределенной, если при любом $s \geqslant 1$ последовательность точек (2) равномерно распределена в единичном кубе s-мерного пространства. По определению ($s = 1$), всякая вполне равномерно распределенная последовательность равномерно распределена на отрезке $[0, 1)$. Однако эти понятия не совпадают: существуют последовательности, равномерно распределенные, но не вполне равномерно распределенные, например последовательность дробных долей $\{n\theta\}$, где θ — иррациональное, равномерно распределена, но последовательность точек $(\{n\theta\}, \{(n+1)\theta\})$ не будет равномерно распределенной в единичном квадрате. Н. М. Коробов построил разными способами вполне равномерно распределенные последовательности [см. ([1]), ([2])].

Пусть случайная величина ξ имеет функцию распределения $F(x)$, определенную следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 & \text{при } 1 \leqslant x \end{cases}$$

(равномерно распределенная на отрезке $[0, 1)$ случайная величина).

* Данное здесь определение отличается от определения Н. М. Коробова, однако эквивалентно этому определению, как показывает критерий Вейля для многомерного равномерного распределения.

Пусть произведено неограниченное количество независимых испытаний над этой случайной величиной, в результате которых получена последовательность чисел

$$\alpha = \alpha_1, \ \alpha_2, \ \alpha_3, \ \ldots . \tag{3}$$

По теореме Гливенко [см. ([3]), стр. 328] имеет место следующий усиленный закон больших чисел: с вероятностью, равной единице, последовательность (3) является равномерно распределенной на отрезке $[0, 1)$. Мы установим усиление этого усиленного закона больших чисел.

ТЕОРЕМА. *С вероятностью, равной единице, выборка* (3) *из равномерно распределенной на отрезке* $[0, 1)$ *случайной величины образует вполне равномерно распределенную последовательность.*

Доказательство. Обозначим через δ какой-либо интервал с отрезка $[0, 1)$, через $|\delta|$ — его длину, а через $\Delta_s = (\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_s)$ обозначим фиксированный параллелепипед в единичном кубе s-мерного пространства, определенный тем, что его первая координата принадлежит δ_1, вторая — δ_2 и т. д. Через $|\Delta_s| = |\delta_1| \ldots |\delta_s|$ обозначим объем Δ_s.

Пусть $l \geqslant 1$ — натуральное число. Рассмотрим единичный куб в ls-мерном пространстве. Пусть какая-либо точка этого куба имеет координаты

$$(\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_s, \ \alpha_{s+1}, \ \ldots, \ \alpha_{2s}, \ \ldots, \ \alpha_{(l-1)s+1}, \ \ldots, \ \alpha_{ls}).$$

Сгруппируем координаты по s штук:

$$(Q_1, \ Q_2, \ \ldots, \ Q_l),$$

где

$$Q_k = (\alpha_{(k-1)s+1}, \ \ldots, \ \alpha_{ks})$$

— точка единичного куба s-мерного пространства. Обозначим через $A_{\Delta_s}^{(l)}$ количество этих точек, попавших в Δ_s. Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{ls}$ являются первыми ls членами последовательности α, то обозначим эту величину через $A_{\Delta_s}^{(l)}(\alpha)$.

ЛЕММА 1. *Пусть* $r \geqslant 1$ — *целое. Мера Лебега точек единичного куба* ls-*мерного пространства, для которых* $|A_{\Delta_s}^{(l)} - l|\Delta_s|| \geqslant \frac{l}{r}$, *не превосходит* $\frac{r^4}{4l^2}$.

Доказательство. Сосчитаем меру Лебега множества точек ls-мерного единичного куба, у которых в представлении $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_l)$ на определенных местах (пусть таких мест будет k) происходит попадание в Δ_s, а на остальных — не происходит. Обозначим единичный куб через E. Очевидно эта мера равна:

$$\underbrace{\int_{\Delta_s} \cdots \int_{\Delta_s}}_{k \text{ раз}} \ \underbrace{\int_{E \setminus \Delta_s} \cdots \int_{E \setminus \Delta_s}}_{l-k \text{ раз}} dx_1 \ldots dx_{ls} = |\Delta_s|^k (1 - |\Delta_s|)^{l-k}$$

(каждый интеграл s-кратный). Поскольку эти k мест мы можем C_l^k способами расположить в l-членной скобке, то искомая в лемме мера равна

$$L = \sum_{\substack{k=0 \\ |k - l|\Delta_s|| \geqslant \frac{l}{r}}}^{l} C_l^k |\Delta_s|^k (1 - |\Delta_s|)^{l-k}.$$

Напомним оценку этого выражения. Очевидно

$$L \leqslant \frac{r^4}{l^4} \sum_{k=0}^{l} (k - l\,|\Delta_s|)^4 C_l^k |\Delta_s|^k (1 - |\Delta_s|)^{l-k}.$$

Выражение, стоящее в правой части, вычисляется точно. Мы получаем:

$$L \leqslant \frac{r^4}{l^4} l\,|\Delta_s|\,(1 - |\Delta_s|)(1 + 3(l-2)\,|\Delta_s|(1 - |\Delta_s|)) \leqslant \frac{r^4}{4l^4}.$$

Во множество последовательностей вещественных чисел, взятых с отрезка $[0, 1)$, введем преобразование T: если $\beta = \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ — такая последовательность, то

$$T\beta = \beta_2, \beta_3, \beta_4, \ldots .$$

Если $\mathfrak{M}$ — некоторое множество последовательностей, то $T\mathfrak{M}$ обозначает образ этого множества при преобразовании T; $T^{-1}\mathfrak{M}$ обозначает полный прообраз этого множества. Так, $T^{-1}\beta$ есть множество всех последовательностей $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$, где β_0 — любое число, $0 \leqslant \beta_0 < 1$.

Для того чтобы говорить о вероятности того события, когда бесконечная выборка принадлежит некоторому множеству последовательностей, нужно определить меру множеств последовательностей. Пусть $k \geqslant 1$ — любое натуральное. Рассмотрим сначала множества последовательностей, удовлетворяющие следующему требованию: вместе с одной последовательностью

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k, \beta_{k+1}, \ldots$$

множеству принадлежит любая последовательность с теми же самыми k начальными членами $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$. Мерой такого множества естественно считать лебегову меру точек $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ k-мерного пространства. Заметим, что для множеств с таким требованием справедливо равенство

$$\operatorname{mes} T^{-1}\mathfrak{M} = \operatorname{mes} \mathfrak{M}.$$

Мероопределение для множеств, удовлетворяющих указанному требованию, может быть распространено на классы множеств, являющихся пределами монотонных последовательностей таких множеств. При этом равенство

$$\operatorname{mes} T^{-1}\mathfrak{M} = \operatorname{mes} \mathfrak{M}$$

сохраняется.

ЛЕММА 2. *С вероятностью, равной единице,*

$$\lim_{l \to \infty} \frac{A_{\Delta_s}^{(l)}(\alpha)}{l} = |\Delta_s|.$$

Доказательство. Зададим натуральное $r \geqslant 1$. Обозначим через E множество тех последовательностей α, для которых

$$\overline{\lim_{l\to\infty}} \left| \frac{A_{\Delta_s}^{(l)}(\alpha)}{l} - |\Delta_s| \right| \geqslant \frac{1}{2r}.$$

Обозначим через E_l множество тех последовательностей α, для которых

$$\left| \frac{A_{\Delta_s}^{(l)}(\alpha)}{l} - |\Delta_s| \right| \geqslant \frac{1}{r}.$$

Очевидно

$$E \subseteq \bigcap_{l_0=1}^{\infty} \bigcup_{l=l_0} E_l,$$

$$\text{mes}\, E \leqslant \lim_{l_0\to\infty} \sum_{l=l_0}^{\infty} \text{mes}\, E_l.$$

Если мы докажем, что ряд $\sum \text{mes}\, E_l$ сходится, то тем самым будет доказано, что $\text{mes}\, E = 0$. Но поскольку $\frac{1}{r}$ может быть сколь угодно малым, то отсюда будет следовать лемма. Мера E_l равна мере множества тех точек ls-мерного пространства, для которых справедливо неравенство

$$|A_{\Delta_s}^{(l)} - l|\Delta_s|| \geqslant \frac{l}{r},$$

и которая по лемме 1 оценивается числом $\frac{r^4}{4l^2}$. Поскольку ряд $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2}$ сходится, то лемма доказана.

Обозначим через $N_X(\alpha, \Delta_s)$ количество попаданий точек, образованных из последовательности (3)

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{s+1}) \ldots (\alpha_X, \alpha_{X+1}, \ldots, \alpha_{X-s-1}),$$

в Δ_s.

ЛЕММА 3. *С вероятностью, равной единице, выполняется равенство*

$$\lim_{X\to\infty} \frac{N_X(\alpha, \Delta_s)}{X} = |\Delta_s|.$$

Доказательство. Наряду с последовательностью α [см. (3)] рассмотрим последовательности $T\alpha, T^2\alpha, \ldots, T^{s-1}\alpha$ и сгруппируем в них члены по s штук:

$$\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_s{}' \alpha_{s+1} \ldots \alpha_{2s}{}' \ldots {}' \alpha_{ks+1} \ldots \alpha_{(k+1)s}{}' \ldots,$$
$$T\alpha = \alpha_2 \ldots \alpha_{s+1}{}' \alpha_{s+2} \ldots \alpha_{2s+1}{}' \ldots {}'\alpha_{ks+2} \ldots \alpha_{(k+1)s+1}{}' \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$T^{s-1}\alpha = \alpha_s \ldots \alpha_{2s-1}{}' \alpha_{2s} \ldots \alpha_{3s-1}{}' \ldots {}' \alpha_{(k+1)s} \ldots \alpha_{(k+2)s-1}{}' \ldots.$$

Мы видим, что

$$N_X(\alpha, \Delta_s) = A_{\Delta_s}^{\left[\frac{X}{s}\right]}(\alpha) + A_{\Delta_s}^{\left[\frac{X}{s}\right]}(T\alpha) + \ldots + A_{\Delta_s}^{\left[\frac{X}{s}\right]}(T^{s-1}\alpha) + O(s).$$

Далее, по лемме 2, при $j = 0, 1, \ldots, s-1$

$$\underset{T^j\alpha}{\operatorname{mes} E}\left(\lim_{X\to\infty} \frac{A_{\Delta_s}^{\left[\frac{X}{s}\right]}(T^j\alpha)}{\frac{X}{s}} = |\Delta_s|\right) = 1.$$

Но, по замечанию об инвариантности меры,

$$\underset{T^j\alpha}{\operatorname{mes} E}\left(\lim_{X\to\infty} \frac{A_{\Delta_s}^{\left[\frac{X}{s}\right]}(T^j\alpha)}{\frac{X}{s}} = |\Delta_s|\right) = \underset{\alpha}{\operatorname{mes} E}\left(\lim_{X\to\infty} \frac{A_{\Delta_s}^{\left[\frac{X}{s}\right]}(T^j\alpha)}{\frac{X}{s}} = |\Delta_s|\right).$$

Поэтому с вероятностью, равной 1, выполняется соотношение:

$$\lim_{X\to\infty} \frac{N_X(\alpha, \Delta_s)}{X} = s\frac{|\Delta_s|}{s} = |\Delta_s|.$$

Рассмотрим рациональные параллелепипеды $\Delta_s = (\delta_1 \ldots \delta_s)$, в которых интервалы $\delta_1, \ldots, \delta_s$ имеют рациональные концы. Таких параллелепипедов для $s = 1$, $s = 2$ счетное множество, следовательно, их вообще счетное множество. Поэтому с вероятностью 1

$$\lim_{X\to\infty} \frac{N_X(\alpha, \Delta_s)}{X} = |\Delta_s|$$

для любого рационального параллелепипеда. Но, в силу аппроксимации, если последовательность такова, что для любого рационального параллелепипеда Δ_s

$$\lim_{X\to\infty} \frac{N_X(\alpha, \Delta_s)}{X} = |\Delta_s|,$$

то тогда и для всякого параллелепипеда

$$\lim_{X\to\infty} \frac{N_X(\alpha, \Delta)}{X} = |\Delta|.$$

Теорема доказана.

Известно, что если $Q_1, Q_2, \ldots, Q_P, \ldots$ — последовательность точек, равномерно распределенных в единичном кубе s-мерного пространства, и $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ — интегрируемая по Риману в этом кубе функция, то

$$\lim_{P\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{P} f(Q_j)}{P} = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s.$$

Поэтому доказанное в настоящей работе свойство выборки может служить обоснованием статистического способа вычисления интегралов произвольной кратности.

Это исследование, по-видимому, без особого труда может быть распространено на выборку из случайной величины с произвольной функцией распределения.

Поступило
15. V. 1957

ЛИТЕРАТУРА

[1] Коробов Н. М., О некоторых вопросах равномерного распределения, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 14 (1950), 215—238.

[2] Коробов Н. М., О вполне равномерном распределении и совместно нормальных числах, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 20 (1956), 649—660.

[3] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, М., 1954.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 439—448

Л. М. ГЛУСКИН

О МАТРИЧНЫХ ПОЛУГРУППАХ

(*Представлено академиком* **П. С. Александровым**)

В работе дана характеристика полугруппы $G_n^n(F)$ всех квадратных матриц над телом F при помощи ее подполугруппы $G_n^1(F)$, состоящей из всех матриц ранга $\leqslant 1$. Показано, что полугруппа $G_n^1(F)$ является вполне простой. Полученные результаты использованы для доказательства теоремы об изоморфизмах матричных полугрупп $G_n^r(F)$.

Полугруппой называется множество со всюду определенной на нем однозначной бинарной ассоциативной операцией.

Непустое подмножество A полугруппы S называется ее левым идеалом, если $SA \subseteq A$. Аналогично определяется правый идеал. Множество, одновременно являющееся и левым и правым идеалом полугруппы S, называется двусторонним идеалом (обычно его называют просто идеалом).

Если полугруппа S содержит идеал, состоящий из одного элемента 0, то 0 называется нулем полугруппы S.

Ненулевой (левый, правый, двусторонний) идеал A полугруппы S называется *минимальным*, если он не содержит отличных от нуля и A (соответственно левых, правых, двусторонних) идеалов полугруппы S.

Идеал A полугруппы S называется *плотно вложенным* в S [см. ([1]), ([2])], если он удовлетворяет следующим условиям:

а) всякий нетривиальный * гомоморфизм полугруппы S индуцирует нетривиальный гомоморфизм полугруппы A;

б) если какая-нибудь полугруппа T содержит S в качестве собственной подполугруппы и A является идеалом T, то для T существует нетривиальный гомоморфизм, индуцирующий изоморфизм полугруппы A.

Всюду в настоящей работе через F обозначено тело, т. е. кольцо, в котором мультипликативная полугруппа M_F является группой с внешне присоединенным нулем **: через $G_n^r(F)$ обозначена полугруппа всех квадратных матриц порядка n с элементами из F ранга $\leqslant r$.

ЛЕММА 1. *Пусть D — подполугруппа полугруппы $G_n^n(F)$, содержащая $G_n^1(F)$. Пусть, далее, некоторая полугруппа S содержит D и $G_n^1(F)$ является идеалом в S. Тогда существует гомоморфизм полугруппы S в $G_n^n(F)$, индуцирующий тождественный автоморфизм полугруппы D.*

---

* Не являющийся изоморфизмом.

** Иначе говоря, $M_F = A \cup 0$, где A — группа, 0 — нуль полугруппы M_F.

Доказательство. Пусть a — любой элемент из S. Обозначим через e_{ik} матрицу из $G_n^n(F)$, в которой элемент, стоящий на пересечении i-й строки и k-го столбца, равен 1, а все остальные элементы равны нулю. Так как $G_n^1(F)$ — идеал S, то $a_{ik} = e_{ii}ae_{kk} \in G_n^1(F)$ при $i, k = 1, 2, \ldots, n$. Легко видеть, что $e_{ii}a_{ik}e_{kk} = a_{ik}$, поэтому $a_{ik} = \alpha_{ik}e_{ik}$, где $\alpha_{ik} \in F$. Таким образом, любому элементу a полугруппы S соответствует единственная матрица

$$\varphi a = \|\alpha_{ik}\| \in G_n^n(F).$$

Очевидно, что $\varphi\|\alpha_{ik}\| = \|\alpha_{ik}\|$ для любой матрицы $\|\alpha_{ik}\| \in D$.

Пусть теперь a, b — любые элементы из S,

$$\varphi a = \|\alpha_{ik}\|, \quad \varphi b = \|\beta_{ik}\|, \quad \varphi(ab) = \|\lambda_{ik}\|, \quad e_{rr}a = \|\gamma_{ik}\|.$$

Из $e_{rr}(e_{rr}a) = e_{rr}a$ следует, что $\gamma_{ik} = 0$ при $i \neq r$. В то же время

$$\gamma_{rs}e_{rs} = e_{rr}\|\gamma_{ik}\|e_{ss} = e_{rr}e_{rr}ae_{ss} = \alpha_{rs}e_{rs}$$

и

$$e_{rr}a = e_{rr}\|\alpha_{ik}\|.$$

Точно так же

$$be_{ss} = \|\beta_{ik}\|e_{ss}.$$

Отсюда и из $e_{rr}\|\alpha_{ik}\|$, $\|\beta_{ik}\|e_{ss} \in G_n^1(F)$ имеем при $r, s = 1, 2, \ldots, n$:

$$\lambda_{rs}e_{rs} = e_{rr}(ab)e_{ss} = (e_{rr}a)(be_{ss}) = (e_{rr}\|\alpha_{ik}\|)(\|\beta_{ik}\|e_{ss}) = \left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{rj}\beta_{js}\right)e_{rs}.$$

Следовательно,

$$\lambda_{rs} = \sum_{j=1}^{n}\alpha_{rj}\beta_{js},$$

т. е. $\varphi(ab) = \varphi a \cdot \varphi b$, и отображение φ является, таким образом, гомоморфизмом.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $G_n^n(F)$ — полугруппа всех матриц порядка n с элементами из тела F. Полугруппа S тогда и только тогда изоморфна полугруппе $G_n^n(F)$, когда она содержит плотно вложенный идеал, изоморфный $G_n^1(F)$.*

Доказательство. Покажем сначала, что $G_n^1(F)$ является плотно вложенным идеалом для $G_n^n(F)$. Очевидно, что все $G_n^r(F)$ $(r=1, 2, \ldots n)$ — идеалы полугруппы $G_n^n(F)$. Пусть φ — произвольный нетривиальный гомоморфизм полугруппы $G_n^n(F)$. Тогда найдется пара матриц $\|\alpha_{ik}\|$, $\|\beta_{ik}\| \in G_n^n(F)$ такая, что

$$\|\alpha_{ik}\| \neq \|\beta_{ik}\|, \quad \varphi\|\alpha_{ik}\| = \varphi\|\beta_{ik}\|,$$

и, значит, можно выбрать, по крайнем мере, одну пару индексов r, s, для которой $\alpha_{rs} \neq \beta_{rs}$. Отсюда следует, что

$$\alpha_{rs}e_{rs}, \ \beta_{rs}e_{rs} \in G_n^1(F), \quad \alpha_{rs}e_{rs} \neq \beta_{rs}e_{rs}$$

и

$$\varphi e_{rr}\cdot\varphi\|\alpha_{ik}\|\cdot\varphi e_{ss}=\varphi e_{rs}\cdot\varphi\|\beta_{ik}\|\cdot\varphi e_{ss},\ \varphi(\alpha_{rs}e_{rs})=\varphi(\beta_{rs}e_{rs}),$$

т. е. φ индуцирует нетривиальный гомоморфизм полугруппы $G_n^1(F)$.

Пусть T — произвольная полугруппа, содержащая $G_n^n(F)$ в качестве собственной подполугруппы, и $G_n^1(F)$ — идеал T. Из леммы 1 вытекает существование гомоморфизма T в полугруппу $G_n^n(F)$, при котором $\varphi\|\alpha_{ik}\|=\|\alpha_{ik}\|$ для любой матрицы $\|\alpha_{ik}\|\in G_n^n(F)$. Если a — какой-либо элемент из T, не содержащийся в $G_n^n(F)$, и $\varphi a=\|\alpha_{ik}\|$, то $\varphi a=\varphi\|\alpha_{ik}\|$ и φ — нетривиальный гомоморфизм T, индуцирующий изоморфизм на $G_n^n(F)$, в частности и на $G_n^1(F)$.

Таким образом, $G_n^1(F)$ является плотно вложенным идеалом полугруппы $G_n^n(F)$. Если ψ — изоморфизм $G_n^n(F)$ на некоторую полугруппу S, то, пользуясь определением, нетрудно проверить, что $\psi G_n^1(F)$ является плотно вложенным идеалом полугруппы S.

Обратно, пусть A — плотно вложенный идеал некоторой полугруппы S и ψ — изоморфизм A на $G_n^1(F)$. Тогда изоморфизм ψ можно продолжить до изоморфизма $\overline{\psi}$ всей полугруппы S на некоторую полугруппу $\overline{\psi}S=\overline{S}$, содержащую $G_n^1(F)=\overline{\psi}A=\psi A$ в качестве плотно вложенного идеала. Из леммы 1 следует, что существует гомоморфизм φ полугруппы $\overline{S}$ в $G_n^n(F)$, индуцирующий тождественный автоморфизм на $G_n^1(F)$. Из условия а) тогда вытекает, что φ является изоморфизмом.

Следовательно, $\overline{S}$ изоморфна некоторой подполугруппе $\varphi\overline{S}=S'$ полугруппы $G_n^n(F)$. Допустим, что S' — собственная подполугруппа $G_n^n(F)$. Так как $\varphi A=A$ является плотно вложенным идеалом полугруппы $\varphi\overline{S}=S'$ и в то же время идеалом полугруппы $G_n^n(F)$, содержащей S', то, по условию б), должен существовать нетривиальный гомоморфизм полугруппы $G_n^n(F)$, индуцирующий изоморфизм на $G_n^1(F)$. Но это невозможно: мы доказали, что $G_n^1(F)$ плотно вложен в $G_n^n(F)$, а по условию а) всякий нетривиальный гомоморфизм полугруппы $G_n^n(F)$ должен индуцировать нетривиальный гомоморфизм $G_n^1(F)$. Таким образом, $S'=G_n^n(F)$ и отображение $\overline{\psi}\varphi$ является изоморфизмом полугруппы S на $G_n^n(F)$. Теорема доказана.

Замечание. Пусть K — произвольное кольцо с единицей 1, P — подмножество кольца K, содержащее 0 и 1 и замкнутое относительно сложения и умножения в K. Теорема 1, как легко заметить из ее доказательства, справедлива для полугруппы $G_n^n(P)$ всех матриц порядка n с элементами из P. В частности, она верна для полугруппы всех матриц порядка n с элементами из произвольного кольца с единицей и для полугруппы всех матриц с неотрицательными элементами [см. (3)].

Теорема 1 дает описание полугруппы $G_n^n(F)$ при помощи ее подполугруппы $G_n^1(F)$, более естественное, чем в работе (4). Последнюю полугруппу мы сведем ниже (теорема 2) к хорошо изученному классу *вполне простых* полугрупп [см. (5)].

Полугруппа называется вполне простой, если она содержит минимальный левый идеал и минимальный правый идеал. Всякую вполне простую полугруппу можно описать следующим образом. Пусть G — группа с внешне присоединенным нулем o: I, Λ — два множества индексов. Каждой паре индексов $i\in I$, $\lambda\in\Lambda$ поставим в соответствие элемент

$p_{\lambda i} \in G$ так, что для любого $i \in I$ (аналогично для любого $\lambda \in \Lambda$) найдется индекс $\lambda \in \Lambda$ ($i \in I$), при котором $p_{\lambda i} \neq o$. Обозначим через

$$S = S(G, I, \Lambda, p_{\lambda i})$$

множество всех троек $(a, i\lambda)$, где $a \in G$, $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$. Все тройки $(o, i\lambda)$ отождествляются между собой (обозначим их всех символом 0). S является вполне простой полугруппой относительно действия

$$(a, i\lambda)(b, j\mu) = (ap_{\lambda j}b, i\mu). \tag{1}$$

0 служит нулем S. S не содержит отличных от 0 и S идеалов. Обратно, всякая вполне простая полугруппа изоморфна некоторой полугруппе $S = S(G, I, \Lambda, p_{\lambda i})$ только что описанного типа.

Пусть r_i, l_λ — любые ненулевые элементы из G, ψ — изоморфизм G на G', а $i \to i'$, $\lambda \to \lambda'$ — взаимно однозначные отображения I и Λ на некоторые множества I' и Λ'. Каждое из отображений полугруппы $S(G, I, \Lambda, p_{\lambda i})$ на полугруппы $S(G, I, \Lambda, q_{\lambda i})$ и $S(G', I', \Lambda', q_{\lambda' i'})$:

$$\theta(a, i\lambda) = (r_i^{-1} a l_\lambda^{-1}, i\lambda), \qquad q_{\lambda i} = l_\lambda p_{\lambda i} r_i, \tag{2}$$

$$\varphi(a, i\lambda) = (\psi a, i'\lambda'), \qquad q_{\lambda' i'} = \psi p_{\lambda i} \tag{3}$$

является изоморфизмом. Всякий изоморфизм полугруппы S является произведением изоморфизмов типа (2) и (3).

Следующая ниже теорема обобщает конструкцию А. К. Сушкевича ([6]).

Пусть $R_n(F)$ — n-мерное линейное пространство над телом F, $R_n'(F)$ — сопряженное с ним пространство [см. например, ([7])]. Каждому одномерному подпространству $R_i \subset R_n(F)$ взаимно однозначно сопоставим некоторый индекс i и, аналогично, каждому одномерному подпространству $R_\lambda' \subset R_n'(F)$ — индекс λ. Из каждого подпространства $R_i \subset R_n(F)$ выберем произвольно один вектор $\mathbf{x}_i$, а из $R_\lambda \subset R_n'(F)$ — вектор $\mathbf{y}_\lambda$. Обозначим через I_F^n (Λ_F^n) множество всех таких индексов i (соответственно λ), через $[\mathbf{y}, \mathbf{x}]$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{y}$, $\mathbf{x}$.

ТЕОРЕМА 2. *Полугруппа $G_n^1(F)$ изоморфна вполне простой полугруппе $S_F^n = S(M_F, I_F^n, \Lambda_F^n, [\mathbf{y}_\lambda, \mathbf{x}_i])$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ — произвольный базис в $R_n(F)$, $\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_2', \ldots, \mathbf{e}_n'$ — биортогональный с ним базис в $R_n'(F)$, $A = \|a_{jk}\|$ — любая ненулевая матрица из полугруппы $G_n^1(F)$. По условию, $\operatorname{rang} A = 1$. Среди векторов

$$A\mathbf{e}_k = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{e}_j a_{jk} \quad (k = 1, 2, \ldots n)$$

по крайней мере один отличен от нуля и все $A\mathbf{e}_k$ коллинеарны. Поэтому координаты этих векторов, т. е. элементы a_{jk} матрицы A можно представить в виде $a_{jk} = \xi_j \eta_k$, где ξ_j, $\eta_k \in F$ и по крайней мере одно из произведений $\xi_j \eta_k$ отлично от нуля. По построению множеств I_F^n, Λ_F^n, найдется (и притом единственная) пара индексов $i \in I_F^n$, $\lambda \in \Lambda_F^n$ такая, что

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{e}_j \xi_j = \mathbf{x}_i c, \quad \sum_{j=1}^{n} \eta_j \mathbf{e}_j' = c' \mathbf{y}_\lambda,$$

где $c, c' \in F$, произведение $a = cc'$ отлично от нуля и определяется для данной матрицы однозначно. Таким образом, для каждой ненулевой матрицы $A = \| a_{jk} \| \in G_n^1(F)$ существует единственная тройка $(a, i\lambda) \in S_F^n$. Нулевой матрице сопоставим элемент $0 \in S_F^n$.

Обратно, для любой пары ненулевых векторов

$$\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{e}_j \xi_j \in R_n(F), \quad \mathbf{y}_\lambda = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \mathbf{e}_j' \in R_n'(F)$$

и элемента $a \in F$ найдется единственная матрица $A = \| a_{jk} \| \in G_n^1(F)$ такая, что $a_{jk} = \xi_j a \eta_k$. Нулю из S_F^n соответствует нулевая матрица из $G_n^1(F)$. Если теперь

$$A = \| \xi_j a \eta_k \|, \quad B = \| \xi_j' b \eta_k' \|,$$

т. е. матрицам $A, B \in G_n^1(F)$ соответствуют тройки $(a, i\lambda)$, $(b, m\mu) \in S_F^n$, то

$$AB = \left\| \xi_j a \left(\sum_{r=1}^{n} \eta_r \xi_r' \right) b \eta_k' \right\| = \| \xi_j a [\mathbf{y}_\lambda \mathbf{x}_m] b \eta_k' \|,$$

и матрице AB соответствует в S_F^n тройка

$$(a [\mathbf{y}_\lambda, \mathbf{x}_m] b, i\mu) = (a, i\lambda)(b, m\mu)$$

[см. (1)]. Теорема доказана.

Замечание. При отображении (2) в полугруппе $S(M_F, I_F^n, \Lambda_F^n, [\mathbf{y}_\lambda, \mathbf{x}_i])$ каждый элемент $p_{\lambda i} = [\mathbf{y}_\lambda, \mathbf{x}_i]$ переходит в

$$q_{\lambda i} = l_\lambda p_{\lambda i} r_i = l_\lambda [\mathbf{y}_\lambda, \mathbf{x}_i] r_i = [l_\lambda \mathbf{y}_\lambda, \mathbf{x}_i r_i].$$

Иначе говоря, каждый вектор $\mathbf{y}_\lambda \in R_\lambda'$ заменяется вектором $l_\lambda \mathbf{y}_\lambda$, а вектор $\mathbf{x}_i \in R_\lambda$ — вектором $\mathbf{x}_i r_i$. При этом тройка $(a, i\lambda)$ перейдет в тройку $\theta(a, i\lambda) = (r_i^{-1} a l_\lambda^{-1}, i\lambda)$. Но обе эти тройки соответствуют одной и той же матрице $\| \xi_j a \eta_k \| \in G_n^1(F)$. Таким образом, отображение (2) сводится к тождественному автоморфизму полугруппы $G_n^1(F)$.

Пусть F и H — два тела. Их нуль и единицу обозначим одинаково через 0 и 1; пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \ldots, \mathbf{e}_n'$, как и раньше, обозначают биортонормированные базисы пространств $R_n(F)$ и $R_n'(F)$, а $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n$ и $\mathbf{h}_1', \mathbf{h}_2', \ldots, \mathbf{h}_n'$ — биортонормированные базисы пространств $R_n(H)$ и $R_n'(H)$. Тогда всякая пара векторов $\mathbf{x} \in R_n(F)$ и $\mathbf{y} \in R_n'(F)$ может быть записана в виде:

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{e}_j \xi_j, \quad \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \mathbf{e}_k'.$$

Если ψ — однозначное отображение F в H, то обозначим

$$\mathbf{x}_\psi = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{h}_j \psi(\xi_j), \quad \mathbf{y}_\psi = \sum_{k=1}^{n} \psi(\eta_k) \mathbf{h}_k'.$$

Каждой матрице $C = \|c_{jk}\| \in G_n^n(F)$ обычным образом поставим в соответствие линейные преобразования C пространств $R_n(F)$ и $R'_n(F)$ так, что

$$C\mathbf{e}_j = \sum_{r=1}^{n} \mathbf{e}_r c_{rj}, \quad \mathbf{e}'_j C = \sum_{r=1}^{n} c_{jr} \mathbf{e}'_r.$$

ЛЕММА 2. *Пусть* ψ — *изоморфизм* M_F *на* M_H, $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^\varphi$ *и* $\mathbf{y} \to \mathbf{y}^\varphi$ — *взаимно однозначные отображения пространств* $R_n(F)$ *и* $R'_n(F)$ *в* $R_n(H)$ *и* $R'_n(H)$ *такие, что для любых* $\mathbf{x} \in R_n(F)$, $\mathbf{y} \in R'_n(F)$

$$[\mathbf{y}^\varphi, \mathbf{x}^\varphi] = \psi[\mathbf{y}, \mathbf{x}]. \tag{4}$$

Тогда:

1) ψ *является изоморфизмом тела* F *на* H,

2) *существует такая обратимая матрица* $A \in G_n^n(H)$, *что* $\mathbf{x}^\varphi = A^{-1}\mathbf{x}_\psi$, $\mathbf{y}^\varphi = \mathbf{y}_\psi A$.

Доказательство. Очевидно, что $\psi 0 = 0$, $\psi 1 = 1$. Пусть

$$\mathbf{e}_j^\varphi = \sum_{r=1}^{n} \mathbf{h}_r a_{rj}, \quad (\mathbf{e}'_j)^\varphi = \sum_{r=1}^{n} b_{rj} \mathbf{h}'_r. \tag{5}$$

Из (4) имеем при $j, k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\sum_{r=1}^{n} b_{jr} a_{rk} = [(\mathbf{e}'_j)^\varphi, \mathbf{e}_k^\varphi] = \psi[\mathbf{e}'_j, \mathbf{e}_k] = \begin{cases} \psi 1 = 1, & \text{если } j = k, \\ \psi 0 = 0, & \text{если } j \neq k. \end{cases}$$

Таким образом, если $A = \|a_{jk}\|$, то $\|b_{jk}\| = A^{-1}$, и для любых

$$\mathbf{x}' = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{h}_j \xi'_j \in R_n(H), \quad \mathbf{y}' = \sum_{j=1}^{n} \eta'_j \mathbf{h}'_j \in R'_n(H)$$

получим:

$$[\mathbf{y}' A^{-1}, A\mathbf{x}'] = \Big[\sum_{j=1}^{n} \eta'_j (\mathbf{h}'_j A^{-1}), \ \sum_{k=1}^{n} (A\mathbf{h}_k) \xi'_k\Big] =$$

$$= \Big[\sum_{j=1}^{n} \eta'_j \sum_{r=1}^{n} b_{jr} \mathbf{h}'_r, \ \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \mathbf{h}_r a_{rk} \xi'_k\Big] = \sum_{j,k,r=1}^{n} \eta'_j b_{jr} a_{rk} \xi'_k = \sum_{j=1}^{n} \eta'_j \xi'_j = [\mathbf{y}', \mathbf{x}'].$$

Отсюда и из (4) при любых $\mathbf{x} \in R_n(F)$, $\mathbf{y} \in R'_n(F)$ следует:

$$[\mathbf{y}^\varphi A^{-1}, A\mathbf{x}^\varphi] = \psi[\mathbf{y}, \mathbf{x}]. \tag{6}$$

Из (5) и (6) имеем ($j = 1, 2, \ldots, n$):

$$[\mathbf{y}^\varphi A^{-1}, \mathbf{h}_j] = [\mathbf{y}^\varphi A^{-1}, A\mathbf{e}_j^\varphi] = \psi[\mathbf{y}, \mathbf{e}_j] = \psi(\eta_j),$$

т. е. $\mathbf{y}^\varphi A^{-1} = \mathbf{y}_\psi$ и, аналогично, $A\mathbf{x}^\varphi = \mathbf{x}_\psi$. Таким образом,

$$\mathbf{y}^\varphi = \mathbf{y}_\psi A, \quad \mathbf{x}^\varphi = A^{-1}\mathbf{x}_\psi.$$

Воспользовавшись снова равенством (6), получим:

$$\psi \sum_{j=1}^{n} \eta_j \xi_j = \psi [\mathbf{y}, \mathbf{x}] = [\mathbf{y}^{\varphi} A^{-1}, A\,\mathbf{x}^{\varphi}] = [\mathbf{y}_{\psi}, \mathbf{x}_{\psi}] = \sum_{j=1}^{n} \psi\eta_j \cdot \psi\xi_j.$$

Положив $\eta_1 = \eta_2 = 1$, $\eta_j = 0$ при $j > 2$, имеем отсюда при любых $\xi_1, \xi_2 \in F$:

$$\psi(\xi_1 + \xi_2) = \psi(\xi_1) + \psi(\xi_2),$$

и ψ — изоморфизм не только M_F на M_H, но и тела F на H. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *В $G_n^1(F)$ существует n различных ненулевых идемпотентов, попарные произведения которых равны 0, и не существует системы из большего количества аннулирующих друг друга ненулевых идемпотентов.*

Доказательство. Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_k$ — ненулевые идемпотенты из $G_n^1(F)$, $f_s f_j = 0$ при $s \neq j$ $(s, j = 1, 2, \ldots k)$ и $f_j = (a_j, i_j\lambda_j)$. Тогда $\mathbf{x}_{i_j}$ и $\mathbf{y}_{\lambda_j}$ образуют биортогональную систему векторов из $R_n(F)$ и $R_n'(F)$. Следовательно, $k \leqslant n$. В то же время $e_{jj}e_{ss} = 0$ при $j, s = 1, 2, \ldots n$ и $j \neq s$. Лемма доказана. Впрочем, ее утверждение следует и из работы ([8]) [см. лемму 2.3] *.

Назовем множество ненулевых идемпотентов $f_1, f_2, \ldots, f_k \in G_n^r(F)$ *цепью*, если каждый идемпотент f_i $(i = 2, 3, \ldots. k)$ лежит над $f_{i=1}$ [см. ([5])], т. е.

$$f_i \neq f_{i-1}, \quad f_i f_{i-1} = f_{i-1} f_i = f_{i-1}.$$

Число k назовем *длиной* цепи.

ЛЕММА 4. *Максимальная длина цепей в $G_n^r(F)$ равна r.*

Доказательство. Воспользуемся леммой 2.1 работы ([8]): если $A \in G_n^r(F)$ — идемпотентная матрица ранга $s \leqslant r$, то существует такая обратимая матрица C из $G_n^n(F)$, что

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} E_s & \\ & O_{n-s} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Здесь через E_s обозначена единичная матрица порядка s, через O_s — нулевая матрица порядка s.

Если f_{i-1}, f_i — два идемпотента из цепи, $\operatorname{rang} f_i = s$, C — обратимая матрица из $G_n^n(F)$ и

$$C^{-1} f_i C = \begin{pmatrix} E_s & \\ & O_{n-s} \end{pmatrix},$$

то из $f_i f_{i-1} = f_{i-1} f_i = f_{i-1}^2 = f_{i-1}$ следует, что

$$C^{-1} f_{i-1} C = \begin{pmatrix} A_s & \\ & O_{n-s} \end{pmatrix},$$

где A_s — идемпотентная матрица порядка s. Если бы $\operatorname{rang} A_s = s$, то мы имели бы $A_s = E_s$, $f_{i-1} = f_i$. Следовательно, $\operatorname{rang} A_s = \operatorname{rang} f_{i-1} < s$.

---

* Результаты указанной работы справедливы для ряда матричных полугрупп с элементами из произвольного эвклидова кольца K, коммутативного или некоммутативного [см. ([10]), § 108], в частности и для $G_n^n(F)$.

Таким образом, в цепи $f_1, f_2, \ldots, f_n$ нет двух матриц одного ранга, и если все элементы цепи содержатся в $G_n^r(F)$, то максимальная длина цепи не может быть больше r. В то же время матрицы вида (7), где $s = 1, 2, \ldots, r$, образуют цепь длиной r. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3 [см. ([9])]. *Для того чтобы полугруппы $G_n^r(F)$ и $G_m^s(H)$ при $n>2$ были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы $m = n$, $r = s$ и тело F было изоморфно телу H. Всякий изоморфизм φ полугруппы $G_n^r(F)$ на полугруппу $G_n^r(H)$ имеет вид*

$$\varphi \| x_{jk} \| = A^{-1} \| \psi x_{jk} \| A, \tag{8}$$

где ψ — изоморфизм F на H, A — обратимая матрица из $G_n^n(H)$.

Доказательство. Достаточность условий теоремы очевидна: если ψ — изоморфизм тела F на тело H, A — обратимая матрица из $G_n^n(H)$, то отображение (8) — изоморфизм $G_n^r(F)$ на $G_n^r(H)$. Докажем необходимость этих условий. Пусть φ — изоморфизм полугруппы $G_n^r(F)$ на полугруппу $G_m^s(H)$. Из леммы 4 следует, что $r = s$. Полугруппа $G_n^1(F)$ является единственным ненулевым минимальным идеалом полугруппы $G_n^r(F)$, поэтому

$$\varphi G_n^1(F) = G_m^1(H).$$

Из леммы 3 следует, что $m = n$.

Пусть для любой матрицы $\| \xi_j a \eta_k \| \in G_n^1(F)$

$$\varphi \| \xi_j a \eta_k \| = \| \xi'_j a' \eta'_k \|. \tag{9}$$

Установим, как и при доказательстве теоремы 2, изоморфизм θ и θ' полугрупп $G_n^1(F)$ и $G_n^1(H)$ на вполне простые полугруппы $S_F^n = S(M_F, I_F^n, \Lambda_F^n, [\mathbf{y}_\lambda, \mathbf{x}_i])$ и $S_H^n = S(M_H, I_H^n, \Lambda_H^n, [\mathbf{y}'_{\lambda'}, \mathbf{x}'_{i'}])$:

$$\theta \| \xi_j a \eta_k \| = (a, i\lambda), \quad \theta' \| \xi'_j a' \eta'_k \| = (a', i'\lambda'),$$

где

$$\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{e}_j \xi_j, \qquad \mathbf{x}'_{i'} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{h}_j \xi'_j.$$

$$\mathbf{y}_\lambda = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \mathbf{e}'_j, \quad \mathbf{y}'_{\lambda'} = \sum_{j=1}^{n} \eta'_j \mathbf{h}'_j.$$

Отображение $\varphi_1 = \theta' \varphi \theta^{-1}$ является изоморфизмом вполне простой полугруппы S_F^n на S_H^n. В силу замечания, сделанного после теоремы 2, можно считать, что φ_1 имеет вид (3), так как отображение (2) приводит к тождественному автоморфизму полугруппы $G_n^1(F)$. Таким образом, для любого элемента $(a, i\lambda) \in S_F^n$

$$(a', i'\lambda') = \varphi_1(a, i\lambda) = (\psi a; \varphi i, \varphi\lambda), \tag{10}$$

где ψ — изоморфизм M_F на M_H, а $i \to \varphi i = i'$, $\lambda \to \varphi\lambda = \lambda'$ — взаимно однозначные отображения I_F^n на I_H^n и Λ_F^n на Λ_H^n. При этом для любых векторов $\mathbf{x}_i^\varphi = \mathbf{x}'_{\varphi i}$ и $\mathbf{y}_\lambda^\varphi = \mathbf{y}'_{\varphi\lambda}$ имеет место равенство: $[\mathbf{y}_\lambda^\varphi, \mathbf{x}_i^\varphi] = \psi[\mathbf{y}_\lambda, \mathbf{x}_i]$.

Отображения $\mathbf{x}_i \to \mathbf{x}_i^\varphi$, $\mathbf{y}_\lambda \to \mathbf{y}_\lambda^\varphi$ можно продолжить до взаимно однозначных отображений пространств $R_n(F)$ и $R'_n(F)$ в $R_n(H)$ и $R'_n(H)$.

Именно, при любых $a, b \in F$ будем считать

$$(\mathbf{x}_i \cdot a)^\varphi = \mathbf{x}_i^\varphi \cdot \psi a, \quad (b \cdot \mathbf{y}_\lambda)^\varphi = \psi b \cdot \mathbf{y}_\lambda^\varphi.$$

Тогда

$$[(b\, \mathbf{y}_\lambda)^\varphi, (\mathbf{x}_i a)^\varphi] = [\psi b \cdot \mathbf{y}_\lambda^\varphi, \mathbf{x}_i^\varphi \cdot \psi a] = \psi b \cdot [\mathbf{y}_\lambda^\varphi, \mathbf{x}_i^\varphi] \cdot \psi a =$$

$$= \psi b \cdot \psi [\mathbf{y}_\lambda, \mathbf{x}_i] \cdot \psi a = \psi (b\, [\mathbf{y}_\lambda, \mathbf{x}_i]\, a) = \psi\, [b\, \mathbf{y}_\lambda, \mathbf{x}_i\, a]$$

и свойство (4) сохраняется для продолженных отображений φ. Из леммы 2 следует, что ψ — изоморфизм F на H и

$$\mathbf{x}_i^\varphi = A^{-1} (\mathbf{x}_i)_\psi, \quad \mathbf{y}_\lambda^\varphi = (\mathbf{y}_\lambda)_\psi A, \tag{11}$$

где $A \in G_n^n(H)$. Обозначая по-прежнему

$$A = \| a_{jk} \|, \quad A^{-1} = \| b_{jk} \|,$$

получим из (11):

$$\xi_j' = \sum_{r=1}^{n} b_{jr} \cdot \psi(\xi_r), \quad \eta_k' = \sum_{s=1}^{n} \psi(\eta_s)\, a_{sk},$$

а отсюда и из (9), (10) для любой матрицы $\| \xi_j a \eta_k \| \in G_n^1(F)$ будет следовать:

$$\varphi \| \xi_j a \eta_k \| = \| \xi_j' \cdot \psi a \cdot \eta_k' \| =$$

$$= \left\| \sum_{r,s=1}^{n} b_{jr} \cdot \psi(\xi_r) \cdot \psi a \cdot \psi(\eta_s) \cdot a_{sk} \right\| = A^{-1} \| \psi(\xi_j a \eta_k) \| A,$$

т. е. для любой матрицы из $G_n^1(F)$ доказана справедливость соотношения (8).

Если теперь $X = \| x_{jk} \|$ — любая матрица из $G_n^r(F)$, то отображение $\varphi_2 X = A \cdot \varphi X \cdot A^{-1}$ есть также изоморфизм $G_n^r(F)$ на $G_n^r(H)$ и при этом $\varphi_2 \| a_{jk} \| = \| \psi a_{jk} \|$ для любой матрицы из $G_n^r(F)$.

Пусть

$$\varphi_2 \| x_{jk} \| = \| x_{jk}' \|.$$

Тогда при $s, t = 1, 2, \ldots, n$ имеем:

$$x_{st}' e_{st} = e_{ss} \| x_{jk}' \| e_{tt} = \varphi(e_{ss} \| x_{jk} \| e_{tt}) = \varphi(x_{st} e_{st}) = \psi x_{st} \cdot e_{st},$$

т. е.

$$x_{st}' = \psi x_{st}, \quad A \cdot \varphi \| x_{jk} \| \cdot A^{-1} = \| \psi x_{jk} \|, \quad \varphi \| x_{jk} \| = A^{-1} \cdot \| \psi x_{jk} \| \cdot A,$$

что и требовалось доказать.

Из доказанной теоремы следует [см. ([8]), ([9])]

ТЕОРЕМА 4. *Всякий автоморфизм полугруппы $G_n^r(F)$ имеет вид* (8), *где φ — автоморфизм F, $A \in G_n^n(F)$.*

Теоремы 2 и 4, так же, как и теорема 1, остаются справедливыми для полугруппы $G_n^n(P)$ всех матриц порядка n с неотрицательными элементами из произвольно расположенного поля [см. ([3])].

Поступило
12. III. 1957

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ляпин Е. С., Ассоциативные системы всех частичных преобразований, Доклады Ак. наук СССР, 88, № 1 (1953), 13—16.

[2] Ляпин Е. С., Абстрактная характеристика некоторых полугрупп преобразований, Уч. зап. Ленингр. пединститута им. Герцена, 103 (1955), 5—29.

[3] Глускин Л. М., Полугруппы матриц с неотрицательными элементами, Уч. зап. Харьковск. ун-та, 25 (1957), 167—173.

[4] Глускин Л. М., Ассоциативная система квадратных матриц, Доклады Ак. наук СССР, 97, № 1 (1954), 17—20.

[5] Rees D., On semi-groups, Proc. Cambridge Phil. Soc., 36, № 4 (1940), 387—400.

[6] Сушкевич А. К., Про групи матриць рангу 1, Журн. Инст. мат. Ак. наук УССР, 3 (1937), 83—94.

[7] Бэр Р., Линейная алгебра и проективная геометрия, ИЛ, М.—Л., 1955.

[8] Глускин Л. М., Автоморфизмы мультипликативных полугрупп матричных алгебр, Успехи матем. наук, 11, вып. 1 (67), (1956), 199—206.

[9] Халезов Е. А., Автоморфизмы матричных полугрупп, Доклады Ак. наук СССР, 96, № 2 (1954), 245—248.

[10] Ван-дер-Варден Б. Л., Современная алгебра, ч. 2, ОГИЗ, М.—Л., 1947.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 449—474

Р. В. ГАМКРЕЛИДЗЕ

ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

(*Представлено академиком* **А. А. Дородницыным**)

В работе изучены оптимальные процессы в линейных системах. Доказано существование оптимальных процессов в таких системах и найдены уравнения для оптимальных управлений и оптимальных траекторий. Рассмотрена также задача синтеза таких систем с одним управляющим параметром.

Введение

В теории автоматического регулирования большое значение придается максимальному повышению быстродействия различного рода регуляторов и следящих систем, другими словами, наиболее быстрому или, как принято говорить, оптимальному осуществлению процесса регулирования и слежения. Ряд других технических задач также приводит к задачам, в которых экстремируется время.

Довольно обширный круг технических проблем этого рода укладывается в следующую математическую задачу, изученную в работе ([1]).

Изображающая точка (вектор) $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^n)$ n-мерного фазового пространства X движется согласно уравнениям

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, \ldots, x^n; u^1, \ldots, u^r) = f^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Здесь $(u^1, \ldots, u^r) = \mathbf{u}$ — управляющие параметры. Если задан закон управления, т. е. заданы r функций $u^1(t), \ldots, u^r(t)$ из некоторого класса функций, то система (1) при заданных начальных условиях $x^i(t_0) = x_i^0$ однозначно определит движение точки x в фазовом пространстве. Класс функций, в котором выбираются управляющие функции $u^1(t), \ldots, u^r(t)$, зависит от конкретной технической задачи. Совершенно естественным условием является требование, чтобы вектор $\mathbf{u}(t) = (u^1(t), \ldots, u^r(t))$ r-мерного пространства принадлежал некоторой фиксированной замкнутой области этого пространства, например r-мерному единичному кубу $|u^i(t)| \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, r$. Физический смысл этого условия ясен: некоторые из управляющих параметров, или даже все, не могут принимать сколь угодно больших значений; например, управляющим параметром может являться количество подаваемого в двигатель топлива и т. д. Но в общей математической постановке задачи область изменения вектора $\mathbf{u}(t)$ не обязана быть всегда ограниченной. В частности, она может совпадать со всем r-мерным пространством.

Далее, управляющие функции $u^1(t), \ldots, u^r(t)$ могут выбираться в классе кусочно-непрерывных функций с конечным числом точек разрыва. Это соответствует «безынерционному» управлению — управляющие параметры в данном случае могут мгновенно перескакивать с одного значения на другое. Однако в ряде технических задач приходится учитывать «инерцию» некоторых управляющих параметров и поэтому некоторые из функций $u^i(t)$ в этом случае нужно считать непрерывными и кусочно-гладкими с ограниченной производной.

Класс векторных функций $\mathbf{u}(t)$, в котором выбираются управления для данной задачи, назовем классом допустимых управлений. Этот класс будет точно определен ниже для изучаемой нами задачи.

После того, как класс допустимых управлений определен, основная задача, которая здесь ставится, формулируется следующим образом.

В фазовом пространстве X заданы две точки ξ_0, ξ_1; требуется выбрать допустимое управление $\mathbf{u}(t) = (u^1(t), \ldots, u^r(t))$ так, чтобы фазовая точка прошла по траектории системы (1) *из положения ξ_0 в положение ξ_1 за минимальное время.*

Искомое управление $\mathbf{u}(t)$, если оно существует, назовем оптимальным управлением, соответствующую траекторию — оптимальной траекторией.

Задача, которой интересуются в теории автоматического регулирования, носит несколько более конкретный характер и может быть сформулирована следующим образом.

Из любой наперед заданной точки фазового пространства X нужно попасть в начало координат за минимальное время, двигаясь по траектории системы (1) *при помощи допустимого управления.*

Вообще говоря, из любой точки фазового пространства X невозможно попасть в начало координат допустимым управлением. Обозначим через M множество тех точек пространства X, из которых можно попасть в начало координат оптимальным управлением. Тогда существует определенная на множестве M векторная функция

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u^1(\mathbf{x}), \ldots, u^r(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in M, \tag{2}$$

значения которой лежат в области допустимых значений управления $\mathbf{u}$ и которая удовлетворяет условию: если двигаться по траекториям системы

$$\dot{x}^i = f^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x}(0) = \xi \in M,$$

то фазовая точка $\mathbf{x}$ из любого данного начального положения $\xi \in M$ попадает в начало координат в минимальное время.

Нахождение функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ носит название синтеза оптимальной системы. При помощи этой функции строится оптимальное вычислительное устройство для заданного регулирующего устройства. Назначение вычислительного устройства в системе автоматического регулирования можно описать схематически следующим образом [см. ([2])].

Пусть задана часть системы автоматического регулирования, состоящая из регулируемого объекта и регулирующего органа. Эта часть имеет r входов и n выходов. Входные величины — это управляющие функции $u^1(t), \ldots, u^r(t)$, выходные величины — регулируемые фазовые

координаты $x^1(t), \ldots, x^n(t)$; связь между величинами u^i и x^j задается системой (1). Нужный режим состоит в том, чтобы все фазовые координаты x^i в течение всего процесса работы объекта равнялись нулю.

Выходные величины $(x^1, \ldots, x^n) = \mathbf{x}$ подаются на вход вычислительного устройства, выход которого соединен со входом регулирующего органа. Получается замкнутая система автоматического регулирования. Если в результате внешних воздействий фазовая точка смещается из начала координат в положение $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^n)$, то на вход регулирующего органа через вычислительное устройство подаются величины $(u^1(\mathbf{x}), \ldots, u^r(\mathbf{x})) = \mathbf{u}(\mathbf{x})$, определенные формулой (2) и возвращающие фазовую точку в начало координат в минимальное время.

В настоящей работе изучен случай линейного регулирующего органа, т. е. изучена система

$$\dot{x}^i = \sum_{\alpha=1}^{n} a^i_\alpha x^\alpha + b^i_1 u^1 + \ldots + b^i_r u^r = a^i_\alpha x^\alpha + b^i_1 u^1 + \ldots + b^i_r u^r,^* \quad i = 1, \ldots, n,$$

которую мы будем записывать в векторном виде:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}_1 u^1 + \ldots + \mathbf{b}_r u^r. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{x}$ — вектор n-мерного фазового пространства X, A — фиксированное линейное преобразование этого пространства, $\mathbf{b}_j$ — постоянные векторы этого пространства. Классом допустимых управлений является класс кусочно-непрерывных функций, по модулю не превосходящих 1: $|u^j| \leqslant 1$. Без последнего ограничения на управляющие функции задача для уравнения (3), вообще говоря, не имеет решения: из любой точки ξ_0 фазового пространства X можно попасть в любую другую точку ξ_1 за сколь угодно малое время, однако при стремлении времени перехода к нулю соответствующие управления становятся по модулю сколь угодно большими.

Теорема существования, которая доказана в § 3, заключается в следующем.

Если из точки ξ_0 можно попасть в точку ξ_1 некоторым допустимым управлением, то из ξ_0 можно попасть в ξ_1 и оптимальным управлением.

Это управление оказывается релейным, т. е. управляющие функции $u^j(t)$ принимают значения ± 1 и имеют конечное число скачков.

В § 1 получены уравнения для оптимальных управлений и траекторий.

В § 2, на основе результатов § 1 и § 3 (теоремы существования), изучена задача о синтезе оптимальной системы (3) при $r = 1$.

Теорема существования, доказанная в § 3, имеет не только математический интерес. Будет доказано, что оптимальное управление u^j, $j = 1, \ldots, r$, для уравнения (3) можно всегда искать в классе релейных управлений. Поэтому не исключен случай, когда существует последовательность релейных управлений u^j_k, $k = 1, 2, \ldots$, переводящих фазовую точку по траекториям уравнения (3) из положения ξ_0 в положение ξ_1

* В дальнейшем мы постоянно будем придерживаться тензорных обозначений.

соответственно за промежутки времени t_k, где $t_1 > t_2 > \ldots > t_k > \ldots > T$, $t_k \to T$, и не существует допустимого управления u^j, $j = 1, \ldots, r$, переводящего фазовую точку из положения ξ_0 в ξ_1 за время T. В этом случае из «минимизирующей» последовательности управлений u^j_k нельзя выделить подпоследовательности, сходящейся к некоторому допустимому управлению u^j, так как это управление переводило бы фазовую точку из положения ξ_0 в положение ξ_1 за время T. Следовательно, число точек скачков управления u^j_k неограниченно возрастает вместе с номером k и релейное управление u^j_k на некоторых участках времени перехода из ξ_0 в ξ_1 или даже в течение всего времени перехода, начинает «дрожать» с высокой частотой.

Таким образом, оптимального перехода из положения ξ_0 в положение ξ_1 достичь нельзя, но траектория будет тем ближе к оптимальной, чем чаще будет «дрожь» управления u^j_k на соответствующих участках времени перехода. В теории автоматического регулирования такие режимы работы хорошо известны и называются скользящими режимами.

Поэтому теорема существования оптимальных процессов для системы (3) эквивалентна следующему утверждению:

В линейных системах оптимальный режим ни на каком участке времени не может быть скользящим.

Можно рассмотреть более общую задачу и считать, что некоторая часть управляющих функций $u^i(t)$ выбирается в классе непрерывных кусочно-гладких функций с ограниченной по модулю производной, т. е. считать, что соответствующие u^i обладают «инерцией», а другая, «безынерционная» часть управлений подчинена прежним условиям. В некоторых случаях одна из этих частей может вовсе отсутствовать. Результаты, относящиеся к этому общему случаю, будут опубликованы отдельно.

Методы настоящей работы являются естественным развитием методов, опубликованных в работе ([1]). Настоящая работа выполнена в семинаре Л. С. Понтрягина по математическим проблемам теории колебаний и автоматического регулирования.

Я приношу глубокую благодарность Л. С. Понтрягину за внимание и большую помощь, которую он оказывал мне при выполнении настоящей работы.

§ 1. Уравнения для оптимальных управлений и оптимальных траекторий в случае одного управляющего параметра

1°. Постановка задачи. Обозначения. Задано линейное дифференциальное векторное уравнение с одним управляющим (скалярным) параметром u:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u. \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{x}$ — изображающая точка (вектор) в n-мерном фазовом пространстве X, $\mathbf{b}$ — фиксированный вектор этого пространства, A — линейное преобразование пространства X, не зависящее от времени. Управляющая функция u выбирается в классе кусочно-непрерывных функций (с конечным числом точек разрыва на каждом ограниченном интервале времени), по модулю не превосходящих 1: $|u| \leqslant 1$; будем называть такие управления **допустимыми управлениями**.

Формулировка общей задачи. *В фазовом пространстве заданы две точки ξ_0, ξ_1; требуется выбрать такое допустимое управление $u = u(t)$, чтобы изображающая точка $\mathbf{x}(t)$, двигаясь по траектории уравнения* (4), *перешла из положения ξ_0 в положение ξ_1 за минимальное время.*

Такое управление, если оно существует, назовем **оптимальным управлением**, соответствующую траекторию — **оптимальной траекторией**. Будем также говорить, что фазовая точка совершает оптимальный переход из положения ξ_0 в положение ξ_1 по траектории уравнения (4) за оптимальное время.

Введем ряд обозначений, необходимых для дальнейшего изложения.

Векторы из фазового пространства X назовем контравариантными; векторы из сопряженного с X пространства назовем ковариантными.

Обозначим через $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ контравариантные векторные функции, образующие фундаментальную систему решений уравнения $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$. Через $\psi^1(t), \ldots, \psi^n(t)$ обозначим ковариантные векторные функции, двойственные, соответственно, функциям $\varphi_i(t)$:

$$\varphi_i(t)\,\psi^j(t) = \delta^j_i.$$

Имеем:

$$\dot{\varphi}_i = -A\varphi_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

$$\dot{\psi}^j = -A'\psi^j, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

где A' — линейное преобразование, сопряженное с A.

Чтобы доказать формулу (6), т. е. то, что вектор-функции $\psi^i(t)$ удовлетворяют сопряженному к (5) уравнению (6), продифференцируем соотношение $\varphi_\alpha(t)\cdot\psi^i(t) = \delta^i_\alpha$. Мы получим:

$$(\varphi_\alpha(t)\cdot\psi^i(t))' = \dot{\varphi}_\alpha(t)\cdot\psi^i(t) + \varphi_\alpha(t)\cdot\dot{\psi}^i(t) =$$
$$= A\varphi_\alpha(t)\,\psi^i(t) + \varphi_\alpha(t)\,\dot{\psi}^i(t) = \varphi_\alpha(t)\cdot A'\psi^i(t) + \varphi_\alpha(t)\cdot\dot{\psi}^i(t) =$$
$$= \varphi_\alpha(t)\cdot(A'\psi^i(t) + \dot{\psi}^i(t)) \equiv 0.$$

Так как это равенство справедливо для любого $\alpha = 1, \ldots, n$, то справедливы тождества:

$$A'\psi^i(t) + \dot{\psi}^i(t) \equiv 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Обозначим скалярное произведение вектор-функции $\psi^i(t)$ с вектором $\mathbf{b}$ через

$$h^i(t) = \psi^i(t)\cdot\mathbf{b}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Решение уравнения (4) с начальным условием $\mathbf{x}(0) = \xi = \varphi_\alpha(0)\,\xi^\alpha$ запишется тогда в виде:

$$\mathbf{x}(t) = \varphi_\alpha(t)\left(\xi^\alpha + \int_0^t h^\alpha(\tau)\,u(\tau)\,d\tau\right) = \varphi_\alpha(t)\left(\xi^\alpha + \int_0^t \psi^\alpha(\tau)\cdot\mathbf{b}\,u(\tau)\,d\tau\right). \tag{7}$$

Как известно, каждая из функций $h^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, является решением уравнения n-го порядка:

$$|A' + pE|\,h(t) = 0, \tag{8}$$

где p — оператор дифференцирования, E — тождественное преобразование, $|A' + pE|$ — характеристический многочлен преобразования $-A'$.

2°. Условие невырожденности. Уравнение (4) назовем невырожденным, если вектор $\mathbf{b}$ не лежит ни в каком инвариантном подпространстве размерности $\leqslant n-1$ преобразования A. В противном случае уравнение (4) назовем вырожденным.

Мы покажем сейчас, что если уравнение (4) вырожденное, то либо время перехода из ξ_0 в ξ_1 не зависит от выбора управляющей функции $u(t)$, либо задача сводится к аналогичной задаче для уравнения меньшего порядка.

Допустим, что $\mathbf{b} \in Y$, где Y — инвариантное подпространство размерности $\leqslant n-1$ преобразования A. Представим фазовое пространство X в виде прямой суммы $X = Y + Z$ и каждый вектор $\mathbf{x} \in X$ — в виде суммы $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, где $\mathbf{y} \in Y$, $\mathbf{x} \in Z$. Уравнение (4) перепишется так:

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{y}} + \dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{y} + \mathbf{b}u + A\mathbf{z},$$

где $A\mathbf{y} \in Y$, $\mathbf{b}u \in Y$. Оператор проектирования на подпространство Y параллельно подпространству Z обозначим через Pr_1, на подпространство Z параллельно подпространству Y — через Pr_2. Имеем:

$$Pr_1\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{b}u + Pr_1A\mathbf{z}, \quad Pr_2\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{z}} = Pr_2A\mathbf{z} = B\mathbf{z},$$

где B — некоторое линейное преобразование, действующее в подпространстве Z.

Пусть требуется из точки $\xi_0 = (\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ попасть допустимым (не обязательно оптимальным) управлением в точку $\xi_1 = (\mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1)$. Соответствующую траекторию уравнения (4) обозначим через $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t))$, где

$$(\mathbf{y}(0), \mathbf{z}(0)) = (\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0), \; (\mathbf{y}(t_1), \mathbf{z}(t_1)) = (\mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1).$$

Векторная функция $\mathbf{z}(t)$ является решением уравнения $\dot{\mathbf{z}} = B\mathbf{z}$, не зависящего от выбора управляющей функции $u(t)$.

Если $B\mathbf{z}_0 = 0$, то для разрешимости задачи необходимо, чтобы выполнялось равенство $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_1$, так как независимо от выбора управления мы будем иметь тождество $\mathbf{z}(t) \equiv \mathbf{z}_0$. В этом случае задача об оптимальном переходе из точки $(\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ фазового пространства X в точку $(\mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1)$ по траектории уравнения (4) сводится к задаче об оптимальном переходе из точки $\mathbf{y}_0$ фазового пространства Y в точку $\mathbf{y}_1$ по траектории уравнения

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{b}u + Pr_1A\mathbf{z}_0 = A\mathbf{y} + \mathbf{b}u + \mathbf{a},$$

где $Pr_1A\mathbf{z}_0 = \mathbf{a}$ — некоторый постоянный вектор пространства Y. Это уравнение можно исследовать буквально так же, как и уравнение вида (4), не содержащее вектора $\mathbf{a}$. Впрочем, если преобразование A, рассматриваемое в инвариантном подпространстве Y, не вырождено в нем, то $\mathbf{a} = A\mathbf{a}_1$, и мы имеем:

$$\dot{\mathbf{y}} = (\mathbf{y} + \mathbf{a}_1)' = A(\mathbf{y} + \mathbf{a}_1) + \mathbf{b}u.$$

Если $B\mathbf{z}_0 \neq 0$ и существует траектория $\mathbf{z}(t)$ уравнения $\dot{\mathbf{z}} = B\mathbf{z}$, соединяющая точки $\mathbf{z}_0$ и $\mathbf{z}_1$, то время перехода из $\mathbf{z}_0$ в $\mathbf{z}_1$ и, следовательно, время перехода фазовой точки $\mathbf{x}$ из $(\mathbf{z}_0, \mathbf{y}_0)$ в $(\mathbf{z}_1, \mathbf{y}_1)$ не зависит от

выбора управляющей функции $u(t)$, если, конечно, этот последний переход вообще возможен, так как нужно еще попасть из $\mathbf{y}_0$ в $\mathbf{y}_1$.

В дальнейшем изложении будем считать, что уравнение (4) невырожденное. Из невырожденности уравнения (4) непосредственно следует линейная независимость векторов $\mathbf{b} = A^0\mathbf{b}, A\mathbf{b}, A^2\mathbf{b}, \ldots, A^{n-1}\mathbf{b}$. Отсюда легко вывести, что функции $h^i(t) = \psi^i(t)\cdot\mathbf{b}$, $i = 1, \ldots, n$ (см. n°, 1), линейно независимы. В самом деле, пусть

$$c_\alpha h^\alpha(t) = c_\alpha \psi^\alpha(t)\cdot\mathbf{b} \equiv 0,$$

где c_α, $\alpha = 1, \ldots, n$ — постоянные; тогда

$$c_\alpha \dot{\psi}^\alpha \mathbf{b} \equiv \ldots = c_\alpha \overset{(n-1)}{\psi^\alpha} \mathbf{b} \equiv 0.$$

Из этих равенств и формулы (6) следует:

$$c_\alpha \psi^\alpha \cdot \mathbf{b} \equiv c_\alpha \psi^\alpha \cdot A\mathbf{b} \equiv \ldots \equiv c_\alpha \psi^\alpha \cdot A^{n-1}\mathbf{b} \equiv 0.$$

Так как векторы $\mathbf{b}, A\mathbf{b}, \ldots, A^{n-1}\mathbf{b}$ независимы, то мы имеем: $c_\alpha\psi^\alpha(t) \equiv 0$, а так как векторы $\psi^\alpha(t)$, $\alpha = 1, \ldots, n$, образуют фундаментальную систему решений уравнения (6), то $c_1 = \ldots = c_n = 0$.

Из линейной независимости функций $h^1(t), \ldots, h^n(t)$ следует, что они образуют фундаментальную систему решений уравнения n-го порядка (8).

3°. Необходимое условие оптимальности. Пусть ξ_0 — некоторая фиксированная точка фазового пространства X. Обозначим через $\Omega(t)$, $t \geqslant 0$, множество точек пространства X, до которых можно дойти в точности за время t, если двигаться по траектории уравнения (4) при помощи произвольного допустимого управления с начальным условием $\mathbf{x}(0) = \xi_0$.

Множество $\Omega(t)$ выпукло при любом $t \geqslant 0$. В самом деле, пусть u_1, u_2 — два допустимых управления и пусть соответствующие им траектории $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$ уравнения (4) удовлетворяют начальным условиям

$$\mathbf{x}_1(0) = \mathbf{x}_2(0) = \xi_0;$$

тогда $\mathbf{x}_1(t) \in \Omega(t)$, $\mathbf{x}_2(t) \in \Omega(t)$ при любом $t \geqslant 0$. Произвольную точку отрезка, соединяющего точки $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$, можно представить в виде

$$\lambda\mathbf{x}_1(t) + \mu\mathbf{x}_2(t),$$

где $\lambda + \mu = 1$, $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$. В эту точку можно попасть из точки ξ_0 за время t, двигаясь по траектории уравнения (4), при помощи управления $\lambda u_1 + \mu u_2$, так как соответствующая траектория имеет вид [см. формулу (7)]:

$$\varphi_\alpha(t)\left(\xi_0^\alpha + \int_0^t h^\alpha(\lambda u_1 + \mu u_2)\,d\tau\right) = \lambda\varphi_\alpha(t)\left(\xi_0^\alpha + \int_0^t h^\alpha u_1\,d\tau\right) +$$

$$+ \mu\varphi_\alpha(t)\left(\xi_0^\alpha + \int_0^t h^\alpha u_2\,d\tau\right) = \lambda\mathbf{x}_1(t) + \mu\mathbf{x}_2(t),$$

где $\varphi_\alpha(0)\xi_0^\alpha = \xi_0$ — начальная точка траектории; управление $\lambda u_1 + \mu u_2$ допустимо, так как $|\lambda u_1 + \mu u_2| \leqslant \lambda|u_1| + \mu|u_2| \leqslant \lambda + \mu = 1$.

Пусть теперь $u(t)$ — оптимальное управление, $\mathbf{x}(t)$ — соответствующая оптимальная траектория уравнения (4), соединяющая заданную точку ξ_0 с некоторой точкой ξ_1 пространства X; кроме того, пусть

$$\mathbf{x}(0) = \xi_0, \quad \mathbf{x}(T) = \xi_1.$$

Управление $u(t)$ и траектория $x(t)$ являются оптимальными на любом отрезке $0 \leqslant t \leqslant T_1$, где $T_1 \leqslant T$. В самом деле, если в точку $\mathbf{x}(T_1)$ можно попасть из точки ξ_0 за время $T_1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, при помощи допустимого управления $v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T_1 - \varepsilon$, то в точку $\mathbf{x}(T)$ можно будет попасть за время $T - \varepsilon$ при помощи допустимого управления $w(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T - \varepsilon$, где $w(t) = v(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T_1 - \varepsilon$ и $w(t) = u(t+\varepsilon)$ при $T_1 - \varepsilon \leqslant t \leqslant T - \varepsilon$, что противоречит допущению об оптимальности траектории $\mathbf{x}(t)$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$.

Мы докажем сейчас, что через точку $\xi_1 = \mathbf{x}(T)$ можно провести опорную гиперплоскость P к выпуклому множеству $\Omega(T)$, т. е. что ξ_1 лежит на границе множества $\Omega(T)$.

Легко видеть, что при любом $t < T$ точка $\mathbf{x}(t)$ является граничной точкой множества $\Omega(t)$ и потому через нее можно провести опорную к $\Omega(t)$ гиперплоскость. Если это не так хотя бы для одной точки $\mathbf{x}(t)$, $t < T$, то окружим $\mathbf{x}(t)$ шаром, целиком лежащим в множестве $\Omega(t)$, и отметим в шаре какую-нибудь точку $\mathbf{x}(t+\varepsilon)$ траектории, где $\varepsilon > 0$ (такой шар найдется, так как точка $\mathbf{x}(t)$ является, по предположению, внутренней точкой множества $\Omega(t)$). Так как шар целиком лежит в множестве $\Omega(t)$, то из точки ξ_0 до точки $\mathbf{x}(t+\varepsilon)$ можно дойти допустимым управлением за время $t < t + \varepsilon$, что противоречит оптимальности траектории $\mathbf{x}(t)$.

Итак, можно выбрать последовательность времен $t_k \to T$ и последовательность гиперплоскостей P_k, проходящих соответственно через $\mathbf{x}(t_k)$ и опорных к $\Omega(t_k)$; кроме того, можно считать, что последовательность гиперплоскостей P_k сходится к некоторой гиперплоскости P, проходящей через точку $\xi_1 = \mathbf{x}(T)$. Гиперплоскость P и является опорной для множества $\Omega(T)$.

В самом деле, обозначим через χ_k ковариантный вектор, ортогональный к гиперплоскости P_k и направленный в противоположную от множества $\Omega(t_k)$ сторону, т. е. если $\mathbf{y} \in \Omega(t_k)$, то $(\mathbf{y} - \mathbf{x}(t_k))\chi_k \leqslant 0$. Можно считать, что $\chi_k \to \chi$, где χ ортогонален к P. Обозначим, далее, произвольное допустимое управление через $u(t) + \delta u(t)$, где $u(t)$ — рассматриваемое оптимальное управление, $\delta u(t)$ — произвольное допустимое «возмущение» управления $u(t)$; через $\mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{x}(t)$ обозначим соответствующую возмущенную траекторию с начальным условием $\delta\mathbf{x}(0) = 0$.

При любом $t < T$ точка $\mathbf{x}(t_k) + \delta\mathbf{x}(t_k) \in \Omega(t_k)$ и $\mathbf{x}(t_k) \in P_k$, следовательно, $\delta\mathbf{x}(t_k) \cdot \chi_k \leqslant 0$. Переходя к пределу при $k \to \infty$, мы для любого допустимого возмущения $\delta\mathbf{x}$ получим, что $\delta\mathbf{x}(T) \cdot \chi \leqslant 0$, т. е. что гиперплоскость P, проходящая через точку $\mathbf{x}(T)$, является опорной для $\Omega(T)$, и, следовательно, сама точка $\mathbf{x}(T)$ лежит на границе множества $\Omega(T)$.

Покажем, что опорную гиперплоскость P в точке $\mathbf{x}(T)$ и ортогональный к ней вектор χ всегда можно выбрать таким образом, чтобы кроме

неравенства $\delta\mathbf{x}(T)\cdot\chi\leqslant 0$ выполнялось еще неравенство

$$\dot{\mathbf{x}}(T)\cdot\chi=(A\mathbf{x}(T)+\mathbf{b}u(T))\cdot\chi\geqslant 0.$$

Для этого докажем, что луч, содержащий фазовую скорость $\dot{\mathbf{x}}(t)$ и выходящий из точки $\mathbf{x}(t)$ при $0\leqslant t\leqslant T$, пересекается с множеством $\Omega(t)$ только по граничным точкам последнего.

Это утверждение легко доказать для $t<T$, а затем, путем предельного перехода, вывести его для $t=T$.

Допустим, что луч q_t, содержащий вектор $\dot{\mathbf{x}}(t)$, где $t<T$, и выходящий из точки $\mathbf{x}(t)$, содержит внутреннюю точку $\mathbf{y}$ множества $\Omega(t)$. Так как $\Omega(t)$ выпукло, то весь интервал луча q_t между точками $\mathbf{y}$ и $\mathbf{x}(t)$ сплошь состоит из внутренних точек множества $\Omega(t)$. Далее, вектор фазовой скорости $\dot{\mathbf{x}}(t)$ отличен от нуля. Следовательно, найдется такой момент времени t', $t<t'<T$, что $\mathbf{x}(t')\in\Omega(t)$, а это невозможно, так как $t<t'$ и траектория оптимальная.

Итак, луч q_t не содержит внутренних точек множества $\Omega(t)$. Теперь возможны два случая: либо прямая Q_t, содержащая луч q_t, пересекается с $\Omega(t)$ по внутренним точкам последнего, либо нет. В первом случае очевидно, что ковариантный вектор χ_t, ортогональный к произвольно выбранной опорной гиперплоскости P_t множества $\Omega(t)$ в точке $\mathbf{x}(t)$ и направленный в противоположную от $\Omega(t)$ сторону, удовлетворяет неравенству

$$\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\chi_t\geqslant 0.$$

Во втором случае опорную гиперплоскость P_t можно выбрать так, чтобы она содержала прямую Q_t. Следовательно, в обоих случаях неравенство

$$\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\chi_t\geqslant 0$$

можно считать выполненным.

Взяв последовательность $t_k\to T$ и выполнив аналогичную конструкцию для каждой точки $\mathbf{x}(t_k)$, получим в пределе неравенство

$$\dot{\mathbf{x}}(T)\cdot\chi\geqslant 0.$$

Сформулируем теперь доказанное необходимое условие полностью.

Пусть $u(t)$ — оптимальное управление, $\mathbf{x}(t)$ — соответствующая оптимальная траектория уравнения (4), *соединяющая точку ξ_0 с точкой ξ_1 фазового пространства X:*

$$\mathbf{x}(0)=\xi_0,\qquad \mathbf{x}(T)=\xi_1,\qquad 0\leqslant t\leqslant T.$$

Тогда через точку $\xi_1=\mathbf{x}(T)$ можно провести опорную к $\Omega(T)$ гиперплоскость P таким образом, что если обозначить через χ ковариантный вектор, ортогональный к P и направленный в противоположную от множества $\Omega(T)$ сторону, то будут выполняться неравенства:

$$\delta\mathbf{x}(T)\cdot\chi\leqslant 0,\qquad \dot{\mathbf{x}}(T)\cdot\chi=(A\mathbf{x}(T)+\mathbf{b}u(T)\chi)\geqslant 0$$

при любом допустимом возмущении $\delta\mathbf{x}(t)$ оптимальной траектории $\mathbf{x}(t)$.

4°. Уравнения оптимальных управлений и оптимальных траекторий. При помощи сформулированного необходимого

условия легко получить уравнения для оптимального управления $u(t)$ и оптимальной траектории $\mathbf{x}(t)$, соединяющей точку $\xi_0 = \mathbf{x}(0)$ с точкой $\xi_1 = \mathbf{x}(T)$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Для этого воспользуемся неравенством $\delta\mathbf{x}(T)\cdot\chi \leqslant 0$. Очевидно, возмущение $\delta\mathbf{x}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = A\delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\,\delta u$$

и начальному условию $\delta\mathbf{x}(0) = 0$. Поэтому, на основании формулы (7), имеем:

$$\delta\mathbf{x}(T)\cdot\chi = \chi\cdot\varphi_\alpha(T)\int_0^T \psi^\alpha\cdot\mathbf{b}\,\delta u\,d\tau =$$

$$= \int_0^T c_\alpha\,\psi^\alpha\cdot\mathbf{b}\,\delta u\,d\tau = \int_0^T c_\alpha h^\alpha \delta u\,d\tau \leqslant 0,$$

где $c_\alpha = \chi\cdot\varphi_\alpha(T)$, $\alpha = 1, \ldots, n$, одновременно в нуль не обращаются и

$$h^\alpha(t) = \psi^\alpha(t)\cdot\mathbf{b}$$

(см. n° 1). Функция $c_\alpha h^\alpha(t)$ тождественно в нуль не обращается, так как c_α не все равны нулю, а функции $h^\alpha(t)$ образуют, в силу невырожденности уравнения (4), фундаментальную систему решений уравнения n-го порядка (8) (см. n° 1—2). Неравенство

$$\int_0^T c_\alpha h^\alpha \delta u\,d\tau \leqslant 0$$

справедливо при любом допустимом возмущении $\delta u(t)$ оптимального управления $u(t)$. Отсюда следует, что при положительных значениях функции $c_\alpha h^\alpha(t)$ возмущение $\delta u(t)$ может принимать только значения, не превосходящие нуля, а при отрицательных значениях функции $c_\alpha h^\alpha(t)$ — значения неотрицательные. Так как условием допустимости возмущенного управления $u(t) + \delta u(t)$ является неравенство $|u(t) + \delta u(t)| \leqslant 1$, то мы получаем следующее уравнение для оптимального управления $u(t)$:

$$u(t) = \operatorname{sign} c_\alpha h^\alpha(t) = \operatorname{sign} c_\alpha\psi^\alpha(t)\cdot\mathbf{b} = \operatorname{sign}\psi(t)\cdot\mathbf{b},\quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{9}$$

Функцию, принимающую только два значения ± 1, будем называть в дальнейшем релейной.

Ковариантная вектор-функция $c_\alpha\psi^\alpha(t) = \psi(t)$ есть решение уравнения (6):

$$\dot{\psi} = -A'\psi \tag{10}$$

и имеет простой геометрический смысл: вектор $\psi(t)$ в каждый момент времени t, $0 \leqslant t \leqslant T$, однозначно определяет ортогональную к нему гиперплоскость P_t, проходящую через точку $x(t)$ и опорную к $\Omega(t)$, и направлен в противоположную от множества $\Omega(t)$ сторону. В самом деле, при любом допустимом возмущении $\delta u(t)$ имеем:

$$\delta\mathbf{x}(t)\cdot\psi(t) = \psi(t)\cdot\varphi_\alpha(t)\int_0^t \psi^\alpha\cdot\mathbf{b}\,\delta u\,d\tau = c_\beta\psi^\beta(t)\cdot\varphi_\alpha(t)\int_0^t \psi^\alpha\cdot\mathbf{b}\,\delta u\,d\tau;$$

в силу взаимности систем $\{\psi^{\alpha}(t)\}$ и $\{\varphi_{\alpha}(t)\}$, $\alpha = 1, \ldots, n$, (см. n^0 1) имеем

$$\psi^{\beta}(t) \cdot \varphi_{\alpha}(t) = \delta^{\beta}_{\alpha},$$

т. е.

$$\delta \mathbf{x}(t) \cdot \psi(t) = \int_0^t c_{\alpha} \psi^{\alpha} \cdot \mathbf{b}\, \delta u d\tau = \int_0^t \psi \cdot \mathbf{b}\, \delta u d\tau.$$

С другой стороны, из уравнения (9) и неравенства $|u(t) + \delta u(t)| \leqslant 1$ следует, что $\operatorname{sign} \delta u(t) = -\operatorname{sign} \psi(t) \cdot \mathbf{b}$ и, следовательно, $\delta \mathbf{x}(t) \cdot \psi(t) \leqslant 0$. В частности, $P_T = P$ и $\psi(T) = \chi$, так как

$$\psi(T) = c_{\alpha} \psi^{\alpha}(T) = (\chi \cdot \varphi_{\alpha}(T))\, \psi^{\alpha}(T) = \chi$$

(в силу взаимности систем $\{\varphi_{\alpha}(T)\}$ и $\{\psi^{\alpha}(T)\}$, $\alpha = 1, \ldots, n$).

В конечной точке $\xi_1 = \mathbf{x}(T)$ выполняется неравенство $\psi(T) \cdot \dot{\mathbf{x}}(T) \geqslant 0$ (см. n^0 3).

Мы докажем сейчас, что вдоль всей оптимальной траектории $\mathbf{x}(t)$ скалярное произведение $\psi(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)$ постоянно и, следовательно,

$$\psi(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) = \text{const} \geqslant 0. \tag{11}$$

Скалярное произведение

$$\psi(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) = \psi(t) \cdot (A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}\, u(t))$$

непрерывно, так как, в силу (9), $u(t)$ может делать скачок лишь в тот момент, когда $\psi(t) \cdot \mathbf{b} = 0$. Поэтому постоянство скалярного произведения будет следовать из обращения в нуль его производной по времени. В силу уравнений (4), (9) и (10), имеем:

$$\begin{gathered}(\psi(t) \cdot (A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}\, u(t)))' = \dot{\psi}(t) \cdot A\mathbf{x}(t) + \psi(t) \cdot A\dot{\mathbf{x}}(t) + \\ + \dot{\psi}(t) \cdot \mathbf{b}\, u(t) = -A'\psi(t) \cdot A\mathbf{x}(t) + \psi(t) \cdot A(A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}\, u(t)) + \\ + (-A'\psi(t) \cdot \mathbf{b}\, u(t)) = -\psi(t) \cdot A^2\mathbf{x}(t) + \psi(t) \cdot A^2\mathbf{x}(t) + \\ + \psi(t) \cdot A\mathbf{b}\, u(t) - \psi(t) \cdot A\mathbf{b}\, u(t) \equiv 0.\end{gathered}$$

Объединяя условия, выраженные в уравнениях (4), (9), (10), (11), мы приходим к следующему предложению для определения оптимальных управлений и оптимальных траекторий, выходящих из заданной точки ξ_0 фазового пространства X.

Все оптимальные управления $u(t)$ и соответствующие им оптимальные траектории $\mathbf{x}(t)$, выходящие при $t = 0$ из точки ξ_0, содержатся в множестве управлений и соответствующих им траекторий, получаемых при решении следующей системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \ \mathbf{x}(0) = \xi_0, \\ &\dot{\psi} = -A'\psi, \\ &u(t) = \operatorname{sign} \psi(t) \cdot \mathbf{b}, \\ &\psi(0) \cdot \dot{\mathbf{x}}(0) = \psi(0) \cdot (A\mathbf{x}(0) + \mathbf{b}\, u(0)) \geqslant 0.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Поскольку нас интересует не сама вектор-функция $\psi(t)$, а только управляющая функция $u(t) = \operatorname{sign} \psi(t) \cdot \mathbf{b}$, мы всегда будем вектор $\psi(0) = c_\alpha \psi^\alpha(0)$ предполагать нормированным, т. е. предполагать выполненным равенство

$$\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha^2 = \| \psi(0) \| = 1.$$

Меняя всевозможными способами начальное значение $\psi(0)$ (но так, чтобы сохранялось неравенство $\psi(0) \cdot \dot{\mathbf{x}}(0) > 0$), мы получим некоторое множество управлений и траекторий, выходящих из точки ξ_0, которые назовем **экстремальными управлениями** и **экстремальными траекториями**; среди них будут и все оптимальные управления и оптимальные траектории, выходящие из точки ξ_0.

Если известно, что из точки ξ_0 можно попасть в некоторую точку ξ_1 фазового пространства X оптимальным управлением и что существует только одна экстремальная траектория, по которой фазовая точка может попасть из ξ_0 в ξ_1, то эта последняя и будет оптимальной траекторией, а соответствующее экстремальное управление — оптимальным управлением. Этот случай имеет место при синтезе оптимальной системы, который изучен в следующем параграфе.

Система уравнений (12) в точности выражает принцип максимума, сформулированный в работе ([1]). Он заключается в следующем. Первые два уравнения системы (12) можно записать в виде гамильтоновой системы с гамильтоновой функцией $H(\mathbf{x}, \psi, u) = \psi \cdot (A\mathbf{x} + \mathbf{b}u) = \psi\dot{\mathbf{x}}$. В самом деле, имеем:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \psi} = \frac{\partial}{\partial \psi}(\psi \cdot (A\mathbf{x} + \mathbf{b}u)) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u,$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}(\psi \cdot (A\mathbf{x} + \mathbf{b}u)) = -\frac{\partial}{\partial x} A' \psi \mathbf{x} = -A' \psi.$$

Уравнение $u(t) = \operatorname{sign} \psi(t) \cdot \mathbf{b}$ эквивалентно следующему условию: в каждый момент времени t управление $u(t)$ принимает допустимое значение, при котором функция $H = \psi \cdot (A\mathbf{x} + \mathbf{b}u)$, рассматриваемая как функция аргумента u при фиксированных значениях $\mathbf{x}, \psi$, принимает максимальное значение. Это условие и является принципом максимума.

Наконец, из формулы (11) следует, что вдоль всей экстремальной траектории гамильтонова функция $H(\mathbf{x}(t), \psi(t), u(t)) = \text{const} \geqslant 0$.

§ 2. Синтез линейной оптимальной системы с одним управляющим параметром

1°. Постановка задачи. В теории автоматического регулирования интересуются оптимальным переходом по траектории уравнения (4) из произвольного начального положения в начало координат (см. введение).

В этом параграфе теорему существования оптимальных процессов для уравнения (4) мы будем предполагать доказанной (см. § 3, n^0 2).

В n^0 2 этого параграфа показано, что из любой точки фазового пространства в начало координат может вести только одна экстремальная

траектория уравнения (4), которая, следовательно, будет и оптимальной (см. § 1, n^0 4, § 3, n^0 2). Поэтому можно не делать различия между экстремальными траекториями, ведущими в начало, и соответствующими экстремальными управлениями и оптимальными траекториями и управлениями.

В n^0 3 будет изучено множество тех точек фазового пространства, из которых можно попасть в начало координат допустимым и, следовательно, оптимальным управлением. Обозначим это множество через M. Оказывается, что M является выпуклой областью фазового пространства X. Если собственные значения преобразования A устойчивы, то множество M совпадает со всем пространством X.

На основании теоремы единственности экстремальной траектории, ведущей в начало координат, мы можем заключить, что вдоль такой экстремали соответствующее экстремальное управление $u(t)$ определяется однозначно как функция точки траектории, за исключением лишь тех точек траектории, которые соответствуют моментам скачка управления. Таких моментов конечное число (на конечном отрезке времени), так как

$$u(t) = \operatorname{sign} \psi(t) \cdot \mathbf{b}$$

[см. (12)], а функция $\psi(t) \cdot \mathbf{b}$ тождественно в нуль не обращается и является решением линейного уравнения n-го порядка (8) с постоянными коэффициентами. Безразлично, какие значения мы будем приписывать управлению $u(t)$ в момент скачка; для определенности будем считать, что в этот момент $u = 0$.

Следовательно, множество M однозначно разбивается на три непересекающиеся части: $M = M_+ \cup M_- \cup M_0$ по следующему признаку: если точка экстремальной траектории $\mathbf{x}(t) \in M_+$, то $u(t) = 1$, если $\mathbf{x}(t) \in M_-$, то $u(t) = -1$, наконец, если $\mathbf{x}(t) \in M_0$, то в этот момент $u(t)$ делает скачок.

Размерность множества M_0, очевидно, не превосходит $n-1$.

Таким образом, мы получаем однозначную функцию $u(\mathbf{x})$, определенную ма множестве M условиями:

$$u(\mathbf{x}) = 1 \text{ при } \mathbf{x} \in M_+, \quad u(\mathbf{x}) = -1 \text{ при } \mathbf{x} \in M_-, \quad u(\mathbf{x}) = 0 \text{ при } \mathbf{x} \in M_0$$

и обладающую тем свойством, что если двигаться по траектории уравнения

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}\, u(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) \in M, \tag{13}$$

то мы попадем из $\mathbf{x}(0)$ в начало координат по оптимальной траектории уравнения (4) в оптимальное время.

Нахождение функции $u(\mathbf{x})$ называется синтезом оптимальной системы, описываемой уравнением (4) (см. введение).

Если задана функция $v(\mathbf{x})$, удовлетворяющая условиям:

$$v(\mathbf{x}) > 0 \text{ при } \mathbf{x} \in M_+, \quad v(\mathbf{x}) < 0 \text{ при } \mathbf{x} \in M_-, \quad v(\mathbf{x}) = 0 \text{ при } \mathbf{x} \in M_0,$$

то $u(\mathbf{x}) = \operatorname{sign} v(\mathbf{x})$.

Для нахождения функции $v(\mathbf{x})$ очень удобно изучить структуру «множества точек переключения» функции $u(\mathbf{x}) = \operatorname{sign} v(\mathbf{x})$, т. е. множества M_0. Это изучение, так же как и приближенное вычисление множества M_0, можно провести при помощи системы (12).

Если преобразование A имеет действительные собственные значения, то множество M_0 точек переключения является $(n-1)$-мерной гиперповерхностью, которая разбивает множество M на две связные области M_+ и M_-. Эта гиперповерхность, а также способ ее построения были впервые обнаружены А. А. Фельдбаумом [см. (2)]. Мы дадим ее параметрическое представление в n^0 5.

Система второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= y, \\ \dot{y} &= -x + ay + u \end{aligned} \tag{14}$$

была изучена Bushaw [см. (3)]. В зависимости от собственных значений матрицы $\left\| \begin{matrix} 0, & 1 \\ -1, & a \end{matrix} \right\|$ он нашел множество M и множество точек переключения M_0, которое в этом случае является линией на фазовой плоскости x, y.

Полное изучение системы (14) при помощи уравнений (12) представляет собой совершенно элементарную задачу.

В общем случае множество M_0 является псевдомногообразием и его можно вычислять приближенно при помощи формул (12).

2°. Теоремы единственности. Докажем две теоремы единственности.

Пусть u_1, u_2 — два экстремальных управления, переводящих фазовую точку по траектории уравнения (4) из данного начального положения $\boldsymbol{\xi}$ в начало координат за промежутки времени t_1, t_2 соответственно. Соответствующие траектории имеют вид [см. формулу (7)]:

$$\mathbf{x}_1(t) = \boldsymbol{\varphi}_\alpha(t)\left(\xi^\alpha + \int_0^t \boldsymbol{\psi}^\alpha \cdot \mathbf{b}\, u_1 d\tau\right), \quad \mathbf{x}(t_1) = 0,$$

$$\mathbf{x}_2(t) = \boldsymbol{\varphi}_\alpha(t)\left(\xi^\alpha + \int_0^t \boldsymbol{\psi}^\alpha \cdot \mathbf{b}\, u_2 d\tau\right), \quad \mathbf{x}(t_2) = 0,$$

где $\boldsymbol{\varphi}_\alpha(0)\xi^\alpha = \boldsymbol{\xi}$. Тогда оказывается, что $t_1 = t_2$, $u_1(t) \equiv u_2(t)$, $\mathbf{x}_1(t) \equiv \mathbf{x}_2(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant t_1 = t_2$.

Пусть $t_1 \leqslant t_2$. Имеем:

$$\mathbf{x}_1(t_1) = \mathbf{x}_2(t_2) = \boldsymbol{\varphi}_\alpha(t_1)\left(\xi^\alpha + \int_0^{t_1} \boldsymbol{\psi}^\alpha \cdot \mathbf{b}\, u_1 d\tau\right) = \boldsymbol{\varphi}_\alpha(t_2)\left(\xi^\alpha + \int_0^{t_2} \boldsymbol{\psi}^\alpha \cdot \mathbf{b}\, u_2 d\tau\right) = 0.$$

Векторы $\boldsymbol{\varphi}_\alpha(t)$, $\alpha = 1, \ldots, n$, линейно независимы при любом t, следовательно, мы получаем n равенств:

$$\xi^\alpha + \int_0^{t_1} \boldsymbol{\psi}^\alpha \cdot \mathbf{b}\, u_1 d\tau = \xi^\alpha + \int_0^{t_2} \boldsymbol{\psi}^\alpha \cdot \mathbf{b}\, u_2 d\tau = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, n,$$

откуда

$$\int_0^{t_1} \boldsymbol{\psi}^\alpha \cdot \mathbf{b}\, u_1 d\tau = \int_0^{t_2} \boldsymbol{\psi}^\alpha \cdot \mathbf{b}\, u_2 d\tau, \quad \alpha = 1, \ldots, n.$$

Управление $u_2(t)$ экстремально, поэтому найдется такое решение

$$\psi(t) = c_\alpha \psi^\alpha(t)$$

второго из уравнений (12), что $u_2(t) = \operatorname{sign} \psi(t) \cdot \mathbf{b} = \operatorname{sign} c_\alpha \psi^\alpha(t) \cdot \mathbf{b}$. Свернув вторую систему равенств с c_α, получим:

$$c_\alpha \int_0^{t_1} \psi^\alpha \cdot \mathbf{b}\, u_1 d\tau = c_\alpha \int_0^{t_2} \psi^\alpha \cdot \mathbf{b}\, u_2 d\tau = \int_0^{t_1} \psi \cdot \mathbf{b}\, u_1 d\tau =$$

$$= \int_0^{t_2} \psi \cdot \mathbf{b}\, u_2\, d\tau = \int_0^{t_2} \psi \cdot \mathbf{b} \operatorname{sign} \psi \cdot \mathbf{b} = \int_0^{t_2} |\psi \cdot \mathbf{b}|\, d\tau.$$

Но равенство

$$\int_0^{t_1} \psi \cdot \mathbf{b}\, u_1 d\tau = \int_0^{t_2} |\psi \cdot \mathbf{b}|\, d\tau$$

совместимо с неравенством $t_1 \leqslant t_2$ лишь при условии $t_1 = t_2$ и $u_1(t) \equiv u_2(t) \equiv \operatorname{sign} \psi(t) \cdot \mathbf{b}$, что и доказывает наше утверждение.

На основании сказанного в § 1, n° 4, мы можем поэтому отождествлять экстремали, ведущие в начало координат, с оптимальными траекториями.

Вторая теорема единственности формулируется следующим образом.

Пусть u_1, u_2 — два оптимальных управления, переводящих фазовую точку по оптимальным траекториям уравнения (4) *из данного начального положения ξ_0 в положение ξ_1 за оптимальное время T. Соответствующие оптимальные траектории обозначим через*

$$\mathbf{x}_1(t) = \varphi_\alpha(t)\left(\xi_0^\alpha + \int_0^t \psi^\alpha \cdot \mathbf{b}\, u_1 d\tau\right), \qquad \mathbf{x}_2(t) = \varphi_\alpha(t)\left(\xi_0^\alpha + \int_0^t \psi^\alpha \cdot \mathbf{b}\, u_2\, d\tau\right),$$

где $\varphi_\alpha(0)\,\xi_0^\alpha = \xi_0$. Тогда оказывается, что $u_1(t) \equiv u_2(t)$, $\mathbf{x}_1(t) \equiv \mathbf{x}_2(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Имеем:

$$\mathbf{x}_1(T) = \mathbf{x}_2(T) = \varphi_\alpha(T)\left(\xi_0^\alpha + \int_0^T \psi^\alpha \cdot \mathbf{b}\, u_1 d\tau\right) = \varphi_\alpha(T)\left(\xi_0^\alpha + \int_0^T \psi^\alpha \cdot \mathbf{b}\, u_2\, d\tau\right).$$

Векторы $\varphi_\alpha(T)$, $\alpha = 1, \ldots, n$, линейно независимы, следовательно, мы получаем систему из n равенств:

$$\int_0^T \psi^\alpha \cdot \mathbf{b}\, u_1 d\tau = \int_0^T \psi^\alpha \cdot \mathbf{b}\, u_2\, d\tau, \quad \alpha = 1, \ldots, n.$$

Конец доказательства полностью совпадает с доказательством предыдущей теоремы.

3°. Изучение множества M. Через $M(T)$, $T \geqslant 0$, обозначим множество точек фазового пространства X, из которых можно попасть в начало координат по траектории уравнения (4) при помощи допустимого (не обязательно оптимального) управления за время $\leqslant T$. Множество M совпадает с объединением всех $M(T)$ для $T \geqslant 0$.

Докажем, что множество $M(T)$ выпукло и замкнуто для всякого $T > 0$. ($M(0)$ совпадает с началом координат.)

Пусть из точек ξ_1, ξ_2 фазового пространства X можно попасть в начало координат по траекториям уравнения (4) при помощи допустимых управлений u_1, u_2 за промежутки времени t_1, t_2, соответственно. Можно считать, что $t_1 = t_2$, так как в случае неравенства $t_1 < t_2$ можно взять допустимое управление u_3, определенное на отрезке времени $0 \leqslant t \leqslant t_2$ при помощи равенств $u_3(t) = u_1(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant t_1$, $u_3(t) \equiv 0$ при $t_1 \leqslant t < t_2$, и переводящее фазовую точку из ξ_1 в начало координат за время t_2. Но тогда из любой точки отрезка

$$\lambda\xi_1 + \mu\xi_2, \quad \lambda + \mu = 1, \quad \lambda \geqslant 0, \quad \mu \geqslant 0,$$

можно попасть за то же время $t_1 = t_2$ в начало координат при помощи допустимого управления $\lambda u_1 + \mu u_2$ (см. аналогичное рассуждение в § 1, n^o 3).

Замкнутость множества $M(T)$ следует из теоремы существования (см. § 3, n^o 2). В самом деле, пусть $\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots$ — последовательность точек, сходящихся к точке ξ фазового пространства, и пусть каждая точка $\xi_k \in M(T)$. Покажем, что и точка $\xi \in M(T)$.

Через u_k обозначим допустимое управление, переводящее фазовую точку из положения ξ_k в начало координат за время $t_k \leqslant T$. На основании теоремы существования, управление u_k можно считать оптимальным, так как при замене допустимого управления оптимальным управлением время перехода из точки ξ_k в начало может только уменьшиться. Далее, можно считать, что $t_k \to s \leqslant T$. Согласно формулам (12),

$$u_k(t) = \operatorname{sign} \psi_k(t) \cdot \mathbf{b},$$

где функция $\psi_k(t) \cdot \mathbf{b}$ отлична от тождественного нуля и является решением линейного уравнения n-го порядка (8) с постоянными коэффициентами.

Как и прежде, обозначим через $h^\alpha(t) = \psi^\alpha(t) \cdot \mathbf{b}$, $\alpha = 1, \ldots, n$, фундаментальную систему решений уравнения (8). Имеем:

$$\psi_k(t) \cdot \mathbf{b} = c_{\alpha k} h^\alpha(t).$$

Коэффициенты $c_{\alpha k}$, $\alpha = 1, \ldots, n$, при каждом $k = 1, 2, \ldots$ можно считать нормированными:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} c_{\alpha k}^2 = 1,$$

так как мы интересуемся только функциями $u_k(t) = \operatorname{sign} c_{\alpha k} h^\alpha(t)$. Поэтому можно предполагать, что при $k \to \infty$ коэффициенты $c_{\alpha k} \to c_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, n$.

При $k \to \infty$ получим:

$$\psi_k(t) \cdot \mathbf{b} = c_{\alpha k} h^\alpha(t) \to c_\alpha h^\alpha(t) = c_\alpha \psi^\alpha(t) \cdot \mathbf{b} = \psi(t) \cdot \mathbf{b}, \quad \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha^2 = 1.$$

Для последовательности оптимальных управлений $u_k(t) = \operatorname{sign} \psi_k(t) \cdot \mathbf{b}$ имеем при $k \to \infty$:

$$u_k(t) = \operatorname{sign} c_{\alpha k} h^\alpha(t) \to \operatorname{sign} c_\alpha h^\alpha(t) = \operatorname{sign} \psi(t) \cdot \mathbf{b} = u(t),$$

где $\psi(t) = c_\alpha \psi^\alpha(t)$ — некоторое решение второго из уравнений (12). Тра-

ектория, соответствующая управлению $u_k(t)$, имеет вид [см. формулу (7)]:

$$\mathbf{x}_k(t) = \varphi_\alpha(t)\left(\xi_k^\alpha + \int_0^t \psi^\alpha \cdot \mathbf{b} u_k d\tau\right),$$

где $\varphi_\alpha(0)\xi_k^\alpha = \xi_k$. Траектория, соответствующая управлению $u(t)$ с начальным условием $\mathbf{x}(0) = \xi$, имеет вид:

$$\mathbf{x}(t) = \varphi_\alpha(t)\left(\xi^\alpha + \int_0^t \psi^\alpha \cdot \mathbf{b}\, u d\tau\right),$$

где $\varphi_\alpha(0)\xi^\alpha = \xi$. Следовательно, управление $u(t)$ переводит фазовую точку из положения ξ в начало координат за время $s \leqslant T$, так как имеем:

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_k(t_k) = \lim_{k\to\infty}(\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_k(s)) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\varphi_\alpha(s)(\xi^\alpha - \xi_k^\alpha) + \varphi_\alpha(s)\int_0^s \psi^\alpha \cdot \mathbf{b}(u - u_k)\, d\tau\right) = 0.$$

Из формулы $u(t) = \operatorname{sign} \psi(t)\cdot\mathbf{b}$ и из теоремы единственности для экстремальных управлений, доказанной в n^0 2, следует, что управление $u(t)$ оптимально.

Можно доказать, что множество $M(T)$ при любом $T > 0$ содержит внутренние точки. Отсюда и из выпуклости и замкнутости множества $M(T)$, $T > 0$, следует, что $M(T)$ гомеоморфно n-мерному шару, а его граница $S(T)$ гомеоморфна $(n-1)$-мерной сфере.

Покажем, что топологическую сферу $S(T)$ можно характеризовать следующим образом: точка фазового пространства принадлежит множеству $S(T)$ тогда и только тогда, если из нее можно перевести фазовую точку в начало координат при помощи оптимального управления за оптимальное время T по траектории уравнения (4).

Если из некоторой точки ξ можно попасть в начало координат допустимым управлением, то ξ можно окружить такой окрестностью D, что из любой точки окрестности D также можно попасть в начало координат некоторым допустимым управлением. Докажем это. Обозначим управление, переводящее фазовую точку из положения ξ в начало, через $u(t)$, время перехода — через T. То же самое управление за то же время T переведет фазовую точку из произвольного начального положения $\xi_1 \in D$ в точку ξ_2, лежащую в любой наперед заданной окрестности начала координат, если только окрестность D достаточно мала. Но начало координат является внутренней точкой множества $M(T)$ при любом $T > 0$. Следовательно, из ξ_2 можно попасть в начало допустимым управлением и, значит, в начало можно попасть допустимым управлением из произвольной точки $\xi_1 \in D$.

Пусть точка $\xi \in S(T)$. Окружим ее окрестностью D указанного свойства и выберем в D последовательность точек $\xi_k \to \xi$ при $k \to \infty$ и таких, что ни одна точка ξ_k не принадлежит множеству $M(T)$. Через u_k обозначим оптимальное управление, переводящее фазовую точку из

положения ξ_k в начало координат за время t_k; очевидно $t_k > T$. Рассуждения, аналогичные проведенным выше, позволяют сделать допущение, что $u_k(t) \to u(t)$ и $t_k \to s \geqslant T$ при $k \to \infty$ и что управление $u(t)$ является оптимальным управлением, переводящим фазовую точку из положения ξ в начало координат за оптимальное время $s \geqslant T$. Но из точки ξ можно попасть в начало координат некоторым допустимым управлением за время T, следовательно, $s = T$, и в одну сторону наше утверждение доказано.

Пусть теперь из точки ξ можно попасть в начало координат при помощи оптимального управления $u(t) = \operatorname{sign} \psi(t) \cdot \mathbf{b}$ за оптимальное время T; покажем, что $\xi \in S(T)$. Соответствующая оптимальная траектория имеет вид:

$$\mathbf{x}(t) = \varphi_\alpha(t)\left(\xi^\alpha + \int_0^t \varphi^\alpha \cdot \mathbf{b} u\, d\tau\right).$$

Функция $\psi(t) \cdot \mathbf{b}$, как решение уравнения (8), определена на всей оси $-\infty < t < +\infty$ и потому релейную функцию $u(t) = \operatorname{sign} \psi(t) \cdot \mathbf{b}$ можно рассматривать на всей оси.

Пусть T_1 — любое положительное число; очевидно, из точки $\mathbf{x}(-T_1)$ фазового пространства можно попасть в начало координат за оптимальное время $T_1 + T$ при помощи оптимального управления

$$u(t) = \operatorname{sign} \psi(t) \cdot \mathbf{b}, \quad -T_1 \leqslant t \leqslant T,$$

причем оптимальная траектория будет иметь тот же вид:

$$\mathbf{x}(t) = \varphi_\alpha(t)\left(\xi^\alpha + \int_0^t \psi^\alpha \cdot \mathbf{b} u d\tau\right),$$

однако теперь ее нужно рассматривать на более широком отрезке времени $-T_1 \leqslant t \leqslant T$.

Допустим, что точка ξ является внутренней для множества $M(T)$; тогда при достаточно малом $T_1 > 0$ точка

$$\mathbf{x}(-T_1) = \varphi_\alpha(-T_1)\left(\xi^\alpha + \int_0^{-T_1} \psi^\alpha \cdot \mathbf{b} u d\tau\right) \in M(T).$$

Поэтому из $\mathbf{x}(-T_1)$ можно попасть в начало координат за время T, а с другой стороны, на основании вышесказанного, оптимальное время перехода из $\mathbf{x}(-T_1)$ в начало координат равно $T_1 + T > T$, что противоречит определению оптимального времени.

Полученная характеристика множества $S(T)$ позволяет нам сделать следующее важное заключение: при $T_1 < T_2$ сфера $S(T_1)$ лежит строго внутри сферы $S(T_2)$.

Множество M получается объединением всех $M(T)$ по всем $T \geqslant 0$. Следовательно, M — выпуклая область, так как каждое множество $M(T)$ выпукло, и если $\xi \in M(T_1)$, то ξ является внутренней точкой для $M(T_2)$ при $T_2 > T_1$.

Если собственные значения преобразования A устойчивы, т. е. имеют отрицательные действительные части, то M совпадает со всем фазовым

пространством X. Это следует из того, что при $T \to \infty$ расстояние от начала координат до множества $S(T)$ также $\to \infty$. Докажем это последнее утверждение.

Если решать систему (12) с начальным условием $\mathbf{x}(0)=0$, то в качестве начального значения $\psi(0)=c_\alpha \psi^\alpha(0)$ можно взять любой отличный от нуля ковариантный вектор, так как в этом случае

$$\psi(0)\cdot(A\mathbf{x}(0)+\mathbf{b}u(0))=\psi(0)\cdot\mathbf{b}u(0)=\psi(0)\cdot\mathbf{b}\operatorname{sign}\psi(0)\cdot\mathbf{b}\geqslant 0.$$

Как было сказано в § 1, n° 4, вектор $\psi(0)$ можно предполагать нормированным, т. е. считать выполненным равенство

$$\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha^2=\|\psi(0)\|=1.$$

Соответствующая экстремальная траектория имеет вид:

$$\mathbf{x}(t)=\varphi_\alpha(t)\int_0^t \psi^\alpha\cdot\mathbf{b}\operatorname{sign}\psi\cdot\mathbf{b}\,d\tau. \tag{15}$$

Мы будем рассматривать $\mathbf{x}(t)$ также при отрицательных значениях t.

На основании теоремы единственности n° 2 и теоремы существования § 3, n° 2, при любом $T\geqslant 0$ выражение (15), рассматриваемое на отрезке $-T\leqslant t\leqslant 0$, дает нам оптимальную траекторию уравнения (4), ведущую из точки $\mathbf{x}(-T)$ в начало координат; соответствующее оптимальное управление будет $u(t)=\operatorname{sign}\psi(t)\cdot\mathbf{b}$, $-T\leqslant t\leqslant 0$, а оптимальное время перехода равно T. Следовательно, все множество $S(T)$ можно получить, если в формуле (15) подставить вместо t время $-T$ и всевозможными способами менять начальное значение $\psi(0)$. Так как $\psi(0)$ мы предполагаем нормированными, то вектор $\psi(0)$ должен описать $(n-1)$-мерную сферу в сопряженном к X пространстве. (Нужно, однако, иметь в виду, что получаемое отображение этой сферы на топологическую сферу $S(T)$ не является гомеоморфизмом.)

Итак, мы получаем следующее представление точек множества $S(T)$:

$$\mathbf{x}(-T)=\varphi_\alpha(-T)\int_0^{-T}\psi^\alpha\cdot\mathbf{b}\operatorname{sign}\psi\cdot\mathbf{b}\,d\tau=\varphi_\alpha(-T)\int_0^{-T}\psi^\alpha\cdot\mathbf{b}\operatorname{sign}(c_\beta\psi^\beta\cdot\mathbf{b})\,d\tau,$$

где $\psi(0)=c_\alpha\psi^\alpha(0)$ пробегает $(n-1)$-мерную сферу.

Если преобразование A имеет устойчивые собственные значения, то собственные значения преобразования $-A'$ неустойчивы. Поэтому при $t\to-\infty$ функция $\psi(t)\to 0$ экспоненциально, равномерно относительно начальных значений $\psi(0)$, заполняющих $(n-1)$-мерную сферу. Имеем:

$$\psi(-T)\cdot\mathbf{x}(-T)=c_\beta\psi^\beta(-T)\cdot\varphi_\alpha(-T)\int_0^{-T}\psi^\alpha\cdot\mathbf{b}\operatorname{sign}\psi\mathbf{b}\,d\tau=$$

$$=\int_0^{-T}c_\alpha\psi^\alpha\cdot\mathbf{b}\operatorname{sign}(c_\alpha\psi^\alpha\cdot\mathbf{b})\,d\tau=\int_0^{-T}|\psi\cdot\mathbf{b}|\,d\tau<0.$$

Следовательно, при $T\to\infty$ выражение $\psi(-T)\cdot\mathbf{x}(-T)\to a$ равномерно относительно выбора начальных значений $\psi(0)$, где $-\infty\leqslant a<0$. Другими словами, при $T\to\infty$ расстояние от любой точки $\mathbf{x}(-T)$ мно-

жества $S(T)$ до начала координат стремится к ∞ равномерно относительно выбора этой точки в множестве $S(T)$.

4°. **Вычисление функции** $u(\mathbf{x})$. Из сказанного в конце n° 3 получается следующий способ приближенного вычисления множества M_0 и функции $u(\mathbf{x})$.

Мы должны решать систему (12) на отрицательной полуоси $-\infty < t \leqslant 0$ с начальным условием $\mathbf{x}(0) = 0$; начальное значение $\psi(0)$ должно пробегать всю $(n-1)$-мерную сферу начальных значений в сопряженном к X пространстве. При каждом выборе начального значения $\psi(0)$, т. е. при выборе решения $\psi(t)$ второго из уравнений (12), мы получаем последовательность времен $0 > t_1 > t_2 > \ldots$, которая может быть и бесконечной и которая состоит из всех нечетнократных нулей функции $\psi(t)\cdot\mathbf{b}$ на всей отрицательной полуоси времени; другими словами, числа t_i дают все моменты скачков оптимального управления

$$u(t) = \operatorname{sign}\psi(t)\cdot\mathbf{b}$$

на отрицательной полуоси времени. Очевидно, значения $\mathbf{x}(t_i) \in M_0$, $i = 1, 2, \ldots$.

Для значений t, лежащих между t_i и t_{i+1}, точки $\mathbf{x}(t)$ принадлежат, в зависимости от знака функции $\psi(t)\cdot\mathbf{b}$, либо множеству M_+, либо множеству M_-.

Если это вычисление проделать для начальных значений $\psi(0)$, достаточно густо расположенных на сфере начальных значений, то мы можем получить довольно точное представление о функции $u(\mathbf{x})$ и о множестве M_0.

Следовательно, предлагаемый метод исследования функции $u(\mathbf{x})$ и множества M_0 основывается на изучении распределения действительных нулей функций

$$\psi(t)\cdot\mathbf{b} = c_\alpha\psi^\alpha(t)\cdot\mathbf{b} = c_\alpha h^\alpha(t), \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha^2 = 1,$$

в зависимости от коэффициентов c_α, $\alpha = 1, \ldots, n$, другими словами, на изучении распределения действительных нулей решений линейного уравнения n-го порядка (8) с постоянными коэффициентами.

Если рассматривать самый общий случай произвольных комплексных собственных значений преобразования A в n-мерном пространстве, то можно доказать, что множество M_0 является $(n-1)$-мерным псевдомногообразием и что M_+ и M_- — связные множества. То, что в этом общем случае не получается более ясной картины структуры множеств M_+, M_-, M_0, объясняется чрезвычайно сложной зависимостью действительных нулей функции $c_\alpha h^\alpha(t)$ от коэффициентов c_α, $\alpha = 1, \ldots, n$. Функция $c_\alpha h^\alpha(t)$ в этом случае есть, очевидно, квазимногочлен с комплексными показателями.

Однако приближенное вычисление при помощи системы (12) функции $u(\mathbf{x})$ для любого уравнения (4) с численными коэффициентами, по-видимому, не вызовет никаких затруднений.

Если собственные значения преобразования A действительны и различны, то любое решение уравнения (8) имеет вид:

$$c_\alpha h^\alpha(t) = c_\alpha e^{\lambda_\alpha t},$$

где λ_α — действительные числа. В этом случае корни функции $c_\alpha h^\alpha(t)$ очень просто зависят от коэффициентов c_α, и можно без труда получить результаты, сформулированные в n° 1.

То же самое можно сказать и о нулях решения $c_\alpha h^\alpha(t)$ уравнения (8) при $n=2$, независимо от характера собственных значений преобразования A.

5°. Пример. Рассмотрим случай действительных собственных значений преобразования A. Для простоты будем предполагать, что собственные значения простые и отрицательные. Множество M совпадает в этом случае со всем пространством X.

Докажем, что множество точек переключения M_0 является гиперповерхностью, разбивающей пространство X на две связные области M_+ и M_-.

Любое оптимальное управление имеет в рассматриваемом случае вид:

$$u(t) = \operatorname{sign} c_\alpha e^{\lambda_\alpha t},$$

где c_α, λ_α, $\alpha = 1, \ldots, n$, — действительные числа. При доказательстве мы используем известный факт, что квазимногочлен $c_\alpha e^{\lambda_\alpha t}$ при действительных c_α, λ_α может иметь не более $(n-1)$-го нуля, если учесть кратности, и что любое наперед заданное распределение этих нулей можно получить соответствующим подбором коэффициентов c_α, $\alpha = 1, \ldots, n$, при любых попарно различных фиксированных показателях λ_α, $\alpha = 1, \ldots, n$.

Обозначим через R_+^1 следующее решение уравнения (4):

$$\mathbf{x}(t) = \varphi_\alpha(t) \int_0^t \psi^\alpha \cdot \mathbf{b} \operatorname{sign} e^{\lambda_1 \tau} \, d\tau, \qquad -\infty < t \leqslant 0,$$

а через R_-^1 — решение

$$\mathbf{x}(t) = -\varphi_\alpha(t) \int_0^t \psi^\alpha \cdot \mathbf{b} \operatorname{sign} e^{\lambda_1 \tau} d\tau, \qquad -\infty < t \leqslant 0.$$

Эти решения дают нам оптимальные траектории, ведущие в начало и соответствующие оптимальным управлениям

$$u_+(t) = \operatorname{sign} e^{\lambda_1 t} = 1, \qquad u_-(t) = -\operatorname{sign} e^{\lambda_1 t} = -1.$$

Вдоль каждой из них управление не делает ни одного скачка.

Сформулированное свойство о нулях квазимногочлена $c_\alpha e^{\lambda_\alpha t}$ позволяет так подобрать оптимальное управление вида

$$u(t) = \operatorname{sign}(c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}),$$

чтобы оно имело на полуоси $-\infty < t < 0$ единственный скачок в любой наперед заданный момент $t = t_0$, где совершается скачок со значения $+1$ на значение -1, если двигаться в сторону уменьшающихся t. Если выпустить фазовую точку в момент $t=0$ из начала координат по соответствующей управлению

$$u(t) = \operatorname{sign}(c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t})$$

траектории и наблюдать за ней при уменьшающихся t, то точка будет двигаться сначала по R_+^1 (в обратном направлении); после первого (и единственного) скачка управления $u(t)$, который, в силу произвольно-

сти t_0, может быть совершен в любой точке траектории R^1, фазовая точка сойдет с R^1_+ и никогда больше на нее не попадет, в силу теоремы единственности для экстремалей (n^o 2).

Симметричное построение можно провести для кривой R^1_-.

В силу однозначной определенности экстремалей, мы получаем двумерную поверхность R^2, разбитую линией $R^1 = R^1_+ \cup R^1_-$ на две области R^2_+, R^2_-. Область R^2_+ заполнена теми частями оптимальных траекторий, которые начинаются в точках R^1 и описываются фазовой точкой после первого и единственного скачка оптимального управления

$$u(t) = \operatorname{sign}(c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t})$$

со значения -1 на значение $+1$ (если двигаться в сторону уменьшающихся t). R^2_- определяется симметрично.

Очевидно, любая точка этой поверхности при $n \geqslant 3$ может служить местом скачка некоторого оптимального управления и т. д.

Таким образом, мы получаем последовательность вложенных друг в друга поверхностей:

$$R^1 \subset R^2 \subset \ldots \subset R^{n-1} \subset R^n.$$

Поверхность R^i имеет размерность i и разбивается на две связные области R^i_+, R^i_- поверхностью R^{i-1}. Область R^i_+ заполнена оптимальными траекториями, которые начинаются на R^{i-1}_-, если двигаться в сторону уменьшающегося времени, и соответствуют оптимальным управлениям вида

$$u(t) = \operatorname{sign} \sum_{\alpha=1}^{i} c_\alpha e^{\lambda_\alpha t},$$

принимающим вдоль этих траекторий значение $+1$; на этом значении $u(t)$ стабилизируется при изменении t от 0 до $-\infty$ после $(i-1)$-го скачка, который совершается в момент отрыва фазовой точки от поверхности R^{i-1}_-.

Любая точка областей R^{n-1}_+, R^{n-1}_- гиперповерхности R^{n-1} может служить местом $(n-1)$-го и, следовательно, последнего скачка управления

$$u(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha e^{\lambda_\alpha t}.$$

R^n совпадает со всем пространством X, области R^n_+, R^n_- совпадают с областями M_+, M_-.

Пусть числа $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ удовлетворяют условию:

$$0 \geqslant t_1 \geqslant t_2 \geqslant \ldots \geqslant t_{n-1}.$$

Существует оптимальное управление

$$u(t_1, \ldots, t_{n-1}; t) = \operatorname{sign} \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha e^{\lambda_\alpha t},$$

имеющее скачки на полуоси $-\infty < t \leqslant 0$ лишь в точках $t_1, \ldots, t_{n-1}$.

Из сказанного следует, что каждую точку гиперповерхности переключения R^{n-1} можно записать в виде:

$$\mathbf{x}(t_1,\ldots,t_{n-1}) = \pm\varphi_\alpha(t_{n-1})\int_0^{t_{n-1}}\psi^\alpha\mathbf{b}\,u(t_1,\ldots,t_{n-1};\ \tau)\,d\tau,$$

где $0\geqslant t_1\geqslant t_2\geqslant\ldots\geqslant t_{n-1}$ — соответствующим образом подобранные числа. Наоборот, всякая такая точка $\mathbf{x}(t_1,\ldots,t_{n-1})\in R^{n-1}$. Тем самым получено параметрическое представление гиперповерхности R^{n-1}:

$$\mathbf{x}(t_1,\ldots,t_{n-1}) = \pm\varphi_\alpha(t_{n-1})\int_0^{t_{n-1}}\psi^\alpha\cdot\mathbf{b}\,u(t_1,\ldots,t_{n-1};\ \tau)\,d\tau =$$

$$= \pm\varphi_\alpha(t_{n-1})\left(\int_0^{t_1}\psi^\alpha\cdot\mathbf{b}\,d\tau - \int_{t_1}^{t_2}\psi^\alpha\cdot\mathbf{b}\,d\tau + \ldots + (-1)^{n-2}\int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}}\psi^\alpha\cdot\mathbf{b}\,d\tau\right), \quad (16)$$

где параметры $t_1,\ldots,t_{n-1}$ подчиняются единственному условию:

$$0\geqslant t_1\geqslant\ldots\geqslant t_{n-1}.$$

§ 3. Случай нескольких управляющих параметров. Теорема существования

1°. Обобщение на случай нескольких управляющих параметров. Развитые в § 1 методы без изменения переносятся на линейные системы с несколькими управляющими параметрами. Поэтому здесь будут кратко сформулированы лишь основные определения и выписаны уравнения для оптимальных управлений и соответствующих им оптимальных траекторий.

Пусть задано линейное дифференциальное векторное уравнение с r управляющими параметрами $u^1,\ldots,u^r$:

$$\dot{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}_1u^1 + \ldots + \mathbf{b}_ru^r. \quad (17)$$

Как и в § 1, здесь $\mathbf{x}$ — вектор в n-мерном фазовом пространстве X, $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_r$ — фиксированные векторы этого пространства, A — линейное преобразование пространства X, не зависящее от времени. Управляющая вектор-функция $\mathbf{u}=(u^1,\ldots,u^r)$ выбирается в классе кусочно-непрерывных вектор-функций, каждая из координат которых в любой момент времени не превосходит по модулю 1: $|u^i|\leqslant 1$, $i=1,\ldots,r$; такие управления назовем допустимыми.

Основная задача формулируется так же, как и в § 1: в фазовом пространстве X заданы две точки ξ_0, ξ_1; требуется выбрать такое допустимое векторное управление $\mathbf{u}=(u^1(t),\ldots,u^r(t))$, чтобы изображающая точка $\mathbf{x}(t)$, двигаясь по траектории уравнения (17), перешла из положения ξ_0 в положение ξ_1 за минимальное время.

Уравнения для оптимальных управлений и оптимальных траекторий мы, как и в § 1, напишем для невырожденного случая.

Уравнение (17) назовем невырожденным, если каждая из следующих r систем содержит по n линейно независимых векторов:

$$\mathbf{b}_i,\ A\mathbf{b}_i,\ldots,\ A^{n-1}\mathbf{b}_i,\qquad i=1,\ldots,\ r.$$

Следовательно, если уравнение (17) невырожденное, то каждая из следующих r систем содержит по n линейно независимых функций (см.§ 1):

$$h_i^1(t)=\psi^1(t)\cdot\mathbf{b}_i,\ldots,\ h_i^n(t)=\psi^n(t)\cdot\mathbf{b}_i,\qquad i=1,\ldots,\ r. \tag{18}$$

Оптимальные управления и соответствующие им оптимальные траектории невырожденного уравнения (17), выходящие из заданной точки ξ_0 фазового пространства X, определяются при помощи следующего предложения.

Все оптимальные управления $(u^1(t),\ldots,\ u^r(t))$ *и соответствующие им траектории* $\mathbf{x}(t)$, *выходящие при* $t=0$ *из точки* ξ_0 *фазового пространства уравнения* (17), *содержатся в управлениях и соответствующих им траекториях, получаемых при решении следующей системы уравнений:*

$$\left.\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}+\mathbf{b}_1u^1+\ldots+\mathbf{b}_ru^r,\qquad \mathbf{x}(0)=\xi_0\\ \dot{\psi}=-A'\psi,\\ u^i=\operatorname{sign}\psi\cdot\mathbf{b}_i,\\ \psi(0)\cdot(A\mathbf{x}(0)+\mathbf{b}_1u^1(0)+\ldots+\mathbf{b}_r u^r(0))\geqslant 0.\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Так как функции (18) линейно независимы и $\psi(0)\neq 0$, то уравнения

$$u_i(t)=\operatorname{sign}\psi(t)\cdot\mathbf{b}_i=\operatorname{sign}c_\alpha\psi^\alpha(t)\cdot\mathbf{b}_i=\operatorname{sign}c_\alpha h_i^\alpha(t),\qquad i=1,\ldots,\ r,$$

однозначно определяют управление $(u^1(t),\ldots,\ u^r(t))$.

Две теоремы единственности, доказанные в § 2, n° 2 и играющие важную роль при синтезе оптимальной системы, очевидным образом переносятся на случай уравнения (17).

2°. Теорема существования. *Пусть* ξ_0, ξ_1 — *две произвольные точки фазового пространства* X, *соединимые траекторией уравнения* (17) *при помощи некоторого допустимого управления* $(u^1(t),\ldots,\ u^r(t))$. *Тогда существует оптимальное управление, переводящее фазовую точку из положения* ξ_0 *в положение* ξ_1 *по оптимальной траектории.*

Доказательство *. Прежде всего мы расширим класс допустимых управлений $(u^1(t),\ldots,\ u^r(t))$ в уравнении (17). Именно, управление $(u^1(t),\ldots,\ u^r(t))$ назовем допустимым, если каждая из функций $u^i(t)$, $i=1,\ldots,r$, измерима и почти всюду не превосходит по модулю 1: $|u^i|\leqslant 1$. Соответствующее решение $\mathbf{x}(t)$ уравнения (17) есть абсолютно непрерывная вектор-функция, и равенство (17) справедливо почти всюду.

Необходимые условия (19) остаются справедливыми и при таком расширении класса допустимых управлений, если считать, что равенства (19) выполняются почти всюду.

* Данное здесь доказательство существенно проще первоначального. На возможность такого упрощения мое внимание обратил А. Ф. Филиппов.

Другими словами, если $(u^1(t),\ldots, u^r(t))$ — оптимальное управление в классе измеримых управлений, удовлетворяющее почти всюду неравенствам $|u^i| \leqslant 1$, $i = 1,\ldots, r$, и переводящее фазовую точку $\mathbf{x}(t)$ уравнения (17) из положения ξ_0 в положение ξ_1 по оптимальной траектории, то найдется такое решение $\psi(t) \neq 0$ уравнения $\dot{\psi} = -A'\psi$, что почти всюду

$$u^i(t) = \operatorname{sign} \psi(t) \cdot \mathbf{b}_i, \quad i = 1,\ldots, r. \tag{20}$$

Это можно доказать, очевидным образом видоизменив соответствующее доказательство из § 1.

Пусть $(u_k^1(t),\ldots, u_k^r(t))$, $k = 1, 2,\ldots,$ — последовательность допустимых (измеримых) управлений, переводящих фазовую точку $\mathbf{x}(t)$ из положения ξ_0 в положение ξ_1 по траектории уравнения (17) и минимизирующих время перехода. Назовем такую последовательность минимизирующей последовательностью.

Время перехода, соответствующее управлению $(u_k^1(t),\ldots, u_k^r(t))$, обозначим через t_k, нижнюю грань времен перехода из ξ_0 в ξ_1 — через T. Так как последовательность $(u_k^1(t),\ldots, u_k^r(t))$ минимизирующая, то

$$\lim_{k\to\infty} t_k = T.$$

Соответствующие траектории уравнения (17) имеют вид (см. формулу (7)):

$$\mathbf{x}_k(t) = \varphi_\alpha(t)\left(\xi_0^\alpha + \int_0^t \psi^\alpha \cdot (\mathbf{b}_1 u_k^1 + \ldots + \mathbf{b}_r u_k^r)\, d\tau\right). \tag{21}$$

Так как $t_k \to T$ при $k \to \infty$ и $t_k \geqslant T$, то точка

$$\mathbf{x}_k(T) = \varphi_\alpha(T)\left(\xi_0^\alpha + \int_0^T \psi^\alpha \cdot (\mathbf{b}_1 u_k^1 + \ldots + \mathbf{b}_r u_k^r)\, d\tau\right)$$

определена при любом k и $\mathbf{x}_k(T) \to \xi_1$ при $k \to \infty$, ибо $\mathbf{x}_k(t_k) = \xi_1$ при любом k.

Мы покажем сейчас, что существует допустимое управление $(u^1(t),\ldots, u^r(t))$ (в классе измеримых управлений), переводящее фазовую точку из ξ_0 в ξ_1 за время T. Тем самым теорема существования будет доказана, так как, согласно равенствам (20), почти всюду

$$u^i(t) = \operatorname{sign} \psi(t) \cdot \mathbf{b}_i, \quad i = 1, \ldots, r, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

и, следовательно, релейное управление

$$(\operatorname{sign} \psi \cdot \mathbf{b}_1,\ldots, \operatorname{sign} \psi \cdot \mathbf{b}_r), \ 0 \leqslant t \leqslant T,$$

переводит фазовую точку по траектории уравнения (17) из положения ξ_0 в ξ_1 за время T.

Будем рассматривать функции $u_k^i(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $i = 1,\ldots, r$, $k = 1, 2,\ldots,$ как элементы гильбертова пространства L^2 интегрируемых с квадратом функций, определенных на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$. Каждая из функций $u_k^i(t)$ принадлежит шару радиуса $\sqrt{T}$ этого пространства, так как

$$\int_0^T u_k^{i2}(t)\, dt \leqslant \int_0^T dt = T.$$

Так как шар в гильбертовом пространстве слабо компактен, то существует такая измеримая вектор-функция $\mathbf{u}(t)=(u^1(t),\ldots, u^r(t))$, где $u^i(t)$, $i=1,\ldots, r$, принадлежат шару радиуса $\sqrt{T}$, что к этой вектор-функции слабо сходится некоторая подпоследовательность последовательности управлений $(u_k^1(t),\ldots, u_k^r(t))$. Обозначим эту подпоследовательность через

$$(v_k^1(t),\ldots, v_k^r(t)), \quad k=1,\ 2,\ldots .$$

Из определения слабой сходимости следует:

$$\int_0^T \psi^\alpha(t)\cdot(\mathbf{b}_1 v_k^1(t)+\ldots+\mathbf{b}_r v_k^r(t))\,dt \to$$

$$\to \int_0^T \psi^\alpha(t)\cdot(\mathbf{b}_1 u^1(t)+\ldots+\mathbf{b}_r u^r(t))\,dt, \quad \alpha=1,\ldots,n,$$

при $k\to\infty$.

С другой стороны, при $k\to\infty$

$$\varphi_\alpha(T)\,(\xi_0^\alpha+\int_0^T \psi^\alpha\cdot(\mathbf{b}_1 v_k^1+\ldots+\mathbf{b}_r v_k^r)\,dt \to \xi_1$$

и, следовательно,

$$\varphi_\alpha(T)\,(\xi_0^\alpha+\int_0^T \psi^\alpha\cdot(\mathbf{b}_1 u^1+\ldots+\mathbf{b}_r u^r)\,dt = \xi_1.$$

Таким образом, измеримое управление $(u^1(t),\ldots, u^r(t))$ переводит фазовую точку из положения ξ_0 в положение ξ_1 за время T (см. формулу (21)).

Для окончания доказательства надо еще показать, что почти всюду на отрезке $0\leqslant t\leqslant T$ имеем: $|u^i|\leqslant 1$, $i=1,\ldots, r$. Допустим противное; пусть на множестве $\mathcal{E}$ положительной меры имеем, например, $u^i(t)>1$. Тогда на $\mathcal{E}$ выполняется неравенство

$$u^i(t)-u_k^i(t)\geqslant u^i(t)-1>0.$$

Обозначим через $f(t)$ характеристическую функцию множества $\mathcal{E}$: $f(t)=1$ при $t\in\mathcal{E}$, $f(t)=0$ при $t\notin\mathcal{E}$. Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T f(t)\,(u^i(t)-v_k^i(t))\,dt \geqslant \int_0^T f(t)\,(u^i(t)-1)\,dt=$$

$$=\int_{\mathcal{E}}(u^i(t)-1)\,dt>0,$$

что противоречит утверждению о слабой сходимости последовательности $v_k^i(t)$ к $u^i(t)$.

Математический институт
им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР

Поступило
26.VII.1957

ЛИТЕРАТУРА

[1] Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С., К теории оптимальных процессов, Доклады Ак. наук СССР, 110, № 1 (1956), 7—10.

[2] Фельдбаум А. А., О синтезе оптимальных систем с помощью фазового пространства, Автоматика и телемеханика, XVI, № 2 (1955), 129—149.

[3] Цянь Сюэ-Сэнь, Техническая кибернетика, М., ИЛ, 1956.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 475—490

В. С. ВЛАДИМИРОВ

ОБ УРАВНЕНИИ ПЕРЕНОСА ЧАСТИЦ

(*Представлено академиком* **Н. Н. Боголюбовым**)

Устанавливается справедливость теории Рисса — Шаудера — Радона для интегро-дифференциального уравнения переноса частиц, рассматриваемого в любом пространстве $\mathfrak{H}_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

1. Основные предположения и обозначения. В работах (1) и (2) изучалось интегро-дифференциальное уравнение переноса частиц

$$\frac{1}{a(P)}(s, \operatorname{grad} \varphi) + \varphi = \lambda \int_{\Omega} \theta(P, s, s') \varphi(s', P) \, ds' + F(s, P) \qquad (1.1)$$

в предположении, что свободный член $F(s, P)$ принадлежит функциональному пространству $\mathfrak{H}$ вещественных функций, суммируемых с квадратом на $\Omega \times G$ с весом $a(P)$. Однако в ряде задач функция F, характеризующая интенсивность источников, не принадлежит пространству $\mathfrak{H}$, обладая при этом естественным свойством интегрируемости на $\Omega \times G$ с весом $a(P)$.

В этой работе мы будем изучать уравнение (1.1) в предположении, что F принадлежит пространству $\mathfrak{H}_p$, $p \geqslant 1$, комплексных функций, p-я степень модуля которых суммируема на $\Omega \times G$ с весом $a(P)$. Норму в $\mathfrak{H}_p$ ($\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}$) введем по формуле:

$$\| F \|_p = \left\{ \int_{\Omega \times G} a(P) \, | F(s, P) |^p \, ds dP \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad F \in \mathfrak{H}_p, \quad p < \infty,$$

$$\| F \|_\infty = \sup_{(s, P) \in \Omega \times G} \operatorname{vrai} | F(s, P) |, \quad F \in \mathfrak{H}_\infty.$$

Все определения и обозначения, которые будут использованы в этой работе, подробно разъяснены в работах (1) и (2).

Мы будем изучать уравнение (1.1) при следующих предположениях.

В уравнении (1.1) Ω обозначает множество всех единичных векторов направлений s в n-мерном эвклидовом пространстве R_n; G обозначает открытое ограниченное множество в R_n. Предполагается, что почти все прямые линии, имеющие с G общую точку, пересекают G по конечному числу интервалов. Обозначая через π_s ортогональную проекцию G на плоскость, перпендикулярную направлению s, и через $\pi_{s,Q}$ — одномерное множество, получающееся от пересечения прямой

$$\{Q + \xi s, \, -\infty < \xi < \infty\}, \quad Q \in \pi_s,$$

с G, получим при каждом s разложение G на декартово произведение π_s и $\pi_{s,Q}$:

$$G = \pi_s \times \pi_{s,Q}. \tag{1.2}$$

По предположению, для почти всех точек $(s, Q) \in \Omega \times \pi_s$

$$\pi_{s,Q} = \sum_{i=1}^{N(s,Q)} \{Q + \xi s, \xi_i(s, Q) < \xi < \eta_i(s, Q)\}, \quad \eta_i \leqslant \xi_{i+1}. \tag{1.3}$$

Формула (1.2) выражает взаимно однозначное преобразование точек $P \in G$ в точки $(Q, \xi) \in \pi_s \times \pi_{s,Q}$ по формуле

$$P = Q + \xi s; \tag{1.4}$$

для функций $F(s, P)$, суммируемых на $\Omega \times G$, имеет место равенство:

$$\int_{\Omega \times G} F(s, P)\, ds dP = \int_{\Omega \times \pi_s \times \pi_{s,Q}} F(s, Q + \xi s)\, ds dQ d\xi \tag{1.5}$$

и обратно [см. ([1])]. Границу G будем обозначать через Γ, диаметр G — через d.

Коэффициент $a(P)$, входящий в уравнение (1.1), предполагаем вещественным, измеримым, почти всюду положительным и ограниченным в G, $0 < a(P) \leqslant \alpha$. Кроме того, предполагаем, что

$$\int_G \frac{1}{a(P)}\, dP < \infty. \tag{1.6}$$

Символом $(s, \operatorname{grad} \varphi)$ обозначено скалярное произведение векторов s и $\operatorname{grad} \varphi$ в R_n,

$$(s, \operatorname{grad} \varphi) \equiv \sum_{i=1}^{n} s_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(s, Q + \xi s), \tag{1.7}$$

где $|s| = 1$ и $P = Q + \xi s$.

Относительно функции $\theta(P, s, s')$, характеризующей закон рассеяния частиц, предположим, что она вещественна, измерима на $\Omega \times \Omega \times G$ и при почти всех (s, P) из $\Omega \times G$ удовлетворяет условиям:

$$\int_\Omega |\theta(P, s, s')|\, ds' \leqslant \beta \omega_n, \quad \int_\Omega |\theta(P, s', s)|\, ds' \leqslant \beta \omega_n, \tag{1.8}$$

где ω_n обозначает площадь поверхности единичной сферы в R_n. Дальнейшие предположения о функции θ будут вводиться по мере надобности.

В уравнении (1.1) λ — некоторый комплексный параметр.

2. Постановка задачи. Определим класс функций D_p, в котором будем искать решение уравнения (1.1). Множество функций D_p будет одновременно и областью задания линейного дифференциального выражения $l\varphi$, стоящего в левой части уравнения (1.1):

$$l\varphi \equiv \frac{1}{a(P)} (s, \operatorname{grad} \varphi) + \varphi. \tag{2.1}$$

К классу D_p отнесем функции φ, обладающие при почти всех $(s, Q) \in \Omega \times \pi_s$ следующими свойствами [см. (1.3)]:

1) $\varphi(s, Q + \xi s)$ абсолютно непрерывна на замкнутом множестве

$$\bar{\pi}_{s,Q} = \sum_{i=1}^{N} \{Q + \xi s,\, \xi_i \leqslant \xi \leqslant \eta_i\};$$

2) $\varphi(s, Q + \xi s)$ удовлетворяет граничным условиям:

а) $\varphi(s, Q + \xi_1 s) = 0$.

б) $\varphi(s, Q + \xi_{i+1} s) = \varphi(s, Q + \eta_i s), \quad i = 1, 2, \ldots, N-1$.

3) Функция φ такова, что $l\varphi \in \mathfrak{H}_p$.

Имеет место вложение D_p в $\mathfrak{H}_p$.

ЛЕММА I. *Если* $\varphi \in D_p$, *то* $\varphi \in \mathfrak{H}_p$, *причем имеет место неравенство*

$$\|\varphi\|_p \leqslant (1 - e^{-\alpha d}) \|l\varphi\|_p. \tag{2.2}$$

Доказательство проводится по схеме, аналогичной доказательству леммы 1.2 работы ([1]). Пусть $\varphi \in D_p$. Обозначая $l\varphi$ через F, $F \in \mathfrak{H}_p$, получим при почти всех (s, Q, ξ) из $\Omega \times \pi_s \times \pi_{s,Q}$:

$$\varphi(s, Q + \xi s) = \int_{\xi_1}^{\xi} a(Q + \xi' s) F(s, Q + \xi' s) \exp\left[-\int_{\xi'}^{\xi} a(Q + \xi'' s)\, d\xi''\right] d\xi'. \tag{2.3}$$

При этом мы считаем, что функция $a(P)$ продолжена нулем на все пространство R_n.

Докажем, что $\varphi \in \mathfrak{H}_p$. В силу (2.3) имеем:

$$I = \int_{\Omega \times \pi_{s_1}} \int_{\pi_{s,Q}} a(Q + \xi s) |\varphi(s, Q + \xi s)|^p\, d\xi\, ds\, dQ =$$

$$= \int_{\Omega \times \pi_s} \int_{\xi_1}^{\eta_N} a(Q + \xi s) \left| \int_{\xi_1}^{\xi} a(Q + \xi' s) F(s, Q + \xi' s) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \exp\left[-\int_{\xi'}^{\xi} a(Q + \xi'' s)\, d\xi''\right] d\xi' \right|^p d\xi\, ds\, dQ.$$

Применяя к внутреннему интегралу неравенство Гельдера, получим:

$$I \leqslant \int_{\Omega \times \pi s} \int_{\xi_1}^{\eta_N} a(Q + \xi s) \cdot$$

$$\cdot \left\{ \int_{\xi_1}^{\xi} a(Q + \xi' s) |F(s, Q + \xi' s)|^p \exp\left[-\int_{\xi'}^{\xi} a(Q + \xi'' s)\, d\xi''\right] d\xi' \right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \int_{\xi_1}^{\xi} a(Q + \xi' s) \exp\left[-\int_{\xi'}^{\xi} a(Q + \xi'' s)\, d\xi''\right] d\xi' \right\}^{p-1} d\xi\, ds\, dQ \leqslant$$

$$\leqslant (1 - e^{-\alpha d})^{p-1} \int\limits_{\Omega \times \pi_s} \int\limits_{\xi_1}^{\eta_N} a(Q + \xi s) \left\{ \int\limits_{\xi_1}^{\xi} a(Q + \xi' s) \, | F(s, Q + \xi' s) |^p \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \exp\left[- \int\limits_{\xi'}^{\xi} a(Q + \xi'' s) \, d\xi'' \right] d\xi' \right\} d\xi ds dQ \leqslant$$

$$\leqslant (1 - e^{-\alpha d})^p \int\limits_{\Omega \times \pi_s} \int\limits_{\xi_1}^{\eta_N} a(Q + \xi s) \, | F(s, Q + \xi s) |^p \, d\xi ds dQ =$$

$$= (1 - e^{-\alpha d})^p \int\limits_{\Omega \times \pi_s \times \pi_{s,Q}} a(Q + \xi s) \, | F(s, Q + \xi s) |^p \, d\xi ds dQ =$$

$$= (1 - e^{-\alpha d})^p \int\limits_{\Omega \times G} a(P) \, | F(s, P) |^p \, ds dP = (1 - e^{-\alpha d})^p \, \| F \|_p^p.$$

Мы воспользовались здесь неравенствами (1.11) работы ([1]), а также равенством (1.5).

Таким образом, доказано существование повторного интеграла от измеримой неотрицательной функции

$$a(Q + \xi s) \, | \varphi(s, Q + \xi s) |^p.$$

Из теоремы Фубини и из (1.5) следует, что функция $a(P) \, | \varphi(s, P) |^p$ суммируема на $\Omega \times G$ и

$$\| \varphi \|_p^p = \int\limits_{\Omega \times G} a(P) \, | \varphi(s, P) |^p \, ds dP =$$

$$= \int\limits_{\Omega \times \pi_s \times \pi_{s,Q}} a(Q + \xi s) \, | \varphi(s, Q + \xi s) |^p \, ds dQ d\xi = I \leqslant (1 - e^{-\alpha d})^p \, \| F \|_p^p.$$

Лемма доказана.

Множество функций D_p линейно и содержится в $\mathfrak{H}_p$. Из условий 1)—3), а также из (1.6) следует, что D_p плотно в $\mathfrak{H}_p$. Линейное дифференциальное выражение $l\varphi$ вместе с областью его задания D_p определяет линейный оператор L, действующий в пространстве $\mathfrak{H}_p$.

Обозначим через S оператор, стоящий в правой части уравнения (1.1):

$$SF = \int\limits_{\Omega} \theta(P, s, s') \, F(s', P) \, ds'. \tag{2.4}$$

При помощи введенных операторов L и S запишем уравнение (1.1) в форме:

$$L\varphi = \lambda S \varphi + F, \quad \varphi \in D_p. \tag{2.5}$$

Поставим задачу: найти функцию φ из D_p, удовлетворяющую уравнению (1.1) почти всюду в $\Omega \times G$.

Подробности по поводу постановки задачи для уравнения (1.1) при $p = 2$, а также свойства решений уравнения (1.1) можно найти в работах ([1]) и ([2]).

Цель настоящей работы состоит в установлении справедливости теории Рисса — Шаудера — Радона для задачи (2.5) при любом p, $p \geqslant 1$.

3. Свойства операторов L и S.

ЛЕММА II. *При любом $F \in \mathfrak{H}_p$ существует единственное решение φ из D_p уравнения $L\varphi = F$, которое при почти всех $(s, P) \in \Omega \times G$ дается формулой:*

$$\varphi(s, P) = L^{-1} F = \int_0^d a(P - \xi s) F(s, Q - \xi s) \exp\left[-\int_0^{\xi} a(P - \xi' s) d\xi'\right] d\xi. \quad (3.1)$$

Оператор L^{-1} ограничен в $\mathfrak{H}_p$, причем

$$\| L^{-1} \|_p \leqslant 1 - e^{-\alpha d}. \quad (3.2)$$

Доказательство. Лемма II является следствием леммы I. Из (2.2) следует, что уравнение $L\varphi = 0$ имеет в D_p только тривиальное решение $\varphi = 0$. Следовательно, оператор L^{-1} существует. Из (2.2) следует оценка (3.2). Формула (3.1) следует из (2.3) и (1.4). Лемма доказана.

Пусть $\varphi \in \mathfrak{H}_p$ и $\psi \in \mathfrak{H}_{p'}$ *. Обозначим

$$(\varphi, \psi) = \int_{\Omega \times G} a(P) \varphi(s, P) \overline{\psi(s, P)} \, ds dP.$$

Определим оператор L^*, сопряженный с L, при помощи соотношения

$$(L\varphi, \psi) = (\varphi, L^*\psi), \quad (3.3)$$

справедливого для всех φ из D_p и для ψ из области определения оператора L^* **.

Обозначим через U оператор

$$UF(s, P) = F(-s, P),$$

действующий в любом $\mathfrak{H}_p$, $p \geqslant 1$. Очевидно, что

$$U = U^{-1}, \quad \| U \|_p = 1, \quad U^* = U \text{ ***}. \quad (3.4)$$

ЛЕММА III. *Существует оператор L^*, сопряженный с L, причем*

$$L^* = ULU. \quad (3.5)$$

Область определения оператора L^* есть $UD_{p'}$.

---

* Здесь и в дальнейшем p' обозначает число, сопряженное с p,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \qquad p' = \frac{p}{p-1}.$$

** Ввиду нерефлективности пространства $\mathfrak{H}_1$ формула (3.3) определяет при $p = \infty$ некоторое сужение сопряженного оператора.

*** U^* действует в $\mathfrak{H}_{p'}$.

Доказательство. Область определения оператора L, D_p, плотна в $\mathfrak{H}_p$. Поэтому существует оператор L^*, сопряженный с L.

Докажем сначала, что формула

$$(L\varphi, \psi) = (\varphi, ULU\psi) \tag{3.6}$$

справедлива для всех φ из D_p и ψ из $UD_{p'}$. Для этого достаточно установить, что

$$(L\varphi, U\psi) = (U\varphi L\psi), \quad \varphi \in D_p, \quad \psi \in D_{p'}.$$

Действительно, принимая во внимание (1.3), (1.5) и (2.1), а также условия 1)—3), получим, как и при доказательстве леммы 2.2 работы ([1]):

$$(L\varphi, U\psi) = \int\limits_{\Omega\times G} [(s, \operatorname{grad}\varphi) + a(P)\varphi]\, \overline{\psi(-s, P)}\, ds dP =$$

$$= \int\limits_{\Omega\times\pi_s} \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\xi_i}^{\eta_i} \frac{\partial}{\partial\xi}\varphi(s, Q+\xi s)\, \overline{\psi(-s, Q+\xi s)}\, d\xi ds dQ +$$

$$+ \int\limits_{\Omega\times G} a(P)\varphi(-s, P)\overline{\psi(s, P)}\, ds dP =$$

$$= -\int\limits_{\Omega\times\pi_s} \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\xi_i}^{\eta_i} \varphi(s, Q+\xi s)\frac{\partial}{\partial\xi}\overline{\psi(-s, Q+\xi s)}\, d\xi ds dQ + (U\varphi, \psi) =$$

$$= \int\limits_{\Omega\times\pi_s} \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\xi_i}^{\eta_i} \varphi(-s, Q+\xi s)\frac{\partial}{\partial\xi}\overline{\psi(s, Q+\xi s)}\, d\xi ds dQ + (U\varphi, \psi) =$$

$$= \int\limits_{\Omega\times G} \overline{[(s, \operatorname{grad}\psi) + a(P)\psi]}\,\varphi(-s, P)\, ds dP = (U\varphi, L\psi).$$

Пусть теперь для некоторой функции ψ из $\mathfrak{H}_{p'}$ нашлась такая функция $\psi_1 = L^*\psi$ из $\mathfrak{H}_{p'}$, что при всех φ из D_p имеет место равенство:

$$(L\varphi, \psi) = (\varphi, \psi_1). \tag{3.7}$$

В силу леммы II, функция $\psi_0 = UL^{-1}U\psi_1$ принадлежит $UD_{p'}$. По доказанной формуле (3.6), имеем:

$$(L\varphi, \psi_0) = (\varphi, ULU\psi_0) = (\varphi, \psi_1).$$

Отсюда и из (3.7) следует, что

$$(L\varphi, \psi_0 - \psi) = 0, \quad \varphi \in D_p.$$

Но по лемме II, область значений оператора L совпадает с $\mathfrak{H}_p$. Поэтому

$$\psi_0 = \psi, \quad \psi_1 = ULU\psi = L^*\psi.$$

Лемма доказана.

Изучим теперь свойства оператора S, определенного формулой (2.4).

ЛЕММА IV. *Оператор S действует в любом $\mathfrak{H}_p$, $p \geqslant 1$, ограничен, причем*

$$\| S \|_p \leqslant \beta \omega_n. \tag{3.8}$$

Доказательство. Пусть $F \in \mathfrak{H}_p$. В силу свойств функции $\theta(P, s, s')$ и в силу теоремы Фубини, интеграл (2.4) существует при почти всех (s, P) и является измеримой функцией на $\Omega \times G$.

Докажем, что $SF \in \mathfrak{H}_p$. Принимая во внимание (1.8), получим из (2.4) с помощью неравенства Гельдера:

$$\| SF \|_p^p = \int\limits_{\Omega \times G} a(P) \, | SF |^p \, ds dP \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega \times G} a(P) \left[\int\limits_{\Omega} | \theta(P, s, s') | \, | F(s', P) | \, ds' \right]^p ds dP \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega \times G} a(P) \left[\int\limits_{\Omega} | \theta(P, s, s') | \, ds' \right]^{p-1} \cdot$$

$$\cdot \left[\int\limits_{\Omega} | \theta(P, s, s') | \, | F(s', P) |^p \, ds' \right] ds dP \leqslant \beta^p \omega_n^p \| F \|_p^p.$$

Лемма доказана.

Из (3.2) и (3.8) следует, что оператор $L^{-1}S$ ограничен в $\mathfrak{H}_p$, причем

$$\| L^{-1} S \|_p \leqslant \beta \omega_n (1 - e^{-\alpha d}). \tag{3.9}$$

Отсюда следует

ТЕОРЕМА I. *При условии*

$$| \lambda | \beta \omega_n (1 - e^{-\alpha d}) < 1 \tag{3.10}$$

существует единственное решение φ задачи (2.5) *при любом F из $\mathfrak{H}_p$, $p \geqslant 1$. Это решение удовлетворяет неравенству*

$$\| \varphi \|_p \leqslant \frac{1 - e^{-\alpha d}}{1 - | \lambda | \beta \omega_n (1 - e^{-\alpha d})} \| F \|_p. \tag{3.11}$$

Доказательство. В силу леммы II, задача (2.5) эквивалентна уравнению

$$\varphi = \lambda L^{-1} S \varphi + L^{-1} F. \tag{3.12}$$

Из (3.9) и (3.10) следует, что уравнение (3.12) имеет единственное решение φ такое, что

$$\| \varphi \|_p \leqslant \frac{\| L^{-1} F \|_p}{1 - | \lambda | \beta \omega_n (1 - e^{-\alpha d})}.$$

Для получения неравенства (3.11) достаточно применить неравенство (3.2).

4. Свойства оператора $L^{-1}S$. Для того чтобы выйти за пределы круга (3.10), подчиним функцию θ следующему условию: она является суммой конечного числа слагаемых вида $b(P)\,\theta[(s, s')]$ *:

$$\theta(P, s, s') = \theta(P, \mu) = \sum b(P)\,\theta(\mu), \quad \mu = (s, s'), \tag{4.1}$$

* Этому условию удовлетворяет большинство практически важных законов рассеяния.

где функции $b(P)$ измеримы и почти всюду ограничены на G, а функции $\theta(\mu)$ интегрируемы на промежутке $(-1,1)$.

При этих условиях имеют место очевидные формулы:

$$USU = S, \quad S^* = S. \tag{4.2}$$

Оказывается, что квадрат оператора $L^{-1}S$ вполне непрерывен в $\mathfrak{H}_p$. Более того, имеет место

ЛЕММА V. *Оператор $SL^{-1}S$ вполне непрерывен в пространстве $\mathfrak{H}_p$.*

Доказательство. Из (2.4) и (3.1) при любом F из $\mathfrak{H}_p$ имеем:

$$L^{-1}SF = \int_0^d \int_\Omega a(P - \xi s) \cdot$$

$$\cdot \exp\left[-\int_0^\xi a(P - \xi' s)\, d\xi'\right] \theta[P - \xi s, (s, s')]\, F(s', P - \xi s)\, ds' d\xi, \tag{4.3}$$

$$SL^{-1}SF = \int_\Omega \int_0^d \int_\Omega a(P - \xi s') \exp\left[-\int_0^\xi a(P - \xi' s')\, d\xi'\right] \theta[P, (s, s')] \cdot$$

$$\cdot\, \theta[P - \xi s', (s', s'')]\, F(s'', P - \xi s')\, ds'' d\xi ds'. \tag{4.4}$$

Повторный интеграл в (4.4) существует при почти всех $(s, P) \in \Omega \times G$. В силу теоремы Фубини, этот интеграл можно рассматривать как кратный по области $\Omega \times \Omega \times (0, d)$. Вводя в (4.4) новые переменные интегрирования P' и t по формулам

$$P' = P - \xi s', \quad d\xi ds' = |P - P'|^{-n+1}\, dP', \quad t = 1 - \frac{\xi}{|P - P'|},$$

получим:

$$SL^{-1}SF = \int_{\Omega \times G} a(P') \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{-|P - P'|\int_0^1 a[tP + (1-t)P']\, dt\right\} \theta\left[P, \left(s, \frac{P - P'}{|P - P'|}\right)\right] \cdot$$

$$\cdot\, \theta\left[P', \left(s', \frac{P - P'}{|P - P'|}\right)\right] F(s', P')\, |P - P'|^{-n+1} ds' dP'. \tag{4.5}$$

Обозначая

$$K(s, P; s', P') = \theta\left[P, \left(s, \frac{P - P'}{|P - P'|}\right)\right] \theta\left[P', \left(s', \frac{P - P'}{|P - P'|}\right)\right] K(P, P'),$$

$$\tag{4.6}$$

$$K(P, P') = \exp\left\{-|P - P'|\int_0^1 a[tP + (1-t)P']\, dt\right\} |P - P'|^{-n+1},$$

запишем (4.5) в виде:

$$SL^{-1}SF = \int_{\Omega \times G} a(P')\, K(s, P; s', P')\, F(s', P')\, ds' dP'. \tag{4.7}$$

Таким образом, оператор $SL^{-1}S$ является интегральным с ядром $K(s, P; s', P')$ по весу $a(P')$.

В силу (4.1), для доказательства леммы достаточно установить полную непрерывность оператора $SL^{-1}S$ при условии, что функция $\theta(P, \mu)$ имеет вид $b(P)\theta(\mu)$.

По условию, $\theta(\mu)$ принадлежит L (—1,1). Поэтому существует последовательность ограниченных функций $\theta_k(\mu)$ такая, что

$$\varepsilon_k = \int_{-1}^{1} |\theta(\mu) - \theta_k(\mu)| \, d\mu \to 0 \text{ при } k \to \infty. \tag{4.8}$$

Операторы S и ядра K, соответствующие функциям $b(P)\theta_k(\mu)$, будем обозначать индексом $k: S_k$ и K_k.

Докажем, что операторы $S_k L^{-1} S_k$ вполне непрерывны в пространстве $\mathfrak{H}_p$. Для этого используем теорему о полной непрерывности интегральных операторов [см., например ([3]), теорема 3] *. Из (4.6) следует, что при $\rho < \frac{n}{n-1}$ интегралы

$$\int\limits_{\Omega \times G} a(P') \, |K_k(s, P; s', P')|^{\rho} \, ds' dP', \qquad \int\limits_{\Omega \times G} a(P') \, |K_k(s, P; s', P')|^{\rho} ds dP$$

равномерно (почти всюду в $\Omega \times G$) ограничены. Поэтому операторы $S_k L^{-1} S_k$ являются вполне непрерывными в любом $\mathfrak{H}_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Докажем, что оператор $SL^{-1}S$ может быть аппроксимирован сколь угодно точно по норме в $\mathfrak{H}_p$ вполне непрерывными операторами $S_k L^{-1} S_k$. Отсюда и будет следовать полная непрерывность оператора $SL^{-1}S$.

Принимая во внимание (3.2) и (3.8), получим:

$$\| SL^{-1}S - S_k L^{-1} S_k \|_p \leqslant \| (S - S_k) L^{-1} S \|_p + \| SL^{-1} (S - S_k) \|_p +$$
$$+ \| (S - S_k) L^{-1} (S - S_k) \|_p \leqslant (1 - e^{-\varkappa d}) (2\beta\omega_n + \| S - S_k \|_p) \| S - S_k \|_p.$$

Но в силу (1.8) и (4.8) имеем:

$$\| S - S_k \|_p \leqslant \sup_{(s, P)} b(P) \int_{\Omega} | \theta[(s, s')] -$$
$$- \theta_k[(s, s')] | \, ds' \leqslant C \int_{-1}^{1} | \theta(\mu) - \theta_k(\mu) | \, d\mu = C\varepsilon_k. \tag{4.9}$$

Поэтому

$$\| SL^{-1}S - S_k L^{-1} S_k \|_p \leqslant C_1 \varepsilon_k \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Лемма доказана.

Интересно было бы выяснить, будет ли сам оператор $L^{-1}S$ вполне непрерывным ** в $\mathfrak{H}_p$? Во всяком случае имеет место

* Нетрудно убедиться, что в этой теореме условие $s > t$ можно заменить на более слабое условие $s \geqslant t$.

** Нетрудно видеть [см. ([1]), стр. 44—45], что при $n = 1$ соответствующий оператор $L^{-1}S$ вполне непрерывен в любом $\mathfrak{H}_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

ЛЕММА VI. *Оператор $L^{-1}S$ вполне непрерывен в $\mathfrak{H}_p$, если*

$$\frac{3}{2}<p\leqslant 2 \text{ при } n=2 \text{ и } \frac{2n}{n+1}<p\leqslant 2 \text{ при } n>2. \quad (4.10)$$

Доказательство. При $p=2$ справедливость леммы установлена в лемме 3.2 работы (²). Поэтому для доказательства леммы достаточно установить полную непрерывность оператора $(L^{-1}S)^*$ в $\mathfrak{H}_p$, если

$$2<p<3 \text{ при } n=2 \text{ и } 2<p<\frac{2n}{n-1} \text{ при } n>2. \quad (4.11)$$

В силу (3.5) и (4.2) имеем:

$$(L^{-1}S)^* = S^*(L^{-1})^* = SUL^{-1}U = USL^{-1}U. \quad (4.12)$$

Пусть S_k, $k=1,2,\ldots$, — последовательность операторов, построенная при доказательстве леммы V. Тогда, в силу (3.2), (3.4), (4.9) и (4.12), имеем:

$$\|(L^{-1}S)^* - (L^{-1}S_k)^*\|_p = \|USL^{-1}U - US_kL^{-1}U\|_p \leqslant C\varepsilon_k \to 0 \text{ при } k\to\infty.$$

Фиксируем любое k и докажем, что оператор $(L^{-1}S_k)^*$ вполне непрерывен в $\mathfrak{H}_p$, если p удовлетворяет условиям (4.11). При доказательстве мы будем следовать методам и результатам, изложенным в работе (¹) (гл. 1, § 4).

Заметим предварительно, что из доказательства леммы 3.2 работы (²) следует, что оператор [см. (4.12)]

$$(L^{-1}S_k)^* L^{-1}S_k = US_kL^{-1}UL^{-1}S_k$$

— интегральный с ядром T_k, удовлетворяющим неравенству

$$|T_k(s,P;s',P')| < l_k|P-P'|^{-n+1}.$$

Отсюда и из теоремы 1 работы (³) следует, что оператор $(L^{-1}S_{-k})^* L^{-1}S_{-k}$ ограничен и действует из $\mathfrak{H}_p$ в $\mathfrak{H}_q$, где

$$q=\frac{p+1}{3-p} \text{ при } n=2 \text{ и } q=\frac{pn}{n-p}-\eta \text{ при } n>2; \quad (4.13)$$

η — достаточно малое положительное число.

Пусть M — множество, ограниченное в $\mathfrak{H}_p$. Из неравенства Гельдера следует, что множество M ограничено в $\mathfrak{H}_2$. Пусть $F\in M$. Обозначим через $(\Omega\times G)_i$, $i=1,2,\ldots$, множество тех $(s,P)\in\Omega\times G$, в которых

$$2^{i-1}<|(L^{-1}S_k)^*F|\leqslant 2^i,\quad i=1,2,\ldots. \quad (4.14)$$

Пусть i — фиксированное число. Введем функцию $h(s,P)$ равенством

$$h(s,P)=\begin{cases}\operatorname{sign}(L^{-1}S_k)^*F, & \text{если } (s,P)\in(\Omega\times G)_i,\\ 0, & \text{если } (s,P)\,\overline{\in}\,(\Omega\times G)_i.\end{cases}$$

Тогда отсюда, а также из (4.14) будем иметь:

$$2^{i-1}\operatorname{mes}(\Omega\times G)_i \leqslant ((L^{-1}S_k)^* F,\ h) = (F,\ L^{-1}S_k h) \leqslant \|F\|_2 \|L^{-1}S_k h\|_2 \leqslant$$
$$\leqslant C_1 (L^{-1}S_k h,\ L^{-1}S_k h)^{\frac{1}{2}} = C_1 (h,\ (L^{-1}S_k)^* L^{-1}S_k h)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \|h\|_{q'}^{\frac{1}{2}} \|(L^{-1}S_k)^* L^{-1}S_k h\|_q^{\frac{1}{2}} \leqslant C_2 \|h\|_{q'}^{\frac{1}{2}} \|h\|_p^{\frac{1}{2}} = C_2 [\operatorname{mes}(\Omega\times G)_i]^{\frac{1}{2q'}+\frac{1}{2p}},$$

или

$$\operatorname{mes}(\Omega\times G)_i \leqslant C_3 2^{-\frac{2ipq}{pq+p-q}}. \tag{4.15}$$

Возьмем $\varepsilon > 0$. Выберем целое число i_0 так, чтобы

$$\sum_{i=i_0+1}^{\infty} 2^{-2ip\left(\frac{q}{pq+p-q}-\frac{1}{2}\right)} < \varepsilon. \tag{4.16}$$

В силу (4.11) и (4.13), такой выбор сделать можно (при достаточно малом η). Пусть

$$\delta < \varepsilon 2^{-i_0 p}. \tag{4.17}$$

Тогда для любого множества $B \subset \Omega\times G$, $\operatorname{mes} B < \delta$, в силу (4.14)—(4.17) имеем:

$$\int_B |(L^{-1}S_k)^* F|^p\, ds\, dP \leqslant \int_B 2^{i_0 p}\, ds\, dP + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \int_{(\Omega\times G)i} |(L^{-1}S_k)^* F|^p\, ds\, dP \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon + c_3 \sum_{i=i_0+1}^{\infty} 2^{-2ip\left(\frac{q}{pq+p-q}-\frac{1}{2}\right)} < C_4\varepsilon.$$

Таким образом, функции

$$|(L^{-1}S_k)^* F|^p, \quad F \in M,$$

имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы. Но оператор $(L^{-1}S_k)^*$ вполне непрерывен в $\mathfrak{H}_2$. По лемме 4.1 работы [4] множество функций

$$(L^{-1}S_k)^* F, \quad F \in M \subset \mathfrak{H}_p,$$

компактно в $\mathfrak{H}_p$. Поэтому оператор $(L^{-1}S_k)^*$ вполне непрерывен в $\mathfrak{H}_p$. Следовательно, оператор $(L^{-1}S)^*$ также вполне непрерывен в $\mathfrak{H}_p$. Лемма доказана.

5. Рассмотрим однородную задачу, соответствующую задаче (2.5):

$$L\varphi_0 = \lambda_0 S\varphi_0, \quad \varphi_0 \in D_p. \tag{5.1}$$

Назовем собственным значением λ_0 уравнения (5.1) то комплексное значение параметра λ, при котором это уравнение имеет ненулевое решение φ_0 из D_p — собственную функцию, соответствующую собственному значению λ_0.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА II. *Множество собственных значений $\{\lambda_0\}$ не более чем счетно (может быть пусто) и не имеет точек сгущения на конечном*

расстоянии; собственные значения вещественны и удовлетворяют неравенству

$$|\lambda_0|\beta\omega_n(1-e^{-\alpha d})\geqslant 1. \qquad (5.2)$$

Каждому собственному значению соответствует конечное число линейно независимых собственных функций; все собственные функции вещественны и принадлежат пространству $\mathfrak{H}_\infty$.

При $\lambda\neq\lambda_0$ существует ограниченный в $\mathfrak{H}_p$ оператор $(L-\lambda S)^{-1}$, т. е. задача (2.5) имеет единственное решение при любом F из $\mathfrak{H}_p$.

Для того чтобы задача (2.5) имела решение при $\lambda=\lambda_0$, необходимо и достаточно, чтобы для всякой собственной функции φ_0, соответствующей собственному значению λ_0, имело место равенство

$$(F,\ U\varphi_0)=0. \qquad (5.3)$$

Наконец, в достаточно малой окрестности собственного значения λ_0 оператор $(L-\lambda S)^{-1}$ представляется в виде ряда:

$$(L-\lambda S)^{-1}=L^{-1}+\lambda\Big[\frac{\Gamma_{-m}}{(\lambda-\lambda_0)^m}+$$
$$+\frac{\Gamma_{-m+1}}{(\lambda-\lambda_0)^{m-1}}+\ldots+\frac{\Gamma_{-1}}{\lambda-\lambda_0}+\Gamma_0+\Gamma_1(\lambda-\lambda_0)+\ldots\Big], \qquad (5.4)$$

сходящегося по норме операторов в $\mathfrak{H}_p$; операторы Γ_k, $k=-m, -m+1,\ldots, -1, 0, 1,\ldots$ действуют в любом $\mathfrak{H}_p$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, причем операторы с отрицательными индексами конечномерны.

Доказательство. В силу леммы II, задачи (2.5) и (5.1) соответственно эквивалентны уравнениям:

$$\varphi=\lambda L^{-1}S\varphi+L^{-1}F, \qquad (5.5)$$
$$\varphi_0=\lambda_0 L^{-1}S\varphi_0,\quad \varphi_0\in\mathfrak{H}_p. \qquad (5.6)$$

В силу (4.12), уравнение, сопряженное с (5.6), имеет вид:

$$v_0=\bar\lambda_0 SUL^{-1}Uv_0,\quad v_0\in\mathfrak{H}_p. \qquad (5.6^*)$$

По лемме V, оператор $(L^{-1}S)^2$ вполне непрерывен в $\mathfrak{H}_p$. Поэтому радиус Фредгольма оператора $L^{-1}S$ равен $+\infty$ [см. ([5])]. Следовательно, как показал Радон ([6]) [см. также ([5])], для уравнения (5.5) (и сопряженного с ним) имеет место теория Рисса — Шаудера. Сформулируем интересующие нас положения этой теории в применении к уравнению (5.5): множество собственных значений $\{\lambda_0\}$ не более чем счетно и не имеет точек сгущения на конечном расстоянии; каждому собственному значению принадлежит конечное число линейно независимых собственных функций; при $\lambda\neq\lambda_0$ существует ограниченный в $\mathfrak{H}_p$ оператор $(I-\lambda L^{-1}S)^{-1}$, где I — тождественный оператор в пространстве $\mathfrak{H}_p$; для того чтобы уравнение (5.5) при $\lambda=\lambda_0$ имело решение, необходимо и достаточно, чтобы для всякой собственной функции v_0 уравнения (5.6*), соответствующей собственному значению $\bar\lambda_0$, имело место равенство

$$(L^{-1}F,\ v_0)=0;\ * \qquad (5.7)$$

* При $p=\infty$ условия (5.7) только необходимы (см. примечание ** на стр. 479).

в достаточно малой окрестности собственного значения λ_0 оператор $(I-\lambda L^{-1}S)^{-1}$ представляется в виде ряда:

$$(I-\lambda L^{-1}S)^{-1} = I+\lambda\left[\frac{C_{-m}}{(\lambda-\lambda_0)^m}+\frac{C_{-m+1}}{(\lambda-\lambda_0)^{m-1}}+\ldots+\frac{C_1}{\lambda-\lambda_0}+ \right.$$
$$\left. +C_0+C_1(\lambda-\lambda_0)+\ldots\right], \qquad (5.8)$$

сходящегося по норме операторов в $\mathfrak{H}_p$; операторы C_{-k}, $k=1, 2, \ldots, m$, — конечномерные.

Из теоремы I следует, что собственные числа λ_0 удовлетворяют неравенству (5.2).

В силу (3.5) и (4.2), оператор US симметризует слева $L^{-1}S$:

$$(USL^{-1}S)^* = S^*(L^{-1})^*S^*U^* = SUL^{-1}USU = USL^{-1}S. \qquad (5.9)$$

Поэтому все собственные значения λ_0 и собственные функции φ_0 вещественны.

Докажем теперь, что все собственные функции уравнения (5.6*) принадлежат пространству $\mathfrak{H}_\infty$. Пусть $v_0^{(k)}$, $k=1, 2, \ldots, \rho$,—все линейно независимые собственные функции из $\mathfrak{H}_1$ уравнения (5.6*), принадлежащие собственному значению λ_0. Пусть среди них функции $v_0^{(k)}$, $k=1, 2, \ldots, \rho_1$, $\rho_1<\rho$, принадлежат $\mathfrak{H}_\infty$, а остальные — не принадлежат пространству $\mathfrak{H}_\infty$. Согласно теории Рисса — Шаудера, необходимыми условиями разрешимости в $\mathfrak{H}_\infty$ уравнения

$$\varphi=\lambda_0 L^{-1}S\varphi+F_1, \quad F_1\in\mathfrak{H}_\infty, \qquad (5.10)$$

являются равенства:

$$(F_1, v_0^{(k)})=0, \quad k=1, 2, \ldots, \rho. \qquad (5.11)$$

С другой стороны, $F_1\in\mathfrak{H}_1$. Поэтому необходимыми и достаточными условиями разрешимости уравнения (5.10) в $\mathfrak{H}_1$ являются равенства:

$$(F_1, v_0^{(k)})=0, \quad k=1, 2, \ldots, \rho_1,$$

возможные, в силу (5.11), только при $\rho=\rho_1$.

Докажем формулу:

$$v_0^{(k)}=US\varphi_0^{(k)}, \quad k=1, 2, \ldots, \rho, \qquad (5.12)$$

связывающую все линейно независимые собственные функции уравнений (5.6) и (5.6*), принадлежащие собственному значению λ_0. Действительно, принимая во внимание (4.2), из (5.1), получим:

$$US\varphi_0=\lambda_0 USL^{-1}S\varphi_0=\lambda_0 SUL^{-1}UUS\varphi_0.$$

Отсюда и из доказанного следует, что $US\varphi_0\in\mathfrak{H}_\infty$ и имеет место равенство (5.12). Докажем, что формула (5.12) дает все линейно назависимые собственные функции. Действительно, из (5.6) следует, что $S\varphi_0^{(k)}\neq 0$ (почти всюду). Далее, из тех же соображений следует, что функции $US\varphi_0^{(k)}$ линейно независимы, коль скоро сами функции $\varphi_0^{(k)}$ линейно независимы. Наконец, число линейно независимых решений уравнений (5.6) и (5.6*) одинаково.

Из леммы II, формулы (5.12) и уравнения (5.6) следует, что собственные функции φ_0 принадлежат $\mathfrak{H}_\infty$.

Пользуясь (5.12), перепишем условия (5.7) в виде $(L^{-1}F,\ US\varphi_0)=0$ или, в силу (3.5) и (5.6),

$$(L^{-1}F,\ US\varphi_0)=(F,\ UL^{-1}ULUS\varphi_0)=\frac{1}{\lambda_0}(F,\ U\varphi_0)=0,$$

что совпадает с (5.3).

Наконец, вернемся к разложению (5.8). Мы показали, что собственные функции φ_0 и собственные числа λ_0 не зависят от p (поэтому достаточно рассмотреть уравнение (5.6) в пространстве $\mathfrak{H}_\infty$). Левая часть равенства в (5.8) не зависит от p и действует в любом $\mathfrak{H}_p$; следовательно, операторы C_k, $k=-m,\ -m+1,\ldots,-1,\ 0,\ 1,\ldots,$ не зависят от p и действуют в любом $\mathfrak{H}_p$. Разложение (5.4) следует из (5.8) и из соотношения

$$(L-\lambda S)^{-1}=(I-\lambda L^{-1}S)^{-1}L^{-1},$$

причем в (5.4) положено $\Gamma_k=C_kL^{-1}$.

Теорема полностью доказана.

Замечание. Функции $U\varphi_0$, фигурирующие в (5.3), являются собственными функциями однородного уравнения, сопряженного с уравнением (5.1):

$$ULU\psi_0=\lambda_0 S\psi_0,\quad \psi_0\in UD_\infty.$$

Согласно теореме II, все собственные функции уравнения (5.1) принадлежат пространству $\mathfrak{H}_\infty$. Поэтому для решения однородной задачи (5.1) в любом $\mathfrak{H}_p$ достаточно ограничиться одним из p, например $p=2$. Согласно лемме VI, оператор $L^{-1}S$ вполне непрерывен в $\mathfrak{H}_2$.

Пользуясь этим замечанием, укажем два случая, когда собственные значения заведомо существуют:

1) Если функция $\theta(P,\ \mu)>0$ почти всюду в $G\times(-1,\ 1)$, то уравнение (5.1) имеет, по крайней мере, одно собственное значение; при этом наименьшее (по модулю) собственное значение — положительное и простое, а соответствующая ему собственная функция положительна почти всюду в $\Omega\times G$.

Этот результат следует из теоремы Ентча, обобщенной в статье М. Г. Крейна и М. А. Рутмана [7] на вполне непрерывные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха. Возможность применения результатов работы [7] (стр. 58—60) обеспечивается условием $\theta>0$, согласно которому ядро интегрального оператора $(L^{-1}S)^2$ положительно (см. доказательство леммы V).

2) Если функция $\theta(P,\ \mu)\neq 0$ почти всюду в $G\times(-1,\ 1)$ и такова, что при любом F из $\mathfrak{H}_2$ имеет место неравенство

$$(USF,\ F)\geqslant 0\,^*, \tag{5.13}$$

---

* В силу теоремы Функа — Хэкке [см. [8], гл. IX], условие (5.13) будет обеспечено, если при почти всех P из G выполнены неравенства $(n\geqslant 2)$:

$$\int_{-1}^{1}\theta(P,-\mu)\,C_k^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(\mu)\,(1-\mu^2)^{\frac{n-3}{2}}\,d\mu\geqslant 0,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ldots,$$

где $C_k^{\frac{n}{2}}(\mu)$ — полиномы Гегенбауэра. Эта теорема доказана для суммируемых с квадратом ядер $\theta(\mu)$. Можно доказать, однако, теорему Функа — Хэкке и для просто суммируемых ядер.

то уравнение (5.1) имеет, по крайней мере, одно собственное значение; обозначим собственные значения через λ_k, $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots$; соответствующие им собственные функции φ_k удовлетворяют условию

$$(US\varphi_k,\ \varphi_i) = \delta_{ki};$$

множество собственных значений обладает следующим экстремальным свойством: на множестве функций F из $\mathfrak{H}_2$, удовлетворяющих условиям

$$(USF,\ F) = 1, \quad (US\varphi_i,\ F) = 0, \quad i = 1,\ 2, \ldots, k-1,$$

абсолютное значение функционала $(L^{-1}SF,\ USF)$ достигает на функции $F = \varphi_k$ максимума, равного $\frac{1}{|\lambda_k|}$, $k = 1,\ 2, \ldots$; для любой функции F из $\mathfrak{H}_2$ имеет место равенство

$$USL^{-1}SF = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(F,\ US\varphi_k)}{\lambda_k} US\varphi_k, \tag{5.14}$$

причем ряд сходится по норме в $\mathfrak{H}_2$; оператор $(L - \lambda S)^{-1}$ имеет простые полюсы, т. е. в формуле (5.4) $m = 1$.

Эти утверждения следуют из результатов Рида ([9]) и Д. Ф. Харазова ([10]) о симметризуемых вполне непрерывных операторах. Действительно, из (5.9) следует, что неотрицательный оператор US симметризует оператор $L^{-1}S$ слева; из условия $\theta \neq 0$ и из (4.6) следует, что $USL^{-1}S \neq 0$; наконец,

$$(US\varphi_k,\ \varphi_k) > 0, \quad k = 1,\ 2, \ldots,$$

ибо $S\varphi_k \neq 0$ почти всюду, а тогда с помощью неравенства Рида [см. ([9]), § 2] получаем:

$$0 < \| S\varphi_k \|_2 = (\varphi_k,\ USUS\varphi_k) \leqslant \| US \|_2 (\varphi_k,\ US\varphi_k).$$

Если, в частности, функция θ четна по μ,

$$\theta(P,\ \mu) = \theta(P, -\mu)\ ^*,$$

то собственные значения λ_k оказываются положительными, а система функций $\{S\varphi_k\}$ полна в области значений оператора S [см. ([2]), теорема 1]. Дальнейшие результаты, касающиеся этого случая, изложены в работе ([2]).

Автор благодарит Н. Н. Боголюбова за обсуждение результатов этой работы.

Математический институт
им. В. А. Стеклова Академии
наук СССР

Поступило
12. IX. 1957

ЛИТЕРАТУРА

1 Владимиров В. С., Об одном интегро-дифференциальном уравнении, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 21 (1957), 3—52.

2 Владимиров В. С., Об интегро-дифференциальном уравнении переноса частиц, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 21 (1957), 681—710.

3 Канторович Л. В., Об интегральных операторах, Успехи матем. наук, XI, № 2 (1956), 3—29.

* Это значит, что $US = S$.

[4] Красносельский М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., Гостехиздат, 1956.

[5] Никольский С. М., Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 7 (1943), 147—166.

[6] Радон И., О линейных функциональных преобразованиях и функциональных уравнениях, Успехи матем. наук, вып. 1 (1936), 200—227.

[7] Крейн М. Г. и Рутман М. А., Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, Успехи матем. наук, III, № 1 (1948), 3—95.

[8] Bateman H., Higher Transcendental Functions, II, N. Y., 1953.

[9] Reid W. T., Symmetrizable completely continuous linear transformations in Hilbert space, Duke Math. J., 18 (1951), 41—56.

[10] Харазов Д. Ф., О некоторых свойствах линейных операторов, обеспечивающих справедливость теории Гильберта—Шмидта, Успехи матем. наук, XII, № 4 (1957), 201—207.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 491—514

Я. С. БУГРОВ

СВОЙСТВА ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* **М. А. Лаврентьевым**)

Работа посвящена выяснению дифференциальных свойств полигармонических в круге функций в зависимости от дифференциальных свойств граничных функций.

§ 1. Введение

Мы будем рассматривать краевую задачу для уравнения

$$\Delta^l u(\rho, \theta) = 0 \tag{1.1}$$

(l — любое натуральное число, $0 \leqslant \rho < 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$) при условии:

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial \rho^k}\right|_{\rho=1} = \varphi_k(\theta) \quad (k = 0, 1, \ldots, l-1), \tag{1.2}$$

где

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

— оператор Лапласа.

В случае $l = 1$ мы рассмотрим задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа в единичном круге.

Нами доказана следующая теорема, обобщающая соответствующие результаты С. М. Никольского ([7]) и Т. И. Аманова ([1]).

ТЕОРЕМА. *Пусть периода* 2π *функции*

$$\varphi_k(\theta) \in H_p^{(r+l-k-1)} * \quad (k = 0, 1, \ldots, l-1;\ 1 \leqslant p \leqslant \infty,\ r > 0).$$

Тогда полигармоническая функция, решающая задачу (1.1) — (1.2),

$$u(\rho, \theta) \in H_p^{\left(r+l+\frac{1}{p}-1\right)}\left(\sum\right)$$

где $\sum$ — *единичный круг.*

При $p = 2$ и $l = 1$ мы получаем результат С. М. Никольского ([7]).

При $p = 2$ и $l = 2$ наш результат несколько усиливает соответствующий результат Т. И. Аманова ([1]).

Результат, сформулированный в теореме, не может быть улучшен, что следует из теорем С. М. Никольского ([6]).

Отметим, что наш результат при $p = 2$, $r = l - \frac{1}{2}$ перекрывается с соответствующим результатом В. М. Бабича и Л. Н. Слободецкого ([2]).

Он не вытекает из результата этих авторов, так же как из нашего результата не следует точно их результат. Отметим еще относящиеся к этим вопросам исследования А. И. Кошелева (4), Н. И. Мозжеровой (5) и О. В. Бесова (3).

В работе Кошелева рассматривается случай $l = 1$, когда $\varphi_0(\theta) \in W_p^{(2)*}$ $(p > 1)$. Для этого случая доказывается, что гармоническая функция, для которой $u(1, \theta) = \varphi_0(\theta)$, принадлежит $W_p^{(2)}(\sum)$.

Из нашей теоремы видно, что если даже исходить из того, что функция $\varphi_0(\theta)$ принадлежит к более широкому классу $H_p^{(2)*}$, то функция $u(\rho, \theta)$ не только дважды обобщенно-дифференцируема, но ее вторые производные удовлетворяют интегральному условию Липшица степени $\frac{1}{p}$. При этом p может равняться также единице.

Замечание. Классы $H_p^{(r)}(G)$ $(r > 0,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty)$ рассматривались С. М. Никольским (6), а классы $W_p^{(\rho)}(G)$ (ρ — целое, $1 \leqslant p \leqslant \infty$) — С. Л. Соболевым (9).

Пусть $r = \bar{r} + \alpha$, где $\bar{r}$ — целое, $0 < \alpha \leqslant 1$.

Функция $f(x,y)$ принадлежит классу $H_p^{(r)}(G)$, если она интегрируема в p-й степени на области G вместе со своими несмешанными частными производными $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ $(k = 1, 2, \ldots, \bar{r})$ и если при этом для частной производной $f_x^{(\bar{r})}$ выполняются соотношения:

$$\|f_x^{(\bar{r})}(x+h, y) - f_x^{(\bar{r})}(x, y)\|_{L_p(G_\eta)} = \Big(\iint\limits_{G_\eta} |f_x^{(\bar{r})}(x+h, y) - f_x^{(\bar{r})}(x, y)|^p \, dx\, dy\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant M|h|^\alpha, \text{ если } \alpha < 1,$$

$$\|f_x^{(\bar{r})}(x+h, y) - 2f_x^{(\bar{r})}(x, y) + f_x^{(\bar{r})}(x-h, y)\|_{L_p(G_\eta)} \leqslant M|h|, \text{ если } \alpha = 1,$$

каковы бы ни были $\eta > 0$ и h, удовлетворяющее неравенству $|h| < \eta$, где G_η — область, состоящая из точек G, отстоящих от границы G не более чем на $\eta > 0$.

Аналогично определяется класс $H_{py}^{(r)}(G)$.

Далее, если функция f принадлежит одновременно классам $H_{px}^{(r)}(G)$ и $H_{py}^{(r)}(G)$, то говорят, что она принадлежит классу $H_p^{(r)}(G)$ [см. (6)]. Класс $H_p^{(r)*}$ периодических функций определяется аналогично. В этом случае $G = G_\eta = \Delta$, где $\Delta = \{0 \leqslant x,\ y \leqslant \omega\}$ и ω — период по x и y.

Говорят, что функция f, определенная на G, принадлежит классу (С. Л. Соболева) $W_p^{(\rho)}(G)$, если она интегрируема в p-й степени вместе со всеми своими обобщенными частными производными до порядка ρ включительно; при этом если ψ — любая из ее частных производных порядка ρ, то ее норма удовлетворяет неравенству

$$\|\psi\|_{L_p(G)} = \Big(\int\limits_G |\psi(Q)|^p \, dQ\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant k \quad (1 \leqslant p < \infty);$$

при $p = \infty$

$$\|\psi\|_{L_\infty(G)} = \sup_{Q \in G} \text{vrai}\, |\psi(Q)|$$

(нормировку пространства $W_p^{(\rho)}(G)$ см. в (9), стр. 52—64).

§ 2. Гармонические полиномы

Пусть

$$\Phi_n(\rho, \theta) = \sum_0^n \rho^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \tag{2.1}$$

— гармонический полином n-го порядка. Обозначим

$$\|\Phi_n\|_{L_p(R)} = \left(\int_R^1 \int_0^{2\pi} |\Phi_n(\rho, \theta)|^p \rho d\rho d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \quad (R \geqslant 0), \quad \|\Phi_n\|_p = \|\Phi_n\|_{L_p(0)}. \tag{2.2}$$

ЛЕММА 1. *Для полиномов* $\Phi_n(\rho, \theta)$ *имеют место* [см. ([11])] *неравенства:*

$$\left\|\frac{\partial^l \Phi_n}{\partial \rho^l}\right\|_{L_p(R)} \leqslant c_R n^l \|\Phi_n\|_{L_p(R)}, \tag{2.3}$$

$$\left\|\rho^l \frac{\partial^l \Phi_n}{\partial \rho^l}\right\|_p \leqslant c n^l \|\Phi_n\|_p, \tag{2.4}$$

$$\left\|\frac{\partial^l \Phi_n}{\partial \theta^l}\right\|_p \leqslant n^l \|\Phi_n\|_p, \tag{2.5}$$

где $l = 1, 2, \ldots,$ $1 \leqslant p \leqslant \infty,$ c, c_R — *константы.*

Будем говорить, что

$$\Pi_n^{(l)}(\rho, \theta) = \sum_{k=0}^{l-1} (1-\rho^2)^k \Gamma_n^{(k)}(\rho, \theta) \tag{2.6}$$

есть полигармонический многочлен n-го порядка, если

$$\Gamma_n^{(k)}(\rho, \theta) = \sum_{i=0}^n \rho^i A_i^{(k)}(\theta) = \sum_{i=0}^n \rho^i (a_i^{(k)} \cos i\theta + b_i^{(k)} \sin i\theta) \tag{2.7}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, l-1)$$

— гармонические полиномы n-го порядка.

ЛЕММА 2. *Для полиномов* (2.6) *имеют место неравенства:*

$$\left\|\frac{\partial^q \Pi_n^{(l)}}{\partial \rho^q}\right\|_{L_2(R)} \leqslant c n^q \|\Pi_n^{(l)}\|_2, \tag{2.8}$$

$$\left\|\frac{\partial^q \Pi_n^{(l)}}{\partial \theta^q}\right\|_2 \leqslant n^q \|\Pi_n^{(l)}\|_2, \tag{2.9}$$

где $R > 0$ *и* c *зависит от* R.

Доказательство. Заметим, что неравенство (2.9) является очевидным, ибо $\Pi_n^{(l)}(\rho, \theta)$ есть тригонометрический полином по θ. Докажем поэтому только неравенство (2.8). Чтобы избежать громоздких записей, ограничимся рассмотрением бигармонических полиномов

$$\Pi_n^{(2)}(\rho, \theta) = (1-\rho^2)\,\Gamma_n^{(1)}(\rho, \theta) + \Gamma_n^{(0)}(\rho, \theta). \tag{2.10}$$

Мы имеем:

$$\frac{\partial \Pi_n^{(2)}}{\partial \rho} = (1-\rho^2)\sum_1^n i\rho^{i-1}A_i^{(1)}(\theta) + \sum_1^n i\rho^{i-1}A_i^{(0)}(\theta) - 2\rho\sum_0^n \rho^i A_i^{(1)}(\theta). \quad (2.11)$$

Из (2.7) видно, что

$$\rho^i a_i^{(k)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Gamma_n^{(k)}(\rho, t)\cos it\,dt,$$

$$\rho^i b_i^{(k)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Gamma_n^{(k)}(\rho, t)\sin it\,dt \qquad (k = 0, 1, \ldots, l-1).$$

В силу этого, из (2.11) следует:

$$\frac{\partial \Pi_n^{(2)}}{\partial \rho} = \frac{1}{\pi\rho}\int_0^{2\pi}[(1-\rho^2)\Gamma_n^{(1)}(\rho, t) + \Gamma_n^{(0)}(\rho, t)]\cdot\sum_1^n i\cos i(t-\theta)\,dt - 2\rho\sum_0^n \rho^i A_i^{(1)}(\theta).$$

Но

$$-2\rho\sum_0^n \rho^i A_i^{(1)}(\theta) = \frac{2}{\rho}\left[(1-\rho^2)\sum_0^n \rho^i A_i^{(1)}(\theta) + \sum_0^n \rho^i A_i^{(0)}(\theta)\right] -$$

$$-\frac{2}{\rho}\left[\sum_0^n \rho^i A_i^{(1)}(\theta) + \sum_0^n \rho^i A_i^{(0)}(\theta)\right].$$

Отсюда, учитывая, что $\Pi_n^{(2)}(\rho, \theta)$ является тригонометрическим полиномом n-го порядка по θ, имеем:

$$\frac{\partial \Pi_n^{(2)}}{\partial \rho} = \frac{1}{\pi\rho}\int_0^{2\pi} \Pi_n^{(2)}(\rho, t+\theta)\left[\sum_1^n i\cos it + \sum_1^{n-1} i\cos(2n-i)\,t\right]dt +$$

$$+\frac{2}{\pi\rho}\int_0^{2\pi} \Pi_n^{(2)}(\rho, t+\theta)\sum_0^n \cos it\,dt - \frac{2}{\rho}\left[\Gamma_n^{(1)}(\rho, \theta) + \Gamma_n^{(0)}(\rho, \theta)\right] =$$

$$= \frac{2n}{\pi\rho}\int_0^{2\pi} \cos nt\,\Pi_n^{(2)}(\rho, t+\theta)\,F_{n-1}(t)\,dt + \frac{2}{\pi\rho}\int_0^{2\pi} \Pi_n^{(2)}(\rho, t+\theta)\cdot D_n(t)\,dt -$$

$$-\frac{2}{\rho}\left[\Gamma_n^{(1)}(\rho, \theta) + \Gamma_n^{(0)}(\rho, \theta)\right],$$

где $F_n(t)$ — ядро Фейера, $D_n(t)$ — ядро Дирихле. В силу обобщенного неравенства Минковского, отсюда следует, что

$$\left\|\frac{\partial \Pi_n^{(2)}}{\partial \rho}\right\|_{L_2(R)} \leqslant c\cdot n\,\|\Pi_n^{(2)}\|_{L_2(R)}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_{n-1}(t)\,dt + c\,\|\Pi_n^{(2)}\|_{L_2(R)}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|D_n(t)|\,dt +$$

$$+\|\Gamma_n^{(1)}(\rho, \theta) + \Gamma_n^{(0)}(\rho, \theta)\|_{L_2(R)}. \quad (2.12)$$

Покажем, что

$$\|\Gamma_n^{(1)} + \Gamma_n^{(0)}\|_2 \leqslant cn\,\|\Pi_n^{(2)}\|_2. \quad (2.13)$$

Имеем:

$$\|\Gamma_n^{(1)}\|_2 = \left(\int_0^1\int_0^{2\pi} |\Gamma_n^{(1)}(\rho,\theta)|^2 \rho\, d\rho\, d\theta\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\pi\sum_0^n \frac{[a_i^{(1)}]^2+[b_i^{(1)}]^2}{2(i+1)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\Gamma_n^{(0)}\|_2 = \left(\pi\sum_0^n \frac{[a_i^{(0)}]^2+[b_i^{(0)}]^2}{2(i+1)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\Gamma_n^{(1)}+\Gamma_n^{(0)}\|_2 = \left(\pi\sum_0^n \frac{[a_i^{(1)}+a_i^{(0)}]^2+[b_i^{(1)}+b_i^{(0)}]^2}{2(i+1)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\Pi_n^{(2)}\|_2 = \left(\int_0^1\int_1^{2\pi}\Big[(1-\rho^2)\Gamma_n^{(1)}(\rho,\theta)+\Gamma_n^{(0)}(\rho,\theta)\Big]^2 \rho\, d\rho\, d\theta\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\pi\sum_0^n 2\frac{[a_i^{(1)}]^2+[b_i^{(1)}]^2}{(i+1)(i+2)(i+3)} + 2\frac{a_i^{(1)}a_i^{(0)}+b_i^{(1)}\cdot b_i^{(0)}}{(i+1)(i+2)} + \frac{[a_i^{(0)}]^2+[b_i^{(0)}]^2}{2(i+1)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда следует:

$$\frac{2}{n+3}\|\Gamma_n^{(1)}+\Gamma_n^{(0)}\|_2 = \left(2\pi\sum_0^n \frac{[a_i^{(1)}+a_i^{(0)}]^2+[b_i^{(1)}+b_i^{(0)}]^2}{(n+3)^2(i+1)}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\pi\sum_0^n 2\frac{[a_i^{(1)}]^2+[b_i^{(1)}]^2}{(i+1)(i+2)(i+3)} + 2\frac{[a_i^{(1)}a_i^{(0)}+b_i^{(1)}b_i^{(0)}]}{(i+1)(i+2)} + \frac{[a_i^{(0)}]^2+[b_i^{(0)}]^2}{2(i+1)}\right)^{\frac{1}{2}} = c\,\|\Pi_n^{(2)}\|_2.$$

Таким образом, (2.13) доказано. Из (2.12) следует:

$$\left\|\frac{\partial\Pi_n^{(2)}}{\partial\rho}\right\|_{L_2(R)} \leqslant cn\,\|\Pi_n^{(2)}\|_2,$$

в силу того, что

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_{n-1}(t)\,dt = 1, \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |D_n(t)|\,dt = O(\ln n).$$

Дифференцируя (2.10) q раз и проводя аналогичные выкладки, получим:

$$\frac{\partial^q\Pi_n^{(2)}}{\partial\rho^q} = \sum_{i=0}^q \frac{2\lambda_i n^{q-i}}{\pi\rho^q}\int_0^{2\pi}\cos nt\cdot\Pi_n^{(2)}(\rho,t+\theta)\,\sigma_n^{(q-i)}(t)\,dt +$$

$$+\sum_{i=0}^{q-1}\frac{\lambda_i'}{\rho^q}\left\{\sum_1^n k^{q-i-1}\rho^k\,[A_k^{(1)}(\theta)+A_k^{(1)}(\theta)]\right\},$$

где

$$\sigma_n^{(i)}(t) = {\sum_0^{n-1}}'\left(1-\frac{k}{n}\right)^i\cos kt \geqslant 0, \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|\sigma_n^{(i)}(t)|\,dt = 1 \qquad (i=1,2,\ldots,q),$$

λ_i λ_i' — соответствующие постоянные.

Как при доказательстве (2.13), легко получаем:

$$\left\|\sum_1^n k^{q-i-1}\rho^k\,[A_k^{(1)}(\theta)+A_k^{(0)}(\theta)]\right\| \leqslant cn^{q-i}\|\Pi_n^{(2)}\|_2 \quad (i=0,1,\ldots,q-1). \quad (2.13')$$

Используя обобщенное неравенство Минковского и неравенство (2.13′), из (2.14) получим:

$$\left\| \frac{\partial^q \Pi_n^{(2)}}{\partial \rho^q} \right\|_{L_2(R)} \leqslant c n^q \| \Pi_n^{(2)} \|_2.$$

Таким образом, неравенство (2.8) при $l = 2$ доказано. При произвольном l рассуждения аналогичны.

§ 3. Задача Дирихле

Рассмотрим краевую задачу для уравнения:

$$\Delta u(\rho, \theta) = 0 \quad (0 \leqslant \rho < 1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi) \tag{3.1}$$

при граничном условии

$$u(1, \theta) = \varphi_0(\theta). \tag{3.2}$$

ТЕОРЕМА I. *Пусть граничная функция*

$$\varphi_0(\theta) \in H_p^{(r)} * \quad (r > 0, 1 \leqslant p \leqslant \infty).$$

Тогда гармоническая функция

$$u(\rho, \theta) \in H_p^{\left(r + \frac{1}{p}\right)}\left(\sum\right),$$

где $\sum$ *— единичный круг.*

Доказательство. Как известно, решение задачи (3.1) при условии (3.2) имеет вид:

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K(\rho, t)\, \varphi_0(t + \theta)\, dt,$$

где

$$K(\rho, t) = \sum_0^{\infty}{}' \rho^k \cos kt = \sum_0^{\infty} (k+1)\, \Delta^2 \rho^k F_k(t) \quad (0 \leqslant \rho < 1),$$

$$\Delta^2 \rho^k = \rho^k - 2\rho^{k+1} + \rho^{k+2}.$$

Пусть

$$\varphi_0(\theta) \sim \sum_0^{\infty} A_k(\theta) = \sum_0^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$$

и

$$s_n = s_n(\varphi_0;\ \theta) = \sum_0^{n} A_k(\theta), \quad \tau_n(\varphi_0;\ \theta) = \frac{s_n + \ldots + s_{2n-1}}{n}.$$

Легко проверить, что

$$\tau_n(\varphi_0;\ \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [2F_{2n-1}(t) - F_{n-1}(t)]\, \varphi_0(t + \theta)\, dt.$$

Отсюда, по обобщенному неравенству Минковского, учитывая, что

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_k(t)\, dt = 1 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

получим для $1 \leqslant p \leqslant \infty$:

$$\| \tau_n(\varphi_0;\, \theta) \|_p^* = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | \tau_n(\varphi_0;\, \theta) |^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant B \| \varphi_0 \|_p^*, \tag{3.3}$$

где B — константа и

$$\| \varphi_0 \|_p^* = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | \varphi_0(\theta) |^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Далее, так как $\varphi_0 \in H_p^{(r)}*$, то существует [см. ([8])] тригонометрический полином T_n порядка n такой, что

$$\| \varphi_0 - T_n \|_p^* \leqslant \frac{c}{n^r}. \tag{3.4}$$

Из (3.3), (3.4) и того факта, что $\tau_n(T_n;\, \theta) = T_n(\theta)$ для всякого тригонометрического полинома порядка n, следует, что

$$\| \varphi_0(\theta) - \tau_n(\varphi_0;\, \theta) \|_p^* \leqslant \frac{c(B+1)}{n^r}. \tag{3.5}$$

В самом деле,

$$\| \varphi_0 - \tau_n(\varphi_0) \|_p^* = \| (\varphi_0 - T_n) - \tau_n(\varphi_0 - T_n) \|_p^* \leqslant \| \varphi_0 - T_n \|_p^* + B \| \varphi_0 - T_n \|_p^* \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c(B+1)}{n^r}.$$

Построим гармонический полином $(2n-1)$-го порядка

$$\Phi_n(\rho,\, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K(\rho,\, t) \cdot \tau_n(\varphi_0;\, t+\theta)\, dt.$$

Тогда

$$u(\rho,\, \theta) - \Phi_n(\rho,\, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K(\rho,\, t) \cdot [\varphi_0(t+\theta) - \tau_n(\varphi_0;\, t+\theta)]\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_n^{\infty} (k+1)\, \Delta^2 \rho^k F_k(t) \cdot [\varphi_0(t+\theta) - \tau_n(\varphi_0;\, t+\theta)]\, dt,$$

так как

$$\varphi_0(\theta) - \tau_n(\varphi_0;\, \theta) = \sum_{2n}^{\infty} A_k(\theta) + \sum_1^{n-1} \frac{k}{n} A_{n+k}(\theta).$$

В силу обобщенного неравенства Минковского,

$$\| u - \Phi_n \|_p \leqslant \| \varphi_0 - \tau_n(\varphi_0) \|_p^* \cdot \left(\int_0^1 \left| \sum_n^{\infty} (k+1)\, \Delta^2 \rho^k \right|^p d\rho \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \| \varphi_0 - \tau_n(\varphi_0) \|_p^* \left(\int_0^1 \left| \sum_n^{\infty} (k+1)\, \rho^k (1-\rho)^2 \right|^p d\rho \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \| \varphi_0 - \tau_n(\varphi_0) \|_p^* \cdot \sum_n^{\infty} (k+1) \left(\frac{\Gamma(2p+1)\, \Gamma(kp+1)}{\Gamma(kp+2p+2)} \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant c \| \varphi_0 - \tau_n(\varphi_0) \|_p^* \sum_n^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{p}}} \leqslant \frac{c}{n^{r+\frac{1}{p}}},$$

где $\Gamma(\xi)$ — гамма-функция, c — константа.

Таким образом,

$$\| u(\rho, \theta) - \Phi_n(\rho, \theta) \|_p \leqslant c n^{-r-\frac{1}{p}} \; (1 \leqslant p \leqslant \infty). \tag{3.6}$$

Используя лемму 1 § 2, из (3.6) методом, которым доказывается обратная теорема о наилучшем приближении [см., например, (⁵), стр. 263], легко вывести, что $u(\rho, \theta)$ принадлежит классу $H_p^{\left(r+\frac{1}{p}\right)}$ функций, определенных на кольце $\frac{1}{2} \leqslant \rho \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, а следовательно, и классу функций, определенных на круге $\sum$, так как $u(\rho, \theta)$ аналитична для $\rho < 1$.

Для примера докажем, что $u(\rho, \theta) \in H_{\rho p}^{\left(r+\frac{1}{p}\right)}\left(\sum\right)$. Положим $r + \frac{1}{p} = l$, $l = \bar{l} + \alpha$, $\bar{l}$ — целое, $0 < \alpha \leqslant 1$. Из (3.6) ясно, что функцию $u(\rho, \theta)$ можно представить в виде ряда

$$u(\rho, \theta) = \Phi_{2^0}(\rho, \theta) + \sum_{s=1}^{\infty} [\Phi_{2^s}(\rho, \theta) - \Phi_{2^{s-1}}(\rho, \theta)]. \tag{3.7}$$

Пусть $Q_s = \Phi_{2^s} - \Phi_{2^{s-1}}$; тогда

$$\| Q_s \|_p \leqslant \| u - \Phi_{2^s} \|_p + \| u - \Phi_{2^{s-1}} \|_p \leqslant c \cdot 2^{-sl}.$$

Из (3.7) следует:

$$u^{(\bar{l})}(\rho, \theta)_\rho = \sum_0^\infty Q_s^{(\bar{l})}(\rho, \theta)_\rho, \tag{3.8}$$

причем ряд (3.8) сходится в метрике L_p. В самом деле, так как Q_s — гармонические полиномы, то, по лемме 1 § 2,

$$\| Q_s^{(\bar{l})}(\rho, \theta)_\rho \|_{L_p\left(\frac{1}{2}\right)} \leqslant c \cdot 2^{s\bar{l}} \| Q_s \|_{L_p\left(\frac{1}{2}\right)} \leqslant c 2^{-s\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

Таким образом, дифференцирование законно.

Пусть, например, $\alpha < 1$; тогда

$$\| u^{(\bar{l})}(\rho - h, \theta)_\rho - u^{(\bar{l})}(\rho, \theta)_\rho \|_{L_p\left(\frac{1}{2}\right)} = \left\| \sum_0^\infty [Q_s^{(\bar{l})}(\rho - h, \theta)_\rho - Q_s^{(\bar{l})}(\rho, \theta)_\rho] \right\|_{L_p\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Зададим положительное h и подберем к нему натуральное число N такое, что

$$\frac{1}{2^{N+1}} < h \leqslant \frac{1}{2^N}.$$

Тогда

$$\| u^{(\bar{l})}(\rho - h, \theta)_\rho - u^{(\bar{l})}(\rho, \theta)_\rho \|_{L_p\left(\frac{1}{2}\right)} = \| \Delta_{h\rho} u^{(\bar{l})}(\rho, \theta)_\rho \|_{L_p\left(\frac{1}{2}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \sum_0^N \Delta_{h\rho} Q_s^{(\bar{l})}(\rho, \theta)_\rho \right\|_{L_p\left(\frac{1}{2}\right)} + c \sum_{N+1}^\infty \| Q_s^{(\bar{l})}(\rho, \theta)_\rho \|_{L_p\left(\frac{1}{2}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \sum_0^N \int_0^h Q_s^{(\bar{l}+1)}(\rho - \xi, \theta)_\rho \, d\xi \right\|_{L_p\left(\frac{1}{2}\right)} + c \sum_{N+1}^\infty 2^{-s\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant c\cdot\sum_0^N\int_0^h \|Q_s^{(\bar{l}+1)}(\rho,\theta)\|_{L_p\left(\frac{1}{2}\right)}d\xi + c2^{-(N+1)\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant ch\sum_0^N 2^{s(1-\alpha)}+ch^\alpha\leqslant ch\,2^N\cdot 2^{-(N+1)\alpha}+ch^\alpha\leqslant ch^\alpha$$

и, следовательно,

$$u(\rho,\theta)\in H_{p\rho}^{(l)}\quad\left(\frac{1}{2}\leqslant\rho\leqslant 1,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\right).$$

При $\alpha=1$ необходимо составить вторую разность для $u^{(\bar{l})}(\rho,\theta)_\rho$ и провести такие же рассуждения. Аналогично доказывается, что $u(\rho,\theta)\in\in H_{p\theta}^{(l)}(\sum)$.

Замечание. Нетрудно видеть, что, комбинируя соответствующим образом неравенства (2.3) и (2.5), можно, рассуждая, как выше, показать, что любая смешанная производная $\frac{\partial^{\bar{l}}u}{\partial\rho^k\partial\theta^{\bar{l}-k}}$ удовлетворяет в метрике L_p условию Липшица степени $\alpha\,(\alpha<1)$ на кольце $\frac{1}{2}\leqslant\rho\leqslant 1$ или при $\alpha=1$ — обобщенному условию Липшица.

ТЕОРЕМА II. *Для того чтобы гармоническая в единичном круге* $\sum$ *функция* $u(\rho,\theta)$ *принадлежала классу* $H_p^{\left(r+\frac{1}{p}\right)}\left(\sum\right)$ $(r>0,\ 1\leqslant p\leqslant\infty)$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность гармонических полиномов* $\Phi_n(\rho,\theta)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ *такая, что*

$$\|u-\Phi_n\|_p=\left(\int_0^1\int_0^{2\pi}|u(\rho,\theta)-\Phi_n(\rho,\theta)|^p\rho d\rho d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant cn^{-r-\frac{1}{p}}. \qquad (3.9)$$

Доказательство. Пусть имеет место (3.9). Тогда в силу леммы 1 § 2, как и в теореме I, доказывается, что

$$u(\rho,\theta)\in H_p^{\left(r+\frac{1}{p}\right)}\left(\sum\right).$$

Обратно, пусть

$$u(\rho,\theta)\in H_p^{\left(r+\frac{1}{p}\right)}\left(\sum\right).$$

В этом случае имеет смысл говорить о значении $u(\rho,\theta)$ на границе круга, причем, по теореме вложения С. М. Никольского [см. ([6])],

$$u(1,\theta)=\varphi_0(\theta)\in H_p^{(r)*}.$$

Заметим, что значения $\varphi_0(\theta)$ принимаются в смысле метрики L_p.

Таким образом,

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}K(\rho,t)\,\varphi_0(t+\theta)\,dt,$$

и, рассуждая как в теореме I, мы получим неравенство (3.9). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА IIа. *Для того чтобы полигармоническая в единичном круге $\sum$ функция $u(\rho, \theta)$ принадлежала классу $H_2^{\left(r+l-\frac{1}{2}\right)}\left(\sum\right)$ $(r>0)$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность полигармонических полиномов $\Pi_n^{(l)}(\rho, \theta)$ $(n=1, 2, \ldots)$ такая, что*

$$\|u-\Pi_n^{(l)}\|_2 \leqslant c n^{-r-l+\frac{1}{2}}. \tag{3.10}$$

Доказательство. Пусть имеет место (3.10). Тогда, в силу леммы 2 § 2, методом Бернштейна для обратной задачи теории аппроксимации легко доказывается, что

$$u(\rho, \theta) \in H_2^{\left(r+l-\frac{1}{2}\right)}\left(\sum\right).$$

Обратно, пусть

$$u(\rho, \theta) \in H_2^{\left(r+l-\frac{1}{2}\right)}\left(\sum\right).$$

Тогда по теореме вложения С. М. Никольского [см. ([6]), теорема 5.12] существуют функции

$$\left.\frac{\partial^k u(\rho, \theta)}{\partial \rho^k}\right|_{\rho=1} = \varphi_k(\theta) \in H_2^{(r+l-k-1)}. \quad (k=0, 1, \ldots, l-1).$$

По этим граничным значениям полигармоническая функция $u(\rho, \theta)$ может быть записана в виде

$$u(\rho, \theta) = \sum_0^{l-1} (1-\rho^2)^k \cdot u_k(\rho, \theta), \tag{3.11}$$

где $u_k(\rho, \theta)$ — гармонические функции, определяемые по граничным функциям $\varphi_k(\theta)$. Например, при $l=2$ бигармоническая функция

$$u(\rho,\theta) = (1-\rho^2)\, u_1(\rho,\theta) + u_0(\rho,\theta),$$

где

$$u_0(1,\theta) = \varphi_0(\theta), \quad u_1(1,\theta) = -\frac{1}{2}\varphi_1(\theta) + \left[\rho\frac{\partial u_0}{\partial \rho}\right]_{\rho=1} = \psi_1(\theta).$$

Таким образом,

$$u(\rho,\theta) = \frac{1-\rho^2}{\pi}\int_0^{2\pi} K(\rho,t)\cdot\psi_1(t+\theta)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(\rho,t)\,\varphi_0(t+\theta)\,dt.$$

Построим бигармонический полином

$$\Pi_n^{(2)}(\rho,\theta) = \frac{1-\rho^2}{\pi}\int_0^{2\pi} K(\rho,t)\cdot\tau_n(\psi_1; t+\theta)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(\rho,t)\,\tau_n(\varphi_0; t+\theta)\,dt.$$

Проводя оценки так же, как в теореме I, получим:

$$\| u-\Pi_n^{(2)} \|_2 \leqslant c n^{-r-2+\frac{1}{2}},$$

что требовалось доказать.

§ 4. Задача Неймана

В этом случае граничное условие (3.2) заменяется двумя следующими:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=1} = \psi(\theta), \quad \int_0^{2\pi} \psi(\theta)\, d\theta = 0. \tag{4.1}$$

ТЕОРЕМА III. *Если* $\psi(\theta) \in H_p^{(r)*}$, *то гармоническая функция, решающая задачу Неймана,*

$$u(\rho,\theta) \in H_p^{\left(r+\frac{1}{p}+1\right)}\left(\sum\right) \quad (r>0,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty).$$

Доказательство. Решение задачи (3.1) при условии (4.1) определяется с точностью до постоянной и имеет вид

$$u(\rho,\theta) = A + \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} K_1(\rho,t) \cdot \psi(t+\theta)\, dt, \tag{4.2}$$

где

$$K_1(\rho,t) = \sum_1^\infty \frac{\rho^k}{k} \cdot \cos kt.$$

Применяя к ядру $K_1(\rho,t)$ преобразования Абеля для $0 \leqslant \rho < 1$, получаем:

$$K_1(\rho,t) = \sum_1^\infty \Delta \frac{\rho^k}{k} \cdot D_k(t) - \frac{\rho}{2} = \sum_1^\infty (k+1)\Delta^2 \frac{\rho^k}{k} \cdot F_k(t) - \rho + \frac{\rho^2}{4},$$

где $D_k(t)$ — ядра Дирихле. Как и в § 3, легко показать, что

$$\| \psi(\theta) - \tau_n(\psi;\ \theta) \|_p^* \leqslant cn^{-r}. \tag{4.3}$$

Построим гармонический полином

$$\overline{\Phi}_n(\rho,\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K_1(\rho,t) \cdot \tau_n(\psi;\ t+\theta)\, dt + A.$$

Тогда

$$u(\rho,\theta) - \overline{\Phi}_n(\rho,\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_n^\infty (k+1)\, \Delta^2 \frac{\rho^k}{k} \cdot F_k(t)\, [\, \psi(t+\theta) - \tau_n(\psi;\, t+\theta)]\, dt.$$

Отсюда, применяя обобщенное неравенство Минковского, получим

$$\| u - \overline{\Phi}_n \|_p \leqslant c \| \psi - \tau_n(\psi) \|_p^* \cdot \sum_n^\infty (k+1) \times$$
$$\times \left(\int_0^1 \rho^{kp} \cdot \left| \frac{k^2(1-\rho)^2 + k(1-\rho)(3-\rho) + 2}{k(k+1)(k+2)} \right|^p d\rho \right)^{\frac{1}{p}},$$

так как

$$\Delta^2 \frac{\rho^k}{k} = \frac{\rho^k}{k} - 2\frac{\rho^{k+1}}{k+1} + \frac{\rho^{k+2}}{k+2} = \rho^k \frac{k^2(1-\rho)^2 + k(1-\rho)(3-\rho) + 2}{k(k+1)(k+2)}.$$

Оценим интеграл в последней сумме:

$$\left(\int_0^1 \rho^{kp}\left|\frac{k^2(1-\rho)^2+k(1-\rho)(3-\rho)+2}{k(k+1)(k+2)}\right|^p d\rho\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{1}{k}\left(\int_0^1 \rho^{kp}(1-\rho)^{2p}\,d\rho\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\frac{4}{k^2}\left(\int_0^1 \rho^{kp}(1-\rho)^p d\rho\right)^{\frac{1}{p}}+\frac{2}{k^3}\left(\int_0^1 \rho^{kp}d\rho\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{c}{k^{3+\frac{1}{p}}}.$$

Отсюда следует:

$$\|u-\Phi_n\|_p \leqslant c\,\|\psi-\tau_n(\psi)\|_p^* \cdot \sum_n^\infty \frac{1}{k^{2+\frac{1}{p}}} \leqslant cn^{-r-1-\frac{1}{p}}. \tag{4.4}$$

Рассуждения, подобные рассуждениям § 3, позволяют заключить, что

$$u(\rho,\theta) \in H_p^{\left(r+1+\frac{1}{p}\right)}\left(\sum\right),$$

и теорема доказана.

§ 5. Полигармоническая задача

В этом параграфе мы будем рассматривать краевую задачу для уравнения (1.1) при условии (1.2) и при $l \geqslant 2$.

ЛЕММА 1. *Для ядра Пуассона*

$$K(\rho,t) = \frac{1}{2}+\sum_1^\infty \rho^k \cos kt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2} \tag{5.1}$$

имеют место следующие оценки при $\frac{1}{2} \leqslant \rho \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant \pi$:

$$\left|\frac{\partial^m K(\rho,t)}{\partial\rho^m}\right| \leqslant \frac{c}{[(1-\rho)^2+t^2]^{\frac{m+1}{2}}} \quad (m=0,1,\ldots), \tag{5.2}$$

$$\left|\frac{\partial^{m+1} K(\rho,t)}{\partial\rho^m \partial t}\right| \leqslant \frac{c}{[(1-\rho)^2+t^2]^{\frac{m+2}{2}}} \quad (m=0,1,\ldots), \tag{5.3}$$

где c — константа.

Доказательство. Ядро $K(\rho,t)$ можно записать в следующем виде:

$$K(\rho,t) = \frac{1+\rho}{2}\cdot\frac{1-\rho}{\left[(1-\rho)^2+4\rho\sin^2\frac{t}{2}\right]}.$$

В силу того, что множитель $\frac{1+\rho}{2}$ непрерывно дифференцируем сколько угодно раз, достаточно оценить производные от

$$\frac{1-\rho}{\left[(1-\rho)^2+4\rho\sin^2\frac{t}{2}\right]} = P(\rho,t). \tag{5.4}$$

Из (5.4) имеем:

$$\frac{\partial P(\rho,t)}{\partial\rho}=\frac{(1-\rho)^2-4\sin^2\frac{t}{2}}{\left[(1-\rho)^2+4\rho\sin^2\frac{t}{2}\right]^2},$$

$$\frac{\partial^2 P(\rho,t)}{\partial\rho^2}=\lambda_2\frac{(1-\rho)^3-12(1-\rho)\sin^2\frac{t}{2}+16\sin^4\frac{t}{2}}{\left[(1-\rho)^2+4\rho\sin^2\frac{t}{2}\right]^3},$$

. . . .

$$\frac{\partial^m P(\rho,t)}{\partial\rho^m}=\lambda_m\left[\frac{(1-\rho)^{m+1}+(1-\rho)^{m-1}\cdot\psi_2(\rho)\cdot\sin^2\frac{t}{2}}{\left[(1-\rho)^2+4\rho\sin^2\frac{t}{2}\right]^{m+1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{(1-\rho)^{m-3}\cdot\psi_4(\rho)\cdot\sin^4\frac{t}{2}+\ldots+(-1)^m\cdot 4^m\sin^{2m}\frac{t}{2}}{\left[(1-\rho)^2+4\rho\sin^2\frac{t}{2}\right]^{m+1}}\right],$$

. . . .

где λ_i — соответствующие постоянные $(i=1,2,\ldots)$, $\psi_{2i}(\rho)$ — функции, ограниченные как сверху, так и снизу положительными константами.

Учитывая, что в интервале $(0,\pi)$ $\sin\frac{t}{2}\geqslant\frac{t}{\pi}$, мы из выражения для производной m-го порядка функции $P(\rho,t)$ получаем:

$$\left|\frac{\partial^m P(\rho,t)}{\partial\rho^m}\right|\leqslant c\,\frac{[(1-\rho)^2+t^2]^{\frac{m+1}{2}}}{[(1-\rho)^2+t^2]^{m+1}}\leqslant\frac{c}{[(1-\rho)^2+t^2]^{\frac{m+1}{2}}}.$$

Таким образом, оценка (5.2) доказана.

Дифференцируя по t выражение для $\frac{\partial^m P(\rho,t)}{\partial\rho^m}$, получим

$$\frac{\partial^{m+1}P(\rho,t)}{\partial\rho^m\partial t}=\lambda_{m+1}\frac{\sin t\left\{\sum\limits_{0}^{\frac{m+1}{2}}\psi_{2k}(\rho)\cdot(1-\rho)^{m+1-2k}\cdot\sin^{2k}\frac{t}{2}+O\left(\sin^{m+1}\frac{t}{2}\right)\right\}}{\left[(1-\rho)^2+4\rho\sin^2\frac{t}{2}\right]^{m+2}}.$$

Отсюда, принимая во внимание, что $|\sin t|\leqslant|t|$, как и выше, получим требуемую оценку, тем самым завершая доказательство леммы 1.

ЛЕММА 2. *Пусть $u(\rho,\theta)$ — гармоническая функция, решающая задачу Дирихле в единичном круге $\sum$ и принимающая на окружности $\rho=1$ значения*

$$\varphi(\theta)\in H_p^{(r)*}\quad(r>0,\ 1\leqslant p\leqslant\infty).$$

Тогда функция

$$\psi(\rho,\theta)=(1-\rho^2)^l\cdot u(\rho,\theta)\in H_p^{\left(r+l+\frac{1}{p}\right)}\left(\sum\right),$$

где l — натуральное число.

Доказательство. Докажем сначала, что функция

$$\psi(\rho,\theta) \in H_{p\theta}^{\left(r+l+\frac{1}{p}\right)}\left(\sum\right).$$

Имеем:

$$\psi(\rho,\theta) = \frac{(1-\rho^2)^l}{\pi} \int_0^{2\pi} K(\rho,t) \cdot \varphi(t+\theta) dt,$$

где

$$K(\rho,t) = \frac{1}{2} + \sum_1^{\infty} \rho^k \cos kt = \frac{1}{2} \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2}$$

— ядро Пуассона. Как и при доказательстве теоремы I, построим тригонометрический полином

$$T_n(\rho,\theta) = \frac{(1-\rho^2)^l}{\pi} \int_0^{2\pi} K(\rho,t) \cdot \tau_n(\varphi; t+\theta)\, dt.$$

Используя (3.5), имеем:

$$\|\psi - T_n\|_p = \left(\int_0^1 \int_0^{2\pi} |\psi(\rho,\theta) - T_n(\rho,\theta)|^p \rho d\rho d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi - \tau_n(\varphi)\|_p^* \cdot \left(\int_0^1 \left|\sum_n^{\infty} (k+1)(1-\rho^2)^l \Delta^2 \rho^k\right|^p d\rho\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{n^r} \sum_n^{\infty} (k+1) \left(\int_0^1 (1-\rho)^{(l+2)p} \cdot \rho^{kp} d\rho\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{c}{n^r} \sum_n^{\infty} \frac{1}{k^{l+1+\frac{1}{p}}} \leqslant \frac{c}{n^{r+l+\frac{1}{p}}}.$$

Отсюда, как в теореме I, заключаем, что

$$\psi(\rho,\theta) \in H_{p\theta}^{\left(r+l+\frac{1}{p}\right)}\left(\sum\right),$$

так как для тригонометрических полиномов T_n (по θ) справедливо неравенство, подобное (2.5). При $p=2$, в силу леммы 2 § 2,

$$\psi(\rho,\theta) \in H_{2\rho}^{\left(r+l+\frac{1}{2}\right)}\left(\sum\right).$$

Теперь перейдем к доказательству того, что

$$\psi(\rho,\theta) \in H_{p\rho}^{\left(r+l+\frac{1}{2}\right)}\left(\sum\right).$$

Функцию $\psi(\rho,\theta)$ можно записать в следующем виде:

$$\psi(\rho,\theta) = (1+\rho)^l (1-\rho)^l u(\rho,\theta).$$

В силу того, что множитель $(1+\rho)^l$ не влияет на поведение функции $\psi(\rho,\theta)$, мы будем исследовать функцию

$$\psi_1(\rho,\theta) = (1-\rho)^l u(\rho,\theta).$$

Рассмотрим случай $0 < r < 1$. В этом случае для функции $\varphi(\theta)$ имеет место неравенство

$$\left(\int_0^{2\pi} |\varphi(t+\theta)-\varphi(\theta)|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant c\,|t|^r.$$

Не нарушая общности, можно считать $l=1$. Поэтому покажем, что

$$\psi_1(\rho,\theta) = (1-\rho)\,u(\rho,\theta) \in H_{p\rho}^{\left(r+1+\frac{1}{p}\right)}\left(\sum\right).$$

Дифференцируя функцию $\psi_1(\rho,\theta)$, найдем:

$$\frac{\partial\psi_1(\rho,\theta)}{\partial\rho} = (1-\rho)\frac{\partial u}{\partial\rho} - u(\rho,\theta).$$

В силу теоремы I,

$$u(\rho,\theta) \in H_{p\rho}^{\left(r+\frac{1}{p}\right)}\left(\sum\right),$$

следовательно, достаточно показать, что

$$(1-\rho)\frac{\partial u}{\partial\rho} \in H_{p\rho}^{\left(r+\frac{1}{p}\right)}\left(\sum\right).$$

При доказательстве будем различать три случая: а) $r+\frac{1}{p}<1$, б) $r+\frac{1}{p}=1$, в) $r+\frac{1}{p}>1$.

а) Пусть $r+\frac{1}{p}<1$. Тогда

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sum_0^{\infty}\rho^k\cos kt\cdot\varphi(t+\theta)\,dt$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial\rho} = \frac{1}{\pi\rho}\int_0^{2\pi}\sum_1^{\infty}k\rho^k\cos kt\cdot[\varphi(t+\theta)-\varphi(\theta)]\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi\rho}\int_0^{2\pi}\sum_0^{\infty}(k+1)\,\Delta^2 k\rho^k\cdot F_k(t)\,[\varphi(t+\theta)-\varphi(\theta)]\,dt,$$

где

$$\Delta^2 k\rho^k = k\rho^k - 2(k+1)\rho^{k+1} + (k+2)\rho^{k+2} = \rho^k[k(1-\rho)^2 - 2\rho(1-\rho)],$$

$F_k(t)$ — ядра Фейера. Отсюда, по обобщенному неравенству Минковского,

$$I = \left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_0^{2\pi}\left|\Delta_{h\rho}(1-\rho)\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^p\rho\,d\rho\,d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|\int_0^{2\pi}\sum_0^{\infty}(k+1)\,\Delta_{h\rho}(1-\rho)\,\Delta^2 k\rho^k\cdot F_k(t)\cdot t^r\,dt\right|^p d\rho\right)^{\frac{1}{p}},$$

где

$$\Delta_{h\rho}(1-\rho)\frac{\partial u}{\partial\rho}=(1-\rho)\frac{\partial u(\rho,\theta)}{\partial\rho}-(1-\rho+h)\frac{\partial u(\rho-h,\theta)}{\partial\rho}.$$

Зададим положительное h и подберем к нему натуральное число N такое, что

$$\frac{1}{N+1}<h\leqslant\frac{1}{N}.$$

Разобьем сумму под интегралом на две суммы от 0 до N и от $N+1$ до ∞. Тогда, в силу того, что

$$\int_0^{2\pi}F_k(t)\cdot t^r dt=O\left(\frac{1}{(k+1)^r}\right)\quad(k=0,1,2,\ldots;\quad 0<r<1),$$

получим:

$$I\leqslant c\Bigg(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\Big[\sum_0^N(k+1)^{1-r}\left|\Delta_{h\rho}(1-\rho)\,\Delta^2 k\rho^k\right|\Big]^p d\rho\Bigg)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+c\Bigg(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\Big[\sum_{N+1}^{\infty}(k+1)^{1-r}\cdot(1-\rho)\left|\Delta^2 k\rho^k\right|\Big]^p d\rho\Bigg)^{\frac{1}{p}}.$$

Далее,

$$\Delta_{h\rho}(1-\rho)\,\Delta^2 k\rho^k=\int_0^h\{(1-\rho+\xi)\,\Delta^2 k(\rho-\xi)^k\}'_\rho\,d\xi,$$

где

$$\{(1-\rho)\,\Delta^2 k\rho^k\}'_\rho=k^2\rho^{k-1}(1-\rho)^3-(5k+2)\rho^k(1-\rho)^2+4\rho^{k+1}(1-\rho).$$

В силу этого,

$$I\leqslant ch\sum_0^N(k+1)^{3-r}\cdot\left(\int_0^1\rho^{kp}(1-\rho)^{3p}d\rho\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+c\sum_{N+1}^{\infty}(k+1)^{2-r}\cdot\left(\int_0^1\rho^{kp}(1-\rho)^{3p}d\rho\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant ch\sum_1^N\frac{1}{k^{r+\frac{1}{p}}}+c\sum_{N+1}^{\infty}\frac{1}{k^{r+1+\frac{1}{p}}}\leqslant ch\cdot N^{1-r-\frac{1}{p}}+c(N+1)^{-r-\frac{1}{p}}\leqslant ch^{r+\frac{1}{p}},$$

ибо

$$\left(\int_0^1\rho^{kp}(1-\rho)^{3p}d\rho\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\frac{\Gamma(3p+1)\cdot\Gamma(kp+1)}{\Gamma(kp+3p+2)}\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\frac{c}{k^{3+\frac{1}{p}}}.$$

б) Если $r+\frac{1}{p}=1$, то составляем вторую разность для $(1-\rho)\frac{\partial u}{\partial\rho}$. В этом случае, как и выше,

$$I=\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_0^{2\pi}\left|\Delta^2_{h\rho}(1-\rho)\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^p\rho\,d\rho\,d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant c\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|\sum_{0}(k+1)^{1-r}\,\Delta_{h\rho}^{2}(1-\rho)\,\Delta^{2}k\rho^{k}\right|^{p}d\rho\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+c\left(\int_{0}^{1}\left|\sum_{N+1}^{\infty}(k+1)^{1-r}\,(1-\rho)\,\Delta^{2}k\rho^{k}\right|^{p}d\rho\right)^{\frac{1}{p}},$$

где

$$\Delta_{h\rho}^{2}(1-\rho)\,\Delta^{2}k\rho^{k}=\int_{0}^{h}\int_{0}^{h}\{(1-\rho+\xi+\eta)\,\Delta^{2}k\,(\rho-\xi-\eta)^{k}\}_{\rho^{2}}''\,d\xi d\eta.$$

Отсюда следует:

$$I\leqslant ch^{2}\sum_{1}^{N}\frac{1}{k^{r-1+\frac{1}{p}}}+c\sum_{N+1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+r+\frac{1}{p}}}\leqslant$$

$$\leqslant ch^{2}N^{2-r-\frac{1}{p}}+c\,(N+1)^{-r-\frac{1}{p}}\leqslant ch^{r+\frac{1}{p}}=ch.$$

в) При $r+\frac{1}{p}>1$ необходимо взять еще одну производную от функции $(1-\rho)\frac{\partial u}{\partial\rho}$ и проделать оценки, аналогичные случаю а).

Пусть теперь $r=1$. В этом случае для $\varphi(\theta)$ выполняется соотношение

$$\left(\int_{0}^{2\pi}|\varphi(\theta+t)-2\varphi(\theta)+\varphi(\theta-t)|^{p}\,d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant c\,|t|. \tag{5.5}$$

Нам необходимо показать, что

$$\psi_{1}(\rho,\theta)\in H_{p\rho}^{\left(2+\frac{1}{p}\right)}\left(\sum\right).$$

Рассуждая как и выше, мы приходим к тому, что для этого достаточно доказать, что

$$(1-\rho)\,\frac{\partial^{2}u}{\partial\rho^{2}}\in H_{p\rho}^{\left(\frac{1}{p}\right)}\left(\sum\right).$$

При доказательстве будем различать три случая: а) $1<p<\infty$, б) $p=1$, в) $p=\infty$.

а) Пусть $1<p<\infty$. В силу того, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial K(\rho,t)}{\partial\rho}\,dt=0,$$

где $\frac{\partial K(\rho,t)}{\partial\rho}$ — производная от ядра Пуассона, имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial K(\rho,t)}{\partial\rho}\,\varphi(\theta+t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial K(\rho,t)}{\partial\rho}\,[\varphi(\theta+t)-2\varphi(\theta)+\varphi(\theta-t)]\,dt.$$

Дифференцируя еще раз по ρ, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2 K(\rho, t)}{\partial \rho^2} \Delta^2 \varphi(\theta + t)\, dt,$$

где

$$\Delta^2 \varphi(\theta + t) = \varphi(\theta + t) - 2\varphi(\theta) + \varphi(\theta - t).$$

Оценим первую h-разность по ρ от $(1-\rho)\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}$. Имеем:

$$I = \left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \Delta_{h\rho} (1-\rho) \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \right|^p \rho\, d\rho\, d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_{h\rho} (1-\rho) \frac{\partial^2 K(\rho, t)}{\partial \rho^2} \Delta^2 \varphi(\theta + t)\, dt \right|^p d\rho\, d\theta \right)^{\frac{1}{p}},$$

где

$$\Delta_{h\rho} (1-\rho) \frac{\partial^2 K(\rho, t)}{\partial \rho^2} = \int_0^h \left\{(1-\rho+\xi) \frac{\partial^2 K(\rho-\xi, t)}{\partial \rho^2}\right\}_\rho' d\xi =$$

$$= \int_0^h \left[(1-\rho+\xi) \frac{\partial^3 K(\rho-\xi, t)}{\partial \rho^3} - \frac{\partial^2 K(\rho-\xi, t)}{\partial \rho^2}\right] d\xi.$$

В силу леммы 1,

$$\left|(1-\rho+\xi) \frac{\partial^3 K(\rho-\xi, t)}{\partial \rho^3} - \frac{\partial^2 K(\rho-\xi, t)}{\partial \rho^2}\right| \leqslant c\,[(1-\rho+\xi)^2 + t^2]^{-\frac{3}{2}}.$$

Отсюда, в силу (5.5) и обобщенного неравенства Минковского,

$$I \leqslant c\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left| \int_0^{\pi}\int_0^h \frac{t\, d\xi\, dt}{[(1-\rho+\xi)^2 + t^2]^{\frac{3}{2}}} \right|^p d\rho \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant c \int_0^h \int_0^{\pi} t \left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{d\rho}{[(1-\rho+\xi)^2 + t^2]^{\frac{3}{2}p}} \right)^{\frac{1}{p}} d\xi\, dt \leqslant c \int_0^h \int_0^{\pi} t \left(\int_0^1 \frac{d\rho}{(\rho^2 + \xi^2 + t^2)^{\frac{3}{2}p}} \right)^{\frac{1}{p}} d\xi\, dt =$$

$$= (\rho = \eta \sqrt{\xi^2 + t^2}) = c \int_0^h \int_0^{\pi} \frac{t}{(\xi^2 + t^2)^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2p}}} \left(\int_0^{\infty} \frac{d\eta}{(1+\eta^2)^{\frac{3}{2}p}} \right)^{\frac{1}{p}} d\xi\, dt \leqslant$$

$$\leqslant c \int_0^h \int_0^{\pi} \frac{t\, dt\, d\xi}{(\xi^2 + t^2)^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2p}}} = (t = \xi\tau) \leqslant c \int_0^h \frac{d\xi}{\xi^{1-\frac{1}{p}}} \int_0^{\infty} \frac{\tau\, d\tau}{(1+\tau^2)^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2p}}} \leqslant c h^{\frac{1}{p}}$$

$$(1 < p < \infty).$$

б) При $p=\infty$ нам необходимо показать, что

$$\psi_1(\rho, \theta) = (1-\rho)\, u(\rho, \theta) \in H^{(2)}_{\infty\rho}\left(\sum\right),$$

или

$$(1-\rho)\frac{\partial u}{\partial \rho} \in H^{(1)}_{\infty\rho}\left(\sum\right).$$

Мы имеем:

$$\max_{s,\,\theta}\left|\Delta^2_{h\rho}(1-\rho)\frac{\partial u}{\partial\rho}\right| = \max_{\rho,\,\theta}\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Delta^2_{h\rho}\left\{(1-\rho)\frac{\partial K(\rho,\, t)}{\partial\rho}\right\}\cdot\Delta^2\varphi(\theta+t)\,dt\right|,$$

причем так как $\varphi \in H^{(1)}_{\infty}{}_*$, то

$$\max_{\theta}|\Delta^2\varphi(\theta+t)| \leqslant c\,|t|.$$

Далее,

$$\Delta^2_{h\rho}(1-\rho)\frac{\partial K(\rho t)}{\partial\rho} = \int\limits_0^h\int\limits_0^h\left\{(1-\rho+\xi+\eta)\frac{\partial K(\rho-\xi-\eta, t)}{\partial\rho}\right\}''_{\rho^2} d\xi\, d\eta.$$

Следовательно, в силу леммы 1 настоящего параграфа,

$$\max_{\rho,\,\theta}\left|\Delta^2_{h\rho}(1-\rho)\frac{\partial u}{\partial\rho}\right| \leqslant \max_{\rho}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^h\int\limits_0^h\frac{ctdt\, d\xi\, d\eta}{[(1-\rho+\xi+\eta)^2+t^2]^{\frac{3}{2}}} \leqslant$$

$$\leqslant c\int\limits_0^h\int\limits_0^h\int\limits_0^{\pi}\frac{t\,dt\,d\xi\,d\eta}{(\xi^2+\eta^2+t^2)^{\frac{3}{2}}} \leqslant \left(t=\sqrt{\xi^2+\eta^2}\cdot\tau\right) \leqslant$$

$$\leqslant c\int\limits_0^h\int\limits_0^h\frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\int\limits_0^{\infty}\frac{\tau d\tau}{(1+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\xi\,d\eta \leqslant c\int\limits_0^h\int\limits_0^h\frac{d\xi\,d\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \leqslant ch.$$

в) Пусть $p=1$. В этом случае необходимо показать, что

$$\psi_1(\rho, \theta) = (1-\rho)\cdot u(\rho, \theta) \in H^{(3)}_{1\rho}\left(\sum\right),$$

или

$$(1-\rho)\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} \in H^{(1)}_{1\rho}\left(\sum\right).$$

Как и при $p=\infty$, имеем:

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\Delta^2_{h\rho}\,\rho(1-\rho)\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\right|\rho\,d\rho\,d\theta \leqslant$$

$$\leqslant c\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}t\int\limits_0^h\int\limits_0^h\left|(1-\rho+\xi+\eta)\frac{\partial^4 K(\rho-\xi-\eta,\, t)}{\partial\rho^4} - \frac{\partial^3 K(\rho-\xi-\eta,\, t)}{\partial\rho^3}\right| d\xi\, d\eta\, dt\, d\rho \leqslant$$

$$\leqslant c\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^h\int\limits_0^h\frac{tdt\,d\xi\,d\eta}{(\xi^2+\eta^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\int\limits_0^{\infty}\frac{d\tau}{(1+\tau^2)^2} \leqslant c\int\limits_0^h\int\limits_0^h\frac{d\xi\,d\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \leqslant ch.$$

Таким образом, мы доказали лемму 2 при $l=1$ и $0<r\leqslant 1$. Для $l=2, 3, \ldots$, рассуждения остаются прежними, только при оценках следует использовать лемму 1 для соответствующих производных от ядра Пуассона.

При произвольном r вопрос сводится к рассмотренному случаю интегрированием по частям. Например, пусть $r=2q+\alpha$, где $q=0, 1, \ldots$ $\ldots, 0<\alpha\leqslant 1$. Тогда, интегрируя по частям, получим:

$$u(\rho, \theta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{1}^{\infty}\rho^{k}\frac{\cos kt}{k^{2q}}\varphi^{(2q)}(\theta+t)\,dt,$$

где производная $\varphi^{(2q)}(\theta)\in H_{p}^{(\alpha)}{}_{*}$, $0<\alpha\leqslant 1$, и, следовательно, вопрос сведен к случаю $0<r\leqslant 1$.

Если $r=2q+1+\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$, то рассуждаем следующим образом. Пусть для простоты $r=1+\alpha$. В этом случае гармоническая функция имеет вид:

$$u(\rho, \theta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{1}^{\infty}\rho^{k}\frac{\sin kt}{k}\varphi'(\theta+t)\,dt,$$

где $\varphi'(\theta)\in H_{p}^{(\alpha)}{}_{*}$. Нам необходимо доказать, что (при $l=1$)

$$\psi_{1}(\rho, \theta)=(1-\rho)\,u(\rho, \theta)\in H_{p\rho}^{\left(2+\alpha+\frac{1}{p}\right)}\left(\sum\right),$$

или

$$(1-\rho)\frac{\partial^{2}u}{\partial\rho^{2}}\in H_{p\rho}^{\left(\alpha+\frac{1}{p}\right)}\left(\sum\right).$$

Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{1}{\pi\rho}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{1}^{\infty}\rho^{k}\sin kt\,\varphi'(\theta+t)\,dt=\frac{1}{\pi\rho}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{1}^{\infty}\rho^{k}\sin kt\,\Delta\varphi'(\theta+t)\,dt,$$

где

$$\Delta\varphi'(\theta+t)=\varphi'(\theta+t)-\varphi'(\theta),$$

и

$$\frac{\partial^{2}u}{\partial\rho^{2}}=\frac{1}{\pi\rho^{2}}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{1}^{\infty}k\rho^{k}\sin kt\,\Delta\varphi'(\theta+t)\,dt-\frac{1}{\pi\rho^{2}}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{1}^{\infty}\rho^{k}\sin kt\,\Delta\varphi'(\theta+t)\,dt,$$

где второй член есть $\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}$ и для $\frac{1}{2}\leqslant\rho\leqslant 1$ принадлежит $H_{p\rho}^{\left(\alpha+\frac{1}{p}\right)}$, так как, по теореме I,

$$u(\rho, \theta)\in H_{p\rho}^{\left(1+\alpha+\frac{1}{p}\right)}\left(\sum\right).$$

Поэтому нам достаточно оценить первый член в выражении $\frac{\partial^{2}u}{\partial\rho^{2}}$. Но

$$-\sum_{1}^{\infty}k\rho^{k}\sin kt=\frac{\partial K(\rho, t)}{\partial t},$$

поэтому при $\alpha + \frac{1}{p} < 1$ получим:

$$\Delta_{h\rho}(1-\rho)\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial K(\rho, t)}{\partial t}\Delta\varphi'(\theta+t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi}\Delta_{h\rho}(1-\rho)\frac{\partial K(\rho, t)}{\partial t}\Delta\varphi'(\theta+t)\,dt.$$

Далее,

$$\Delta_{h\rho}(1-\rho)\frac{\partial K(\rho, t)}{\partial t} = \int_0^h\left\{(1-\rho+\xi)\frac{\partial K(\rho-\xi, t)}{\partial t}\right\}'_\rho d\xi.$$

Отсюда

$$\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\Delta_{h\rho}(1-\rho)\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial K(\rho,t)}{\partial t}\Delta\varphi'(\theta+t)\,dt\right|^p\rho\,d\rho\,d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|\int_0^h\int_0^\pi t^\alpha\left[(1-\rho+\xi)\frac{\partial^2 K(\rho-\xi, t)}{\partial\rho\,\partial t} - \frac{\partial K(\rho-\xi, t)}{\partial t}\right]dt\,d\xi\right|^p d\rho\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant (\text{лемма } 1) \leqslant c\int_0^h\int_0^\pi t^\alpha\left(\int_0^1\frac{d\rho}{(\rho^2+\xi^2+t^2)^p}\right)^{\frac{1}{p}}dt\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant c\int_0^h\int_0^\pi\frac{t^\alpha\,dt\,d\xi}{(\xi^2+t^2)^{1-\frac{1}{2p}}} \leqslant c\int_0^h\xi^{-1+\alpha+\frac{1}{p}}\int_0^\infty\frac{\eta^\alpha\,d\eta}{(1+\eta^2)^{1-\frac{1}{2p}}}\,d\xi \leqslant ch^{\alpha+\frac{1}{p}}.$$

При $\alpha + \frac{1}{p} = 1$ или $\alpha + \frac{1}{p} > 1$ рассуждаем, как и выше. Таким образом, лемма 2 доказана полностью.

Замечание. При доказательстве мы считали $\frac{1}{2} \leqslant \rho \leqslant 1$. Это не влияет на утверждение леммы 2, ибо для $\rho < \frac{1}{2}$ функция $(1-\rho)^l \cdot u(\rho, \theta)$ аналитична и принадлежит любому классу.

ТЕОРЕМА IV. *Пусть периода* 2π *функции*

$$\varphi_k(\theta) \in H_p^{(r+l-k-1)}* \quad (k = 0, 1, \ldots, l-1;\ r > 0,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty).$$

Тогда полигармоническая функция, решающая задачу (1.1) — (1.2),

$$u(\rho, \theta) \in H_p^{\left(r+\frac{1}{p}+l-1\right)}\left(\sum\right),$$

где $\sum$ *— единичный круг.*

Доказательство. Известно, что полигармоническую функцию в круге всегда можно представить в виде

$$u(\rho, \theta) = \sum_0^{l-1}(1-\rho^2)^k\cdot u_k(\rho, \theta), \tag{5.6}$$

где $u_k(\rho, \theta)$ — гармонические функции. Так как рассуждения одинаковы для любых l, то для простоты рассмотрим случай $l = 2$. Решение крае-

вой задачи (1.1) — (1.2) при $l=2$ (бигармоническая задача) имеет вид:

$$u(\rho, \theta) = (1-\rho^2)\, u_1(\rho, \theta) + u_0(\rho, \theta). \tag{5.7}$$

Гармонические функции u_0, u_1 определяются из следующих условий:

$$u_0(1, \theta) = \varphi_0(\theta), \quad u_1(1, \theta) = -\frac{1}{2}\varphi_1(\theta) + \left[\rho \frac{\partial u_0}{\partial \rho}\right]_{\rho=1}. \tag{5.8}$$

В силу теоремы I,

$$u_0 \in H_p^{\left(r+1+\frac{1}{p}\right)}\left(\sum\right).$$

По теореме вложения С. М. Никольского (6), $\left.\frac{\partial u_0}{\partial \rho}\right|_{\rho=1} \in H_{p^*}^{(r)}$, а $\varphi_1(\theta) \in H_{p^*}^{(r)}$ по условию, следовательно, по теореме I,

$$u_1 \in H_p^{\left(r+\frac{1}{p}\right)}\left(\sum\right).$$

В силу леммы 2 настоящего параграфа,

$$(1-\rho^2)\, u_1(\rho, \theta) \in H_p^{\left(r+1+\frac{1}{p}\right)}\left(\sum\right).$$

Таким образом, из (5.7) заключаем, что бигармоническая функция

$$u(\rho, \theta) \in H_p^{\left(r+1+\frac{1}{p}\right)}\left(\sum\right) \quad (r>0,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty).$$

Теорема доказана.

Замечание. Теорема I при $p=2$ доказана С. М. Никольским (7). При $p=2$, $l=2$ теорема IV несколько усиливает результат Т. И. Аманова (1).

§ 6. Задача Дирихле для произвольной области

Рассмотрим задачу Дирихле для произвольной двумерной области Ω, ограниченной контуром Γ:

$$\Delta u = 0, \tag{6.1}$$

$$u|_\Gamma = \Phi(s) \in H_p^{(r)}(\Gamma) \quad (r = \bar{r} + \alpha,\ \bar{r} \text{ — целое},\ 0 < \alpha \leqslant 1). \tag{6.2}$$

ТЕОРЕМА V. *Если область Ω может быть конформно отображена на единичный круг $\sum$ с помощью $\bar{r}+2$ раза непрерывно дифференцируемой в замкнутой области $\overline{\Omega}$ функции, то функция u (решение задачи Дирихле для Ω) принадлежит классу $H_p^{\left(r+\frac{1}{p}\right)}(\Omega)$ $\left(1 \leqslant p \leqslant \infty,\ r+\frac{1}{p} \text{ — не целое}\right)$.*

Доказательство. Пусть область точек $(\xi_1, \xi_2) \in \Omega$ конформно отображается в круг $(x_1, x_2) \in \sum$ при помощи аналитической функции $x_1 + ix_2 =$

$=\omega(\xi_1+i\xi_2)$, где функции

$$x_1 = \psi_1(\xi_1, \xi_2),$$
$$x_2 = \psi_2(\xi_1, \xi_2) \qquad (6.3)$$

$\bar r+2$ раза непрерывно дифференцируемы на Ω.

Продолжим функции ψ_1 и ψ_2 за пределы области Ω на область Ω' с сохранением дифференцируемости $\bar r+2$ раза.

Так как якобиан преобразования (6.3) положителен (отрицателен) всюду на области Ω вплоть до ее границы Γ, то можно указать круг $\sum^*$, содержащий внутри себя $\sum$, такой, что продолженное отображение (6.3) будет взаимно однозначно отображать $\sum^*$ в некоторую область Ω_*, где $\Omega\subset\Omega_*\subset\Omega'$.

Пусть на контуре Γ области Ω задана периодическая функция $\Phi(s)\in H_p^{(r)}(\Gamma)$, где s — длина дуги Γ.

При помощи преобразования (6.3) она перейдет в периодическую функцию $\varphi(\theta)\in H_p^{(r)}(\gamma)$ [см. (6), лемма 2.4]. По доказанному в этой работе, если

$$\Delta v = 0 \text{ на } \sum, \quad v|_\gamma = \varphi(\theta)\in H_p^{(r)}(\gamma),$$

то

$$v(x_1, x_2)\in H_p^{\left(r+\frac{1}{p}\right)}\left(\sum\right).$$

На самом деле функция $v(x_1, x_2)$ удовлетворяет несколько более сильным условиям (см. замечание к теореме I), которые позволяют, по крайней мере при не целом $r+\frac{1}{p}$, продолжить $v(x_1, x_2)$ за пределы $\sum$ на $\sum^*$ так, что продолженная функция будет принадлежать классу $H_p^{\left(r+\frac{1}{p}\right)}\left(\sum^*\right)$ [см. (10)].

Мы получили, что область $\sum^*$ взаимно однозначно и $\bar r+2$ дифференцируемо переходит в Ω_*.

Отсюда [см. (6), лемма 2.4] получим, что

$$u(\xi_1, \xi_2) = v[\psi_1(\xi_1, \xi_2), \psi_2(\xi_1, \xi_2)]\in H_p^{\left(r+\frac{1}{p}\right)}(\Omega).$$

Поступило
3. V. 1957

ЛИТЕРАТУРА

1 Аманов Т. И., К решению бигармонической задачи, Доклады Ак. наук СССР, 87, № 3 (1953), 389—392.

2 Бабич В. М. и Слободецкий Л. Н., Об ограниченности интеграла Дирихле, Доклады Ак. наук СССР, 106, № 4 (1956), 604—606.

3 Бесов О. В., О некоторых свойствах гармонических функций, заданных на полупространстве, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 20 (1956), 469—484.

4 Кошелев А. И., Дифференцируемость решений некоторых задач теории потенциала, Матем. сборн., 32 (74): 3 (1953), 653—664.

5 Мозжерова Н. И., Граничные свойства гармонических функций в трехмерном пространстве (Диссертация), Математ. ин-т им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, 1956.

6 Никольский С. М., Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях, Матем. сборн., 33 (75): 2 (1953), 261—326.

[7] Никольский С. М., Граничные свойства функций, определенных на области с угловыми точками. II, Матем. сборн., 43 (85): 1 (1957), 127—144.

[8] Никольский С. М., Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, XXXVII (1951), 244—278.

[9] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. ЛГУ, 1950.

[10] Никольский С. М., О продолжении функций многих переменных с сохранением дифференциальных свойств, Матем. сборн., 40 (82): 2 (1956), 243—268.

[11] Бугров Я. С., Задача Дирихле для круга, Доклады Ак. наук СССР, 115, № 4 (1957), 639—642.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 515—542

П. Л. УЛЬЯНОВ

О РЯДАХ ПО ПЕРЕСТАВЛЕННОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

(*Представлено академиком* **П. С. Александровым**)

В работе показывается, что ряд свойств тригонометрических рядов (рядов Фурье) не переносится на ряды, образованные по переставленной тригонометрической системе.

Введение

Настоящая работа состоит из четырех параграфов.

В § 1 даются два достаточных условия для безусловной сходимости почти всюду рядов Фурье (теоремы 1 и 2).

В § 2 рассматривается вопрос о суммируемости рядов (рядов Фурье) вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos k_\nu x + b_\nu \sin k_\nu x),$$

где натуральные числа k_ν все различны между собой. Доказывается, что даже ряды Фурье по переставленной системе $\{\cos k_\nu x, \sin k_\nu x\}$ могут не суммироваться довольно сильными методами Тёплица. Этому вопросу посвящены теоремы 3 и 4, а также ряд замечаний и следствий.

В этом же параграфе доказывается аналогичный результат и для комплексных степенных рядов (теорема 5).

В § 3 рассматривается переставленная тригонометрическая система $\{\cos k_\nu x, \sin k_\nu x\}$ с точки зрения сходимости рядов Фурье, образованных по этой системе, от функций $f(x) \in L^p(0, 2\pi)$, где $1 \leqslant p < 2$. Кроме того, рассматривается вопрос о сходимости на $[0, 2\pi]$ по метрике L^q $(q > 2)$ рядов Фурье по системе $\{\cos k_\nu x, \sin k_\nu x\}$ от непрерывных функций (теорема 6).

В конце § 3 дается комплексный аналог теоремы 6 (теорема 7).

В § 4 из теоремы 6 выводится ряд следствий, которые могут представлять и самостоятельный интерес. Например, доказывается, что переставленная тригонометрическая система, вообще говоря, не является базисом в пространстве $L^p(0, 2\pi)$ при $p \in [1, 2) + (2, \infty)$ (теорема 8).

Далее показывается, что принцип локализации Римана для переставленной тригонометрической системы, вообще говоря, тоже не верен (следствие 8)*.

§ 1. О безусловной сходимости

Определение 1. Функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

будем называть *безусловно сходящимся (суммируемым методом T) почти всюду на E*, если он сходится (суммируется) почти всюду на E после любой перестановки его членов. При этом множество (меры нуль) точек расходимости (несуммируемости), вообще говоря, зависит от перестановки членов.

Пусть $E_n^{(2)}(f)$ — наилучшее приближение в метрике L^2 функции $f(x)$ посредством тригонометрических полиномов порядка не выше $(n-1)$, т. е.

$$E_n^{(2)}(f) = \min_{T_{n-1}} \left\{ \int_0^{2\pi} |f(x) - T_{n-1}(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Покажем, что справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Если $f(x) \in L^2(0,2\pi)$ и для некоторого $\varepsilon > 0$*

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{(\ln\ln n)^{1+\varepsilon} \ln n}{n} \{E_n^{(2)}(f)\}^2 < \infty, \tag{1}$$

то ряд Фурье функции $f(x)$ безусловно сходится почти всюду на $[0,2\pi]$.

Доказательство **. Пусть a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции $f(x)$ и

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{2}$$

Так как ***

$$(\ln\ln n)^{1+\varepsilon} \ln^2 n \leqslant A_1 \sum_{k=10}^{n} \frac{(\ln\ln k)^{1+\varepsilon} \ln k}{k} \quad (k \geqslant 10),$$

то, в силу равенства Парсеваля и неравенства (1), получаем:

$$\sum_{n=10}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)(\ln\ln n)^{1+\varepsilon} \ln^2 n \leqslant A_1 \sum_{n=10}^{\infty} \sum_{k=10}^{n} (a_n^2 + b_n^2) \frac{(\ln\ln k)^{1+\varepsilon} \ln k}{k} \leqslant$$

$$\leqslant A_1 \sum_{k=10}^{\infty} \frac{(\ln\ln k)^{1+\varepsilon} \ln k}{k} \sum_{n=k}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leqslant A_2 \sum_{k=10}^{\infty} \frac{(\ln\ln k)^{1+\varepsilon} \ln k}{k} \{E_n^{(2)}(f)\}^2 < \infty.$$

---

* Часть результатов этой работы без доказательства была опубликована в работе ([11]).

** Эта теорема по существу уже была доказана нами в работе ([10]).

*** Через $A_1, A_2, \ldots$ будем обозначать положительные постоянные.

Положив

$$\omega(n) = (\ln \ln n)^{1+\varepsilon} \quad (n \geqslant 10)$$

и

$$n_k = 2^{2^k} \quad (k = 2, 3, \ldots),$$

находим:

$$\lim_{n\to\infty} \omega(n) = \infty, \quad \omega(n) < \omega(n+1), \quad \ln n_{k+1} = 2 \ln n_k$$

и

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\omega(n_k)} \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_1^1}{k^{1+\varepsilon}} < \infty, \quad \sum_{n=10}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)\, \omega(n) \ln^2 n < \infty,$$

т. е. выполнены все условия теоремы Орлича [см. ([1]), стр. 170], а потому ряд (2) безусловно сходится почти всюду на $[0,2\pi]$. Теорема 1 доказана.

Приведем еще один достаточный признак безусловной сходимости рядов Фурье. Именно, справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Если* $f(x) \in L^2(0,2\pi)$ *и для некоторого* $\varepsilon > 0$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|\ln t| |\ln|\ln t||^{1+\varepsilon}}{t} [f(x+t) - f(x-t)]^2\, dt\, dx < \infty, \tag{3}$$

то ряд Фурье функции $f(x)$ *безусловно сходится почти всюду на* $[0,2\pi]$ *.

Доказательство. Пусть

$$\alpha(t) = \frac{|\ln t| |\ln|\ln t||^{1+\varepsilon}}{t}.$$

Легко убедиться, что

$$\int_0^{2\pi} \alpha(t)\, dt = \infty \quad \text{и} \quad \delta^{-2}\int_0^{\delta} t^2 \alpha(t)\, dt \leqslant A_3 \int_{\delta}^{2\pi} \alpha(t)\, dt. \tag{4}$$

Условия (4) означают, что выполнены требования теоремы 1 работы ([9]), из которой вытекает, что условие (3) эквивалентно сходимости ряда

$$\sum_{k=10}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \int_{\frac{1}{k}}^{2\pi} \alpha(t)\, dt,$$

т. е.

$$\sum_{k=10}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \ln^2 k\, (\ln \ln k)^{1+\varepsilon} < \infty, \tag{5}$$

ибо

$$\ln^2 k\, (\ln \ln k)^{1+\varepsilon} \leqslant A_4 \int_{\frac{1}{k}}^{2\pi} \alpha(t)\, dt \quad (k \geqslant 10),$$

но, согласно теореме 1 настоящей работы, неравенство (5) влечет безусловную сходимость почти всюду на $[0,2\pi]$ ряда Фурье функции $f(x)$. Теорема 2 доказана.

* Легко видеть, что условие (3) (а также условие (1)) является достаточным для безусловной сходимости почти всюду ряда, сопряженного к ряду (2).

Отметим, что теорема 1 (а также теорема 2) допускает очевидное небольшое обобщение, ибо вместо

$$\omega(n) = (\ln \ln n)^{1+\varepsilon}$$

можно было бы брать и несколько медленнее растущие последовательности, для которых применима теорема Орлича.

Следствие 1. *Если $f(x) \in \mathrm{Lip}\, \alpha$, где $\alpha > 0$, то ряд Фурье функции $f(x)$ безусловно сходится почти всюду на* $[0,2\pi]$.

Это утверждение непосредственно вытекает из теоремы 2, ибо, по условию,

$$|f(x+t) - f(x-t)| \leqslant A_5 |t|^{\alpha}$$

и потому неравенство (3) справедливо при $\varepsilon = 1$.

Замечание 1. С. Б. Стечкин (7) доказал, что если

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} E_n^{(2)}(f) < \infty, \tag{6}$$

то ряд Фурье функции $f(x)$ абсолютно сходится для всех $x \in [0,2\pi]$.

Сравнивая условия (1) и (6), мы видим, что условие (1) для безусловной сходимости почти всюду гораздо слабее условия (6) для абсолютной сходимости. Ясно, что из абсолютной сходимости ряда (2) на отрезке $[0,2\pi]$ вытекает безусловная сходимость на всем (а не только почти всюду) отрезке $[0,2\pi]$.

С другой стороны, из результатов работы С. Б. Стечкина (8) вытекает, что существует функция $f(x) \in \mathrm{Lip}\, \frac{1}{2}$ такая, что ряд (2) (а также и его сопряженный) не имеет ни одной точки абсолютной сходимости. И тем не менее, в силу следствия 1, ряд Фурье функции $f(x)$ все-таки обязан сходиться почти всюду после любой перестановки его членов. Таким образом, исключительное множество меры нуль, на котором ряд (2) расходится после перестановки членов, вообще говоря, зависит от перестановки и, кроме того, любая точка x_0 отрезка $[0,2\pi]$ даже для «хороших» функций, вообше говоря, попадает в какое-то множество расходимости, зависящее от перестановки.

Следствие 2. *Если модуль непрерывности функции $f(x)$ удовлетворяет неравенству*

$$\omega(\delta, f) \leqslant \frac{A_6}{\ln \frac{1}{\delta} \left(\ln \ln \frac{1}{\delta}\right)^{1+\varepsilon}} \quad (\varepsilon > 0), \tag{7}$$

то ряд Фурье функции $f(x)$ безусловно сходится почти всюду на $[0,2\pi]$

В самом деле, из (7) вытекает, что

$$|f(x+t) - f(x-t)| \leqslant \frac{A_6'}{\ln \frac{1}{t} \left(\ln \ln \frac{1}{t}\right)^{1+\varepsilon}} \quad \left(0 < t < \frac{1}{10}\right),$$

а следовательно, справедливо неравенство (3), и поэтому ряд Фурье функции $f(x)$ безусловно сходится почти всюду на $[0,2\pi]$.

Замечание 2. Если бы мы требовали только, чтобы

$$\omega(\delta, f) = o\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{\delta}}\right), \tag{8}$$

то, по теореме Дини — Липшица, мы могли бы заключить, что ряд Фурье (2) от функции $f_1(x)$ равномерно сходится на $[0,2\pi]$. Ясно, что условие (7) сильнее условия (8) и, тем не менее, условие (7) влечет безусловную сходимость почти всюду.

Нам неизвестно, является ли условие (8) достаточным для безусловной сходимости почти всюду.

§ 2. О суммируемости

В настоящем параграфе мы будем рассматривать тригонометрические ряды по переставленной тригонометрической системе, т. е. ряды вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{s=1}^{\infty}(a_{n_s}\cos n_s x+b_{n_s}\sin n_s x), \tag{9}$$

где n_s — натуральные числа, причем $n_{s_1}\neq n_{s_2}$ при $s_1\neq s_2$.

В работе [2] доказывается следующее утверждение (принадлежащее А. Н. Колмогорову):

существует функция $f(x)\in L^2(0,2\pi)$ такая, что члены ее ряда Фурье (2) *можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд* (9) *расходился почти всюду на* $[0,2\pi]$.

Несколько позже Марцинкевич [3] доказал, что

существует функция $f(x)\in L^p(0,2\pi)$ такая, что члены ее ряда Фурье (2) *можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд* (9) *не имел ни одной подпоследовательности частных сумм, сходящейся на множестве положительной меры. При этом $1\leqslant p<\frac{6}{5}$.*

В этом параграфе мы будем, в некотором смысле, обобщать сформулированные утверждения. Предварительно введем

Определение 2. Пусть $T=\|C_{m,n}\|$ — матрица, определяющая линейный регулярный метод суммирования T. Будем называть T-метод суммирования K-методом, если для каждого $m=0,1,2,\ldots$

$$\sum_{n=0}^{\infty}n\,|C_{m,n}|=P(m)<\infty. \tag{10}$$

Очевидно, что все конечнострочные регулярные методы суммирования являются K-методами.

Полагая $C_{m,n}=x_m^n(1-x_m)$, где $0\leqslant x_m<1$ и $x_m\to 1$ при $m\to\infty$, легко убедиться, что так введенный метод суммирования тоже является K-методом. Но это есть не что иное, как «дискретный» метод суммирования Абеля, т. е. вместо непрерывного параметра $x\to 1-0$ взята последовательность $x_m\to 1-0$.

Докажем, что справедлива

ТЕОРЕМА 3. *Пусть*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{11}$$

— *тригонометрический ряд такой, что*

$$|a_k|\leqslant 1,\quad |b_k|\leqslant 1\quad (k=1,2,\ldots)\ * \tag{12}$$

* Условие (12) малоограничительно. Отметим, что если бы оно не выполнялось, то ряд (11) был бы автоматически почти всюду расходящимся. Более детально этот случай будет нами рассмотрен в следующей работе.

и

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_{n_k}^2+b_{n_k}^2)=\infty \quad (n_1<n_2<\ldots), \tag{13}$$

где последовательность $\{n_k\}$ *обладает тем свойством, что уравнение* $n=\pm n_i\pm n_j$ *имеет не более* A_7 *решений для всех* $n\neq 0$ (A_7 *— постоянное число). Пусть, кроме того,* $T=\|C_{m,n}\|$ *— некоторый К-метод суммирования. Тогда члены ряда* (11) *можно переставить так, что вновь полученный ряд* (9) *не будет суммируем методом* T *ни на каком множестве положительной меры, а также ни одна подпоследовательность частных сумм ряда* (9) *не будет сходящейся ни на каком множестве положительной меры.*

Доказательство. Мы убедимся в справедливости теоремы 3 при помощи индуктивного построения и комбинированного применения метода Зигмунда (введенного для изучения лакунарных рядов) и метода Марцинкевича.

Так как метод T регулярен, то мы можем предположить, что ни одна строка матрицы $\|C_{m,n}\|$ не состоит из одних нулей. С другой стороны, для нашей матрицы справедливо неравенство (10) и потому существует последовательность $\gamma_m\to\infty$ при $m\to\infty$ такая, что

$$C_{m,\gamma_m}\neq 0, \quad \sum_{i=\gamma_m+1}^{\infty} i\,|C_{m,i}|<\frac{1}{2^m} \quad (m=0,1,\ldots). \tag{14}$$

Пусть $T_1=\|C_{m,n}^{(1)}\|$ — матрица, определяющая линейный метод суммирования, причем $C_{m,n}^{(1)}=C_{m,n}$ при $0\leqslant n\leqslant\gamma_m$ и $C_{m,n}^{(1)}=0$ при $n>\gamma_m$. Ясно, что метод T_1 является конечнострочным.

Так как T_1 — регулярный метод, то

$$\lim_{m\to\infty} C_{m,n}^{(1)}=0 \quad (n=0,1,\ldots), \tag{15}$$

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{\gamma_m} C_{m,n}^{(1)}=1, \tag{16}$$

$$\sum_{n=1}^{\gamma_m}|C_{m,n}^{(1)}|\leqslant A_8 \text{ для всех } m=0,1,\ldots. \tag{17}$$

Для удобства вычислений предположим, что $a_n=0$ для всех n. Из дальнейшего будет видно, что это предположение не ограничивает общности теоремы. Тогда условия (11) — (13) примут вид:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin kx \tag{11'}$$

— тригонометрический ряд такой, что

$$|b_k|\leqslant 1 \quad (k=1,2,\ldots) \tag{12'}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{n_k}^2=\infty \quad (n_1<n_2<\ldots), \tag{13'}$$

где последовательность $\{n_k\}$ удовлетворяет требованию, высказанному в теореме 3.

Определим рекуррентным образом последовательность натуральных чисел $\{p'_\alpha\}, \{p_\alpha\}, \{m_\alpha\}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$ следующим образом: сначала находим p'_1 так, что

$$\sum_{i=1}^{p'_1} b_{n_i}^2 > 1^6. \tag{18}$$

Такое p'_1 существует в силу (13'). Пусть

$$B_{m,k} = C_{m,k} + C_{m,k+1} + \ldots + C_{m,\gamma_m}. \tag{19}$$

В силу (15) и (16), мы можем найти такое m_1, что

$$B_{m_1,k} > 1 - \frac{1}{2^1} \text{ при } 0 \leqslant k \leqslant p'_1 \tag{20}$$

и

$$\gamma_{m_1} > p'_1 + 1. \tag{21}$$

После этого полагаем

$$p_1 = \gamma_{m_1}. \tag{22}$$

Пусть построены числа

$$p'_1 < p_1 < p'_2 < p_2 < \ldots < p'_\alpha < p_\alpha, \tag{23}$$

$$m_1 < m_2 < \ldots < m_\alpha \tag{24}$$

так, что [см. (18), (20) — (22)]

$$\sum_{i=1}^{p'_\alpha} b_{n_i}^2 > \alpha^6, \tag{25}$$

$$B_{m_\alpha,k} > 1 - \frac{1}{2^\alpha} \text{ при } 0 \leqslant k \leqslant p'_\alpha + \alpha, \tag{26}$$

$$\gamma_{m_\alpha} > p'_\alpha + \alpha \tag{27}$$

и

$$p_\alpha = \gamma_{m_\alpha}. \tag{28}$$

Определим $p'_{\alpha+1} > p_\alpha$ так, что [см. (23), (25)]

$$\sum_{i=1}^{p'_{\alpha+1}} b_{n_i}^2 > (\alpha+1)^6. \tag{29}$$

Такое $p'_{\alpha+1}$ существует в силу (13'). В силу же (15) и (16), можно найти такое $m_{\alpha+1} > m_\alpha$, что [см. (24), (26), (27)]

$$B_{m_{\alpha+1},k} > 1 - \frac{1}{2^{\alpha+1}} \text{ при } 0 \leqslant k \leqslant p'_{\alpha+1} + (\alpha+1) \tag{30}$$

и

$$\gamma_{m_{\alpha+1}} > p'_{\alpha+1} + (\alpha+1). \tag{31}$$

После этого положим [см. (28)]

$$p_{\alpha+1} = \gamma_{m_{\alpha+1}}. \tag{32}$$

Таким образом, последовательность $\{p'_\alpha\}$, $\{p_\alpha\}$, $\{m_\alpha\}$ определяется полностью по индукции.

Теперь мы можем определить перестановки членов ряда (11′) так, чтобы вновь полученный ряд

$$\sum_{s=0}^{\infty} b_{k_s} \sin k_s x \tag{33}$$

не суммировался методом T_1 ни на каком множестве положительной меры.

Пусть $\{\nu_i\}$ — возрастающая последовательность, состоящая из всех натуральных чисел, отличных от членов последовательности $\{n_i\}$. Положим

$$\begin{aligned} &k_1 = n_1, \quad k_2 = n_2, \ldots, \quad k_{p_1} = n_{p_1}, \quad k_{p_1+1} = \nu_1, \\ &k_{p_1+2} = n_{p_1+1}, \quad k_{p_1+3} = n_{p_1+2}, \ldots, \quad k_{p_2+1} = n_{p_2}, \quad k_{p_2+2} = \nu_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &k_{p_{\alpha-1}+\alpha} = n_{p_{\alpha-1}+1}, \ldots, \quad k_{p_\alpha+\alpha-1} = n_{p_\alpha}, \quad k_{p_\alpha+\alpha} = \nu_\alpha \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{34}$$

Покажем, что последовательность (34) является искомой. Пусть

$$\begin{gathered} S_0(x) = 0, \quad S_n(x) = \sum_{s=1}^{n} b_{k_s} \sin k_s x, \\ \mathscr{T}_m^{(1)}(x) = \sum_{n=0}^{\gamma_m} C_{m,n}^{(1)} S_n(x) = \sum_{n=0}^{\gamma_m} C_{m,n} S_n(x). \end{gathered} \tag{35}$$

Ясно, что [см. (19)]

$$\mathscr{T}_m^{(1)}(x) = \sum_{s=1}^{\gamma_m} b_{k_s} \sin k_s x \, B_{m,s}. \tag{36}$$

Допустим, что на множестве E положительной меры

$$-\infty < \lim_{m\to\infty} \mathscr{T}_m^{(1)}(x) = \mathscr{T}^{(1)}(x) < \infty \quad \text{при } x \in E. \tag{37}$$

Тогда, в силу теоремы Егорова и непрерывности функций $\mathscr{T}_m^{(1)}(x)$, мы можем найти множество $E_1 \subset E$ $(mE_1 > 0)$ и число A_9 такие, что

$$|\mathscr{T}_m^{(1)}(x)| \leqslant A_9 \tag{38}$$

для всех $x \in E_1$, $m = 0, 1, \ldots$.

Так как уравнение $n = \pm n_i \pm n_j$ имеет не более чем A_7 решений, то можно найти такое k_0, чтобы

$$\Bigg\{ \sum_{\substack{i,j \geqslant p_{k_0}+1 \\ i \neq j}} \left| \int_{E_1} \sin n_i x \sin n_j x \, dx \right|^2 \Bigg\}^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{16} mE_1 \tag{39}$$

и, кроме того, чтобы

$$\int_{E_1} \sin^2 n_i x \, dx \geqslant \frac{1}{4} mE_1 \quad \text{при } i \geqslant p_{k_0}. \tag{40}$$

Но k_0 — фиксированное число и поэтому из (12′) и (17) вытекает, что

$$\left|\sum_{s=1}^{p_{k_0}+k_0-1} b_{k_s} \sin k_s x B_{m,\,s}\right| \leqslant A_{10}(k_0) \tag{41}$$

при $x \in [0,2\pi]$, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Объединяя (38) и (41), получаем:

$$\left|\mathscr{T}_m^{(1)}(x) - \sum_{s=1}^{p_{k_0}+k_0-1} a_{k_s} \sin k_s x B_{m,\,s}\right| \leqslant A_{11}(k_0) \tag{42}$$

при $x \in E_1$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ Полагая в (42) $m = m_\alpha$, находим [см. (36)]:

$$A_{11}^2 mE_1 \geqslant \int_{E_1} \left|\sum_{s=p_{k_0}+k_0}^{\gamma_{m_\alpha}} b_{k_s} \sin k_s x B_{m_\alpha s}\right|^2 dx =$$

$$= \int_{E_1} \left\{\sum_{i=p_{k_0}+1}^{\gamma_{m_\alpha}-C_\alpha} b_{n_i} \sin n_i x B_{m_\alpha i_{n_i}} + \sum_{i=k_0}^{C_\alpha} b_{\nu_i} \sin \nu_i x B_{m_\alpha i_{\nu_i}}\right\}^2 dx, \tag{43}$$

где C_α — число функций $\sin \nu_i x$, попавших в функции $\{\sin k_s x\}$ при $0 \leqslant s \leqslant \gamma_{m_\alpha}$.

Так как $\gamma_{m_\alpha} = p_\alpha$ [см. (28), (32)], то, в силу (34),

$$0 < C_\alpha \leqslant \alpha. \tag{44}$$

Заметим еще, что

$$i \leqslant i_{n_i} \leqslant i + \alpha. \tag{45}$$

Из (43) получаем:

$$A_{11}^2 mE_1 \geqslant \int_{E_1} \left\{\sum_{i=p_{k_0}+1}^{\gamma_{m_\alpha}-C_\alpha} b_{n_i} \sin n_i x B_{m_\alpha i_{n_i}}\right\}^2 dx -$$

$$-2\int_{E_1} \left|\sum_{i=p_{k_0}+1}^{\gamma_{m_\alpha}-C_\alpha} b_{n_i} \sin n_i x B_{m_\alpha,\, i_{n_i}}\right| \left|\sum_{i=k_0}^{C_\alpha} b_{\nu_i} \sin \nu_i x B_{m_\alpha,\, i_{\nu_i}}\right| dx = I_1 - 2I_2. \tag{46}$$

Оценим I_1 и I_2. Применяя неравенство Шварца и используя (39), (40), находим:

$$I_1 \geqslant \sum_{i=p_{k_0}+1}^{\gamma_{m_\alpha}-C_\alpha} b_{n_i}^2 B_{m_\alpha, i_{n_i}}^2 \int_{E_1} \sin^2 n_i x\, dx -$$

$$- \sum_{\substack{i,j \geqslant p_{k_0}+1 \\ i \neq j}}^{\gamma_{m_\alpha}-C_\alpha} b_{n_i} b_{n_j} B_{m_\alpha i_{n_i}} B_{m_\alpha,\, i_{n_j}} \int_{E_1} \sin n_i x \sin n_j x\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{4} mE_1 \sum_{i=p_{k_0}+1}^{\gamma_{m_\alpha}-C_\alpha} b_{n_i}^2 B_{m_\alpha, i_{n_i}}^2 -$$

$$-\sum_{i=p_{k_0}+1}^{\gamma_{m_\alpha}-C_\alpha} b_{n_i}^2 B_{m_\alpha i_{n_i}}^2 \left\{\sum_{\substack{i,j\geqslant p_{k_0}+1\\ i\neq j}}^{\gamma_{m_\alpha}-C_\alpha}\left[\int_{E_1}\sin n_i x \sin n_j x dx\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \geqslant \frac{1}{8} mE_1 \sum_{i=p_{k_0}+1}^{\gamma_{m_\alpha}-C_\alpha} b_{n_i}^2 B_{m_\alpha, i_{n_i}}^2,$$

т. е.

$$I_1 \geqslant \frac{1}{8} mE_1 \sum_{i=p_{k_0}+1}^{\gamma_{m_\alpha}-C_\alpha} b_{n_i}^2 B_{m_\alpha, i_{n_i}}^2. \tag{47}$$

Оценим интеграл I_2. Из (17), (19), (12′) и (44) вытекает:

$$|I_2| \leqslant \alpha A_8 \int_{E_1} \Big| \sum_{i=p_{k_0}+1}^{\gamma_{m_\alpha}-C_\alpha} b_{n_i} \sin n_i x B_{m_\alpha i_{n_i}} \Big| dx.$$

Поэтому, применяя к последнему интегралу неравенство Шварца, получаем:

$$|I_2| \leqslant \alpha A_8 \sqrt{2\pi} \left\{\int_{E_1}\left[\sum_{i=p_{k_0}+1}^{\gamma_{m_\alpha}-C_\alpha} b_{n_i}\sin n_i x B_{m_\alpha, i_{n_i}}\right]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha A_8 \sqrt{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\left[\sum_{i=p_{k_0}+1}^{\gamma_{m_\alpha}-C_\alpha} b_{n_i}\sin n_i x B_{m_\alpha, i_{n_i}}\right]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \alpha A_8 2\pi \left\{\sum_{i=p_{k_0}+1}^{\gamma_{m_\alpha}-C_\alpha} b_{n_i}^2 B_{m_\alpha, i_{n_i}}^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{48}$$

Объединяя (46), (47) и (48), находим:

$$A_{11}^2 m E_1 \geqslant \left\{\sum_{i=p_{k_0}+1}^{\gamma_{m_\alpha}-C_\alpha} b_{n_i}^2 B_{m_\alpha, i_{n_i}}^2\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\frac{1}{8} mE_1\left[\sum_{i=p_{k_0}+1}^{\gamma_{m_\alpha}-C_\alpha} b_{n_i}^2 B_{m_\alpha, i_{n_i}}^2\right]^{\frac{1}{2}} - 4\pi A_8 \alpha\right\}. \tag{49}$$

Но, в силу (28), (31) и (44),

$$\gamma_{m_\alpha} - C_\alpha = p_\alpha - C_\alpha > p'_\alpha + \alpha - C_\alpha \geqslant p'_\alpha, \tag{50}$$

а так как справедливы неравенства (45), то при $i \leqslant p'_\alpha$ получаем [см. (26), (30)]:

$$B_{m_\alpha, i_{n_i}} \geqslant 1 - \frac{1}{2^\alpha}, \tag{51}$$

ибо $i_{n_1} \leqslant p'_\alpha + \alpha$.

Объединяя (49), (50), (51) и (25), (29), находим:

$$A_{11}^2 m E_1 \geqslant \left\{\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)\left(\alpha^6 - \sum_{i=1}^{p_{k_0}} b_{n_i}^2 B_{m_\alpha, i_{n_i}}^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left\{\frac{1}{8} mE_1\left[\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)\left(\alpha^6 - \sum_{i=1}^{p_{k_0}} b_{n_i}^2 B_{m_\alpha, i_{n_i}}^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} - 4\pi A_8\alpha\right\},$$

а так как

$$\left|\sum_{i=1}^{p_{k_0}} b_{n_i}^2 B_{m_\alpha, i\, n_i}^2\right| \leqslant A_{12}(k_0),$$

то при α достаточно большом получаем:

$$A_{11}^2 m E_1 \geqslant \frac{1}{2}(\alpha^6 - A_{12})^{\frac{1}{2}} \left\{\frac{1}{16}\, m E_1 (\alpha^6 - A_{12})^{\frac{1}{2}} - 4\pi A_8 \alpha\right\}. \tag{52}$$

Ясно, что правая часть неравенства (52) стремится к бесконечности при $\alpha \to \infty$, в то время как левая часть — конечное постоянное число. Мы получили противоречие. Стало быть, соотношение (38), а потому и (37), не имеет места.

Итак, ряд (33) не суммируем методом T_1.

Покажем, что ни одна подпоследовательность частных сумм ряда (33) не может сходиться на множестве положительной меры. Допустим противное, т. е. что

$$S_{q_\beta}(x) = \sum_{s=1}^{q_\beta} b_{k_s} \sin k_s x$$

сходится на множестве E_2 с $mE_2 > 0$. Тогда можно найти множество $E_3 (mE_3 > 0)$ и число A_{13} такие, что

$$|S_{q_\beta}(x)| \leqslant A_{13} \tag{53}$$

для всех $x \in E_3$, $\beta = 1, 2, \ldots$. Ясно, что числа q_β расположены между какими-то числами $p_q + \alpha$, $p_{\alpha+1} + (\alpha + 1)$. Точнее, для всякого q_β найдется α такое, что

$$p_\alpha + \alpha \leqslant q_\beta < p_{\alpha+1} + (\alpha + 1).$$

Очевидно, что если $q_\beta \to \infty$, то $\alpha \to \infty$. Выберем теперь $\bar{k}_0$ так, чтобы выполнялись неравенства (39) и (40), где вместо E_1 берется E_3.

Отметим, что $q_\beta - \alpha \geqslant p_\alpha > p'_\alpha$. Поэтому, проводя для $S_{q_\beta}(x)$ только что сделанные рассуждения, мы получим:

$$A_{13}^2\, m E_3 \geqslant \left[\sum_{i=p_{\bar{k}_0}+1}^{p'_\alpha} b_{n_i}^2\right]^{\frac{1}{2}} \left\{\frac{1}{8} m E_3 \left[\sum_{i=p_{\bar{k}_0}+1}^{p'_\alpha} b_{n_i}^2\right]^{\frac{1}{2}} - 4\pi\alpha\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \left[\alpha^6 - \sum_{i=1}^{p_{\bar{k}_0}} b_{n_i}^2\right]^{\frac{1}{2}} \left\{\frac{1}{8} m E_3 \left[\alpha^6 - \sum_{i=1}^{p_{\bar{k}_0}} b_{n_i}^2\right]^{\frac{1}{2}} - 4\pi\alpha\right\} \tag{54}$$

для бесконечно многих α.

Ясно, что неравенство (54) противоречиво. Следовательно, ряд (33) не имеет ни одной подпоследовательности, сходящейся на множестве положительной меры.

Теорема 3 будет полностью доказана, если мы покажем, что ряд (33) не суммируем методом T.

Очевидно, что [см. (14)—(17)]

$$T = \| C_{m,n} \| = T_1 + T_2 = \| C^{(1)}_{m,n} \| + \| C^{(2)}_{m,n} \|,$$

где $C^{(2)}_{m,n} = C_{m,n}$ при $n > \gamma_m$ и $C^{(2)}_{m,n} = 0$ при $n \leqslant \gamma_m$.
Так как [см. (35)]

$$\mathscr{T}_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{m,n} S_n(x) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C^{(1)}_{m,n} S_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} C^{(2)}_{m,n} S_n(x) = \mathscr{T}^{(1)}_m(x) = \mathscr{T}^{(2)}_m(x),$$

то утверждение будет доказано, если мы покажем, что $\mathscr{T}^{(2)}_m(x)$ равномерно стремится к нулю при $m \to \infty$.

Очевидно, что из (12′) и (14) вытекает:

$$|\mathscr{T}^{(2)}_m(x)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} C^{(2)}_{m,n} \left\{ \sum_{s=1}^{n} b_{k_s} \sin k_s x \right\} \right| \leqslant \sum_{n=\gamma_m+1}^{n} n |C_{m,n}| \leqslant \frac{1}{2} m,$$

т. е. $\mathscr{T}^{(2)}_m(x)$ равномерно на $[0,2\pi]$ стремится к нулю, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е 3. 1°. Согласно теореме Банаха [см. ([12]), стр. 215], среди рядов (11), удовлетворяющих требованиям теоремы 3, имеются ряды Фурье.

2°. Более того, опираясь на результаты Юнга [см. ([12]), стр. 112], легко убедиться, что ряд

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\log_2 n}} \cos nx \tag{55}$$

сходится для всех x, кроме $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$, и является рядом Фурье некоторой функции $f(x)$. Это вытекает из того, что последовательность $\left\{\frac{1}{\sqrt{\log_2 n}}\right\}$ выпукла.

Если положить $n_i = 2^i$, то для ряда (55)

$$\sum_{i=3}^{\infty} a^2_{n_i} = \sum_{i=3}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty,$$

т. е. для ряда Фурье (55) выполнены все условия теоремы 3. Следовательно, хотя ряд (55) почти всюду сходится, тем не менее его члены можно переставить так, чтобы он не суммировался методом Абеля ни на одном множестве положительной меры и при этом любая подпоследовательность частных сумм переставленного ряда также будет почти всюду расходиться.

3°. Если использовать результат Марцинкевича, то можно построить ряды Фурье (удовлетворяющие условию теоремы 3) от функций $f(x) \in L^p(0,2\pi)$, где $1 \leqslant p < \frac{6}{5}$.

В самом деле, Марцинкевич показал, что существует последовательность $n_i \leqslant A_{14} i^3$ такая, что уравнение $n = \pm n_i \pm n_j$ $(n \neq 0)$ имеет не более одного решения. Поэтому ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{6}} \sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{6}} \cos nx \tag{56}$$

удовлетворяют условиям теоремы 3 и, следовательно, для них справедливо заключение теоремы 3. Но оба ряда (56) являются рядами Фурье от функций из $L^p(0,2\pi)$, где p — любое, меньшее $\frac{6}{5}$ [см. (12), стр. 119].

Заметим, что первый ряд (56) сходится всюду, а второй — всюду, кроме точек $x \equiv o \pmod{2\pi}$.

4⁰. Легко убедится, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin nx$$

методом Абеля суммируем всюду к нулю.

Далее, нетрудно заметить, что если в теореме 3 мы возьмем n_i из пункта 3⁰, то для «дискретного» метода суммирования Абеля рассуждения в теореме 3 сохранятся (за небольшим изменением). Поэтому члены написанного выше ряда можно переставить так, что он не будет суммироваться методом Абеля ни на одном множестве положительной меры (хотя до перестановки он суммировался всюду к нулю).

Замечание 4. Известна следующая [см. (4)]

ТЕОРЕМА ОРЛИЧА. *Существует на отрезке* $[a, b]$ *такая ортонормированная система функций* $\varphi_i(x)$, *что, каков бы ни был конечнострочный регулярный метод суммирования* T, *найдется функция* $f_1(x)$, *интегрируемая в любой степени* $1 \leqslant p < 2$, *ряд Фурье которой не суммируем методом* T *почти всюду на* $[a, b]$.

Функция $f_1(x)$, вообще говоря, зависит от метода T.

Таким образом, частный случай теоремы 3 (см. замечание 3, п. 3⁰) показывает, что в теореме Орлича за систему функций $\varphi_i(x)$ можно брать переставленную тригонометрическую систему и утверждать даже большее, т. е. почти всюду несуммируемость методом K и почти всюду расходимость всех подпоследовательностей. Правда, функция $f(x)$ в замечании 3⁰ принадлежит лишь классу L^q, где $1 \leqslant q < \frac{6}{5}$, тогда как в теореме Орлича $f_1(x) \leqslant L^p$, где $1 \leqslant p < 2$.

Если же не добиваться расходимости всех подпоследовательностей, то можно найти функцию $f_2(x) \in L^p(0,2\pi)$ для всех $1 \leqslant p < 2$ и удовлетворяющую указанным выше требованиям (даже для *любых* методов суммирования Тёплица). Этот вопрос мы предполагаем изложить в следующей работе.

Используя теорему 3, легко показать, что справедлива

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* ε *— любое положительное число, меньшее* π. *Тогда можно построить функцию* $f(x) \in L(0,2\pi)$, *имеющую непрерывную производную любого порядка на интервале* $(0,2\pi)$ *и такую, что* $f(x) = 0$ *при* $x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$. *При этом если* T *— некоторый* K*-метод суммирования,*

то члены ряда Фурье функции $f(x)$ можно переставить так, что вновь полученный ряд не будет суммируем методом T ни на каком множестве E положительной меры, а также ни одна его бесконечная подпоследовательность частных сумм не будет сходиться ни на каком множестве положительной меры.

Доказательство. Очевидно, что теорема 4 будет доказана, если мы построим функцию $f(x)\in L(0,2\pi)$, удовлетворяющую требованиям теоремы 4, ряд Фурье которой будет удовлетворять требованиям теоремы 3.

Нетрудно показать, что последовательность

$$C_n^\alpha=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}{n!}\quad(-1<\alpha<0)$$

монотонно убывает и

$$C_n^\alpha=A_{15}n^\alpha+A_{16}n^{\alpha-1}+O(n^{\alpha-2}),\tag{57}$$

где постоянные A_{15} и A_{16} зависят от α. Ясно, что

$$\frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^\alpha z^n\quad(|z|<1 \text{ и } C_0^\alpha=1),\tag{58}$$

где ряд в правой части (58) сходится при $|z|<1$ и представляет аналитическую функцию от z. Кроме того, если $z=e^{ix}$ и $x\not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, то, в силу (57), ряд (58) также сходится в этих точках, причем сумма ряда является аналитической функцией относительно x на интервале $0<x<2\pi$ ($|z|=1$). Отделяя мнимую часть, получим:

$$\operatorname{Im}\{(1-e^{ix})^{-\alpha-1}\}=\sum_{n=1}^{\infty}C_n^\alpha\sin nx.\tag{59}$$

Полагая в (59) $\alpha=-\frac{1}{6}$, находим:

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n^{-\frac{1}{6}}\sin nx,$$

где $F(x)$ — аналитическая функция на $(0,2\pi)$.

Пусть

$$f(x)=\begin{cases}F(x)e^{\frac{1}{\varepsilon^2}-\frac{1}{(\varepsilon-x)^2}} & \text{при } 0\leqslant x<\varepsilon,\\ 0 & \text{при } \varepsilon\leqslant x\leqslant\pi,\\ -f(-x) & \text{при } -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ f(x+2\pi)=f(x) & \text{при всех } x.\end{cases}$$

Покажем, что $f(x)$ является искомой функцией.

В силу теоремы Меньшова [см. [1], стр. 172], тригонометрический ряд (11) безусловно сходится (тем более суммируется) почти всюду на $[0,2\pi]$, если его коэффициенты a_n, b_n имеют порядок $O\left(\frac{1}{n}\right)$. Поэтому нам достаточно показать [см. замечание 3(3°)], что справедливо равенство:

$$d_n=\frac{A_{17}}{n^{\frac{1}{6}}}+O\left(\frac{1}{n}\right)\quad(A_{17}>0),\tag{60}$$

где d_n — коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Очевидно, что в силу (57)

$$2F(x)\sin x = C_1^{-\frac{1}{6}} + C_2^{-\frac{1}{6}}\cos x + \sum_{n=2}^{\infty} l_n \cos nx, \tag{61}$$

где

$$l_n = \frac{A_{18}}{n^{1+\frac{1}{6}}} + O\left(\frac{1}{n^{2+\frac{1}{6}}}\right). \tag{62}$$

Но из (62) и (61) вытекает, что функция $2F(x)\sin x$ абсолютно непрерывна на $[0,2\pi]$. Следовательно, функция $xF(x)$ также абсолютно непрерывна на $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому функция

$$\Phi(x) = f(x) - F(x) = F(x)\,[A_{18}x + O(x^2)]$$

абсолютно непрерывна на $\left[0,\frac{\pi}{2}.\right]$ Стало быть, $\Phi(x)$ имеет ограниченное изменение на $[0,2\pi]$ и поэтому коэффициенты Фурье функции $f(x)$ удовлетворяют соотношению (60). Теорема 4 доказана.

Замечание 5. Из доказательства видно, что построенная функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям теоремы 4, принадлежит не только $L(0,2\pi)$, но и всем $L^p(0,2\pi)$ для $1\leqslant p<\frac{6}{5}$.

Из теоремы 4 вытекает ряд следствий.

Следствие 3 (о принципе локализации Римана). *Пусть* $\{\cos k_s x, \sin k_s x\}$ — *переставленная тригонометрическая система. Если функция* $f(x)\in L(0,2\pi)$ *и* $f(x)=0$ *при* $x\in[a,b]\subset(0,2\pi)$, *то мы не можем утверждать, что ряд Фурье функции* $f(x)$ *по переставленной тригонометрической системе*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{s=1}^{\infty}(a_{k_s}\cos k_s x + b_{k_s}\sin k_s x) \tag{63}$$

почти всюду на $[a, b]$ *суммируется (тем более сходится) заданным методом* K.

Более того, теорема 4 показывает, что ряд (63) может оказаться почти всюду не суммируемым, например, методом Абеля. Тем более это имеет место для всех чезаровских средних.

Отметим, что если мы будем требовать, чтобы $f(x)\in L^p(0,2\pi)$ при $1\leqslant p<\frac{6}{5}$, то опять ничего положительного утверждать нельзя (см. еще замечание 4).

Следствие 4 (о сходимости в среднем и по мере). *Если* $f(x)\in L(0,2\pi)$ *и ряд* (63) — *ее ряд Фурье по переставленной тригонометрической системе, то мы не можем утверждать, что ряд* (63) *сходится в среднем* L^q *на некотором множестве* E *положительной меры для какого-то* $q>0$.

То же самое имеет место и для сходимости по мере.

Отметим, что функция $f(x)$ может обращаться в нуль на $[a, b]\subset(0,2\pi)$.

Следствие 4 вытекает из теоремы 4 и из того, что из всякой последовательности, сходящейся по мере на E, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти всюду на E.

Следствие 5 (о безусловной суммируемости). *Если $f(x) \in L(0,2\pi)$ и обладает сколь угодно хорошими свойствами на отрезке $[a, b] \subset (0,2\pi)$, то мы все-таки не можем заключить, что ряд Фурье функции $f(x)$ после любой перестановки почти всюду на $[a, b]$ суммируется методом K (в частности методом Абеля).*

Это непосредственно следует из теоремы 4.

Отметим, что для функций, аналитических внутри единичного круга, справедлива

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда в единичном круге можно построить аналитическую функцию*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu z^\nu \in H_p \quad \left(p \text{ — любое из } \left(0, \frac{6}{5}\right)\right), \tag{64}$$

являющуюся аналитической и на дуге

$$\Gamma = \{|z| = 1, \ \varepsilon < \arg z < 2\pi - \varepsilon\},$$

причем $\operatorname{Re} f(z)|_\Gamma = 0$, такую, что для любого K-метода суммирования члены ряда (64) можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} C_{k_s} z^{k_s} \tag{64'}$$

на единичной окружности не суммировался почти всюду K-методом и чтобы ни одна его подпоследовательность частных сумм не сходилась по мере (а стало быть, и в среднем L^q $(q > 0)$) ни на одном множестве положительной меры. То же самое можно утверждать и про действительную и мнимую части ряда (64′).

Это непосредственно вытекает из метода доказательств теорем 3 и 4.

§ 3. О системе функций $\{\cos m_\nu x, \ \sin m_\nu x\}$

ТЕОРЕМА 6. *Существует фиксированная переставленная тригонометрическая система $\{\cos m_\nu x, \sin m_\nu x\}$, обладающая свойствами:*

1) *Найдется функция $f(x) \in L^p(0,2\pi)$ для всех $1 \leqslant p < 2$, имеющая непрерывную производную любого порядка на $(0,2\pi)$, такая, что $f(x) = 0$ при $x \in [1,2\pi - 1]$ и что ряд Фурье*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{m_\nu} \cos m_\nu x + b_{m_\nu} \sin m_\nu x)$$

почти всюду неограниченно расходится на $[0,2\pi]$ и не сходится в метрике L на $[0,2\pi]$. Кроме того, ряд Фурье

$$\bar{f}(x) \sim \sum_{\nu-1}^{\infty} (a_{m_\nu} \sin m_\nu x - a_{m_\nu} \cos m_\nu x) \ ^*$$

* Через $\bar{f}(x)$ мы обозначаем сопряженную к $f(x)$ функцию:

$$\bar{f}(x) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} t} \, dt.$$

также почти всюду неограниченно расходится на $[0,2\pi]$ *и не сходится в метрике* L *на* $[0,2\pi]$.

2) *Найдется непрерывная функция* $\varphi(x)$, *ряд Фурье которой по системе* $\{\cos m_\nu x, \sin m_\nu x\}$ *не сходится в метрике* L^p *на* $[0,2\pi]$ *для любого* $p>2$. *При этом функция* $\bar\varphi(x)$ *также непрерывна и ее ряд Фурье также не сходится в метрике* L^p *при* $p>2$.

Доказательство. Будем строить функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ четными и поэтому в рассмотрении будет участвовать система функций $\{\cos nx\}$ и ее сопряженная $\{\sin nx\}$. Доказательство разобьем на шесть пунктов.

1°. Положим

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{1}{(x-1)^2}} & \text{при} \quad 0<x<1,\\ 0 & \text{при} \quad 1\leqslant x\leqslant\pi,\\ f(-x) & \text{при} -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ f(x+2\pi)=f(x) & \text{при всех } x\end{cases}$$

и

$$\Phi(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n}\ln^2 n}. \tag{65}$$

Очевидно, что функция $f(x)$ имеет непрерывные производные любого порядка на $(0,2\pi)$, обращается в нуль на $[1,2\pi-1]$ и принадлежит $L^p(0,2\pi)$ при всех $1\leqslant p<2$. Кроме того, $f(x)\,\overline{\in}\,L^2(0,2\pi)$.

Так как ряд (65) является рядом Фурье функции $\Phi(x)$, то мы можем заключить, что

$$\sum_{n=2}^{\infty}c_n^2 \ln^2 n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}<\infty, \tag{66}$$

где c_n — коэффициенты Фурье функции $\Phi(x)$, т. е.

$$c_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(x)\cos nx\,dx \quad (n\geqslant 2). \tag{67}$$

С другой стороны, так как $c_n=\frac{1}{\sqrt{n}\ln^2 n}$ — выпуклая последовательность и $nc_n\leqslant(n+1)c_{n+1}$ при $n\geqslant n_0$, то [см. ([12]), стр. 117]

$$\overline{\Phi}(x)\sim\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}\ln^2\frac{1}{x}} \quad \text{при} \quad x\to+0. \tag{68}$$

Следовательно [см. (68)], функция $\overline{\Phi}(x)\,\overline{\in}\,L^q(0,2\pi)$ для любого $q>2$, а потому и функция

$$\Phi(x)\,\overline{\in}\,L^q(0,2\pi) \quad \text{при любом} \quad q>2. \tag{69}$$

2°. Для дальнейшего нам понадобится следующий элементарный факт:

Если некоторый ряд

$$\frac{d_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}d_{p_k}\cos p_k x+l_{p_k}\sin p_k x \quad (p_k \text{ — целые и } p_{k_1}\neq p_{k_2} \text{ при } k_1\neq k_2) \tag{70}$$

сходится в метрике L^p на $[0,2\pi]$ при $p \geqslant 1$ к функции $\psi(x)$, то $\psi(x) \in L^p(0,2\pi)$ и ряд (70) является рядом Фурье функции $\psi(x)$ по системе $\{\cos p_k x, \sin p_k x\}$.

В самом деле, если ряд (70) сходится в метрике L^p, то $\psi(x) \in L^p(0,2\pi)$. Пусть, далее, $S_n(x)$ — частные суммы ряда (70). Очевидно, что при $n \geqslant k_0$

$$d_{p_{k_0}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S_n(x)\cos p_{k_0} x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(x)\cos p_{k_0} x\, dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[S_n(x)-\psi(x)]\cos p_{k_0} x dx \to \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(x)\cos p_{k_0} x\, dx, \tag{71}$$

ибо

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[S_n(x)-\psi(x)]\cos p_{k_0} x dx\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|\psi(x)-S_n(x)|\,dx \to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Следовательно,

$$d_{p_{k_0}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(x)\cos p_{k_0} x\, dx.$$

Аналогично доказывается, что и l_{p_k} — коэффициент Фурье, что и требовалось доказать.

3°. Обозначим через $\{\varphi_n(t)\}$ систему функций Радемахера. Так как $f(x) \overline{\in} L^2(0,2\pi)$, а функция $\Phi(x)$ удовлетворяет условию (66), то, в силу теорем Пэли и Зигмунда [см. ([12]), стр. 127—131], для почти всех $t_0 \in [0, 1]$ ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx\, \varphi_n(t_0), \tag{72}$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos n x\, dx,$$

не является рядом Фурье и почти всюду на $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ неограниченно расходится.

Ряд же

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\ln^2 n}\cos nx\,\varphi_n(t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(t_0)\cos nx \tag{73}$$

для почти всех $t_0 \in [0,1]$ является рядом Фурье от некоторой непрерывной функции.

То же самое мы можем сказать про ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx\,\varphi_n(t_0) \tag{72'}$$

и про ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(t_0)\sin nx. \tag{73'}$$

Следовательно, мы можем найти такое иррациональное t_0, для которого ряды (73) и (73′) являются рядами Фурье от непрерывных функций $\varphi(x)$ и $\bar{\varphi}(x)$, ряды (72) и (72′) не являются вообще рядами Фурье и, кроме того, ряды (72) и (72′) почти всюду на $[0,2\pi]$ неограниченно расходятся.

Пусть n_i — множество тех целых n, для которых $\varphi_n(t_0) = +1$, и k_i — множество тех n, для которых $\varphi_n(t_0) = -1$ Тогда каждый из рядов (72), (72′), (73) и (73′) распадается на два:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i} \cos n_i x, \qquad -\sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i} \cos k_i x, \tag{74}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i} \sin n_i x, \qquad -\sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i} \sin n_i x, \tag{74′}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_{n_i} \cos n_i x, \qquad -\sum_{i=1}^{\infty} c_{k_i} \cos k_i x \tag{75}$$

и

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_{n_i} \sin n_i x, \qquad -\sum_{i=1}^{\infty} c_{k_i} \sin k_i x. \tag{75′}$$

Так как ряд (65) не является рядом Фурье из L^q ни для какого $q > 2$ [см. (68), (69)], то по крайней мере один из рядов (75) также не является рядом Фурье из L^q ни для какого $q > 2$. Допустим для определенности, что это будет первый ряд в (75). Тогда, в силу теоремы М. Рисса, первый ряд в (75′) также не является рядом Фурье из L^q при $q > 2$.

С другой стороны, так как ряд (72) ((72′)) не является рядом Фурье, а $f(x) \in L(0,2\pi)$ ($\bar{f}(x) \in L(0,2\pi)$), то первый ряд в (74) ((74′)) заведомо не является рядом Фурье.

Пусть, далее, E_1 — множество всех тех точек интервала $(0,2\pi)$, где ряд (72) неограниченно расходится. В силу выбора t_0 имеем:

$$mE_1 = 2\pi.$$

Обозначим через A_1 множество тех точек $(0,2\pi)$, где первый ряд в (74) неограниченно расходится, а $B_1 = E_1 - A_1$. Ясно, что на множестве B_1 неограниченно расходится второй ряд в (74) и что

$$mA_1 + mB_1 = mE_1 = 2\pi, \quad A_1 \cdot B_1 = 0.$$

Обозначив через E_2 множество всех тех точек интервала $(0,2\pi)$, где ряд (72′) неограниченно расходится, мы также получим, что

$$mA_2 + mB_2 = mE_2 = 2\pi, \quad A_2 \cdot B_2 = 0,$$

где A_2 — множество точек неограниченной расходимости первого ряда в (74′), а $B_2 = E_2 - A_2$.

Предположим, что $mA_1 mB_1 mA_2 mB_2 > 0$. В противном случае, т. е. если хоть одно из множеств A_1, B_1, A_2, B_2 имеет меру нуль, доказательство будет проходить еще проще.

4. Так как первый ряд в (74) ((74')) неограниченно расходится на A_1 (A_2), то для любого $\bar{\varepsilon}_1 > 0$, целого $N_1 \geqslant 0$ и $D_1 > 0$ можно найти такое совершенное множество $p^{(1)}_{\bar{\varepsilon}_1} \subset A_1$ ($p^{(2)}_{\bar{\varepsilon}_1} \subset A_2$) с $mp^{(1)}_{\bar{\varepsilon}_1} > mA_1 - \bar{\varepsilon}_1$ ($mp^{(2)}_{\bar{\varepsilon}_1} > mA_2 - \bar{\varepsilon}_1$), что для каждого $x_0 \in p^{(1)}_{\bar{\varepsilon}_1}$ ($x_0 \in p^{(2)}_{\bar{\varepsilon}_1}$)

$$\Big|\sum_{i=N_1+1}^{L_1(x_0)} a_{n_i} \cos n_i x_0 \Big| > D_1 \quad (L_1(x_0) > N_1) \tag{76}$$

и

$$\Big|\sum_{i=N_1+1}^{M_1(x_0)} a_{n_i} \sin n_i x_0 \Big| > D_1 \quad (M_1(x_0) > N_1). \tag{76'}$$

Но функции $\cos n_i x$, $\sin n_i x$ непрерывны и поэтому из (76) ((76')) вытекает, что существует интервал $(x_0 - \eta_{x_0}, x_0 + \eta_{x_0})$ $((x_0 - \xi_{x_0}, x_0 + \xi_{x_0}))$, для которого

$$\Big|\sum_{i=N_1+1}^{L_1(x_0)} a_{n_i} \cos n_i x \Big| > D_1 \quad \text{при} \quad x \in (x_0 - \eta_{x_0}, x_0 + \eta_{x_0})$$

и

$$\Big|\sum_{i=N_1+1}^{M_1(x_0)} a_{n_i} \sin n_i x \Big| > D_1 \quad \text{при} \quad x \in (x_0 - \xi_{x_0}, x_0 + \xi_{x_0}).$$

Следовательно, совершенное множество $p^{(1)}_{\bar{\varepsilon}_1}$ ($p^{(2)}_{\bar{\varepsilon}_1}$) покрыто системой интервалов и, стало быть, по лемме Гейне — Бореля, можно найти конечную систему интервалов $(x_0 - \eta_{x_0}, x_0 + \eta_{x_0})$ $((x_0 - \xi_{x_0}, x_0 + \xi_{x_0}))$, которая покрывает множество $p^{(1)}_{\bar{\varepsilon}_1}$ ($p^{(2)}_{\bar{\varepsilon}_1}$). Поэтому найдется такое число $L_1(\bar{\varepsilon}_1, N_1, D_1)$, для которого

$$\Big|\sum_{i=N_1+1}^{L_1^1(x_0)} a_{n_i} \cos n_i x_0 \Big| > D_1, \tag{77}$$

где $x_0 \in p^{(1)}_{\bar{\varepsilon}_1}$, $L_1^1(x_0) \leqslant L_1(\bar{\varepsilon}_1, N_1, D_1)$, и

$$\Big|\sum_{i=N_1+1}^{M_1^1(x_0)} a_{n_i} \sin n_i x_0 \Big| > D_1, \tag{77'}$$

где $x_0 \in p^{(2)}_{\bar{\varepsilon}_1}$, $M_1^1(x_0) \leqslant L_1(\bar{\varepsilon}_1, N_1, D_1)$.

Аналогично, для любых $\bar{\varepsilon}_2 > 0$, $N_2 \geqslant 0$, $D_2 > 0$ можно найти совершенное множество $G^{(1)}_{\bar{\varepsilon}_2} \subset B_1$ ($G^{(2)}_{\bar{\varepsilon}_2} \subset B_2$) с $mG^{(1)}_{\bar{\varepsilon}_2} > mB_1 - \bar{\varepsilon}_2$ ($mG^{(2)}_{\bar{\varepsilon}_2} > mB_2 - \bar{\varepsilon}_2$) и число $L_2(\bar{\varepsilon}_2, N_2, D_2)$ такие, что

$$\Big|\sum_{i=N_2+1}^{L_2^1(x_0)} a_{k_i} \cos k_i x_0 \Big| > D_2, \tag{78}$$

где $x_0 \in G^{(1)}_{\bar{\varepsilon}_2}$, $L_2^1(x_0) \leqslant L_2(\bar{\varepsilon}_2, N_2\ D_2)$, и

$$\Big|\sum_{i=N_2+1}^{M_2^1(x_0)} a_{k_i} \sin k_i x_0 \Big| > D_2, \tag{78'}$$

где $x_0 \in G^{(2)}_{\bar{\varepsilon}_2}$, $M_2^1(x_0) \leqslant L_2(\bar{\varepsilon}_2, N_2, D_2)$.

Первый ряд в (74) ((74′)) не является рядом Фурье и потому (см. 2°) он не сходится на $[0,2\pi]$ в метрике L, т. е. существует число $\delta>0$ и последовательности

$$k_1^{(1)} \leqslant n_1^{(1)} < n_1^{(2)} \leqslant k_1^{(2)} < k_2^{(1)} \leqslant n_2^{(1)} < n_2^{(2)} \leqslant k_2^{(2)} < \ldots, \tag{79}$$

$$k_2^{(1)} \leqslant m_1^{(1)} < m_1^{(2)} \leqslant k_1^{(2)} < k_2^{(1)} \leqslant m_2^{(1)} < m_2^{(2)} \leqslant k_2^{(2)} < \ldots \tag{79′}$$

такие, что

$$\int_0^{2\pi} \Big| \sum_{i=n_j^{(1)}}^{n_j^{(2)}} a_{n_i} \cos n_i x \Big| \, dx \geqslant \delta \quad (j=1, 2, \ldots), \tag{80}$$

$$\int_0^{2\pi} \Big| \sum_{i=m_j^{(1)}}^{m_j^{(2)}} a_{n_i} \sin n_i x \Big| \, dx \geqslant \delta \quad (j=1, 2, \ldots). \tag{80′}$$

5°. Так как первый ряд в (75) ((75′)) не сходится на $[0,2\pi]$ в метрике L^q для всякого $q>2$, то, положив

$$q_s = 2 + \frac{1}{s} \quad (s=1, 2, \ldots),$$

мы можем для каждого q_s найти такое $\varepsilon_s > 0$ и такую последовательность

$$\alpha_1^{(s)} < \beta_1^{(s)} < \alpha_2^{(s)} < \beta_2^{(s)} < \ldots, \tag{81}$$

чтобы

$$\Big\| \sum_{i=\alpha_j^{(s)}}^{\beta_j^{(s)}} c_{n_i} \cos n_i x \Big\|_{q_s} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big| \sum_{i=\alpha_j^{(s)}}^{\beta_j^{(s)}} c_{n_i} \cos n_i x \Big|^{q_s} dx \right\}^{\frac{1}{q_s}} \geqslant \varepsilon_s \qquad (j=1, 2, \ldots) \tag{82}$$

и чтобы (в силу теоремы М. Рисса)

$$\Big\| \sum_{i=\alpha_j^{(s)}}^{\beta_j^{(s)}} c_{n_j} \sin n_i x \Big\|_{q_s} \geqslant \varepsilon_s. \tag{82′}$$

Не ограничивая общности, мы можем предположить ε_s монотонно стремящимся к нулю.

Построим последовательность

$$\gamma_1 < \delta_1 < \gamma_2 < \delta_2 < \ldots < \gamma_p < \delta_p < \ldots \tag{83}$$

следующим образом. Пусть

$$\gamma_1 = \alpha_1^{(1)}, \quad \delta_1 = \beta_1^{(1)}, \quad \gamma_2 = \alpha_{j_1}^{(2)} > \delta_1, \quad \delta_2 = \beta_{j_1}^{(2)}, \quad \gamma_3 = \alpha_{j_2}^{(1)} > \delta_2, \quad \delta_3 > \beta_{j_2}^{(1)},$$
$$\gamma_4 = \alpha_{j_3}^{(2)} > \delta_3, \quad \delta_4 = \beta_{j_3}^{(3)}, \quad \gamma_5 = \alpha_{j_4}^{(3)} > \delta_4, \quad \delta_5 = \beta_{j_4}^{(3)},$$
$$\gamma_6 = \alpha_{j_5}^{(1)} > \delta_5, \quad \delta_6 = \beta_{j_5}^{(1)}, \ldots,$$

т. е. для каждого фиксированного s_0 бесконечно много пар $(\alpha_j^{(s_0)}, \beta_j^{(s_0)})$ из (81) совпадает с какими-то парами (γ_j, δ_j) из (83). А так как нормы

в L^q не убывают с возрастанием q, то это значит, что, каково бы ни было число $q > 2$, можно найти такое $q_{s_0} < 2$ и такие пары $(\gamma_{p_k}, \delta_{p_k})$ $(k = 1, 2, \ldots)$, что [см. (82), (82')]

$$\left\| \sum_{i=\gamma_{p_k}}^{\delta_{p_k}} c_{n_i} \cos n_i x \right\|_q \geqslant \varepsilon_{s_0} \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{84}$$

$$\left\| \sum_{i=\gamma_{p_k}}^{\delta_{p_k}} c_{n_i} \sin n_i x \right\|_q \geqslant \varepsilon_{s_0} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{84'}$$

6°. Теперь мы сможем рекуррентным образом определить числа $\{m_\nu\}$ и показать, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ являются искомыми.

Пусть $\bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1$ (см. 4° и 5°), $N_1 = 0$, $D_1 = 1$. Тогда, в силу (77), (77'), мы можем найти множества $p_\varepsilon^{(1)} \subset A_1$ с $mp_{\varepsilon_1}^{(1)} > mA_1 - \varepsilon$, $p_{\varepsilon_1}^{(2)} \subset A_2$ с $mp_{\varepsilon_1}^{(2)} > mA_2 - \varepsilon_1$ и число $\tau_1 > L(\varepsilon_1, 0, 1)$ такие, что

$$\left| \sum_{i=1}^{L_1^1(x_0)} a_{n_i} \cos n_i x_0 \right| > 1 \text{ при } x_0 \in p_{\varepsilon_1}^{(1)} \text{ и } L_1^1(x_0) \leqslant \tau_1$$

и

$$\left| \sum_{i=1}^{M_1^1(x_0)} a_{n_i} \sin n_i x_0 \right| > 1 \quad \text{при } x_0 \in p_{\varepsilon_1}^{(2)} \text{ и } M_1^1(x_0) \leqslant \tau_1.$$

Кроме того, τ_1 выбрано так, что отрезок $[1, \tau_1]$ содержит по крайней мере один отрезок $[k_{j_1}^{(1)}, k_{j_1}^{(2)}]$ [см. (79), (79') (80), (80')] и что для некоторого p_{i_1} [см. (83)]

$$\delta_{p_{i_1}} - 1 \leqslant \tau_1 < \gamma_{p_{i_1}}. \tag{85}$$

Положим

$$m_\nu = n_\nu \quad \text{при} \quad 1 \leqslant \nu \leqslant \tau_1. \tag{86}$$

Возьмем $\bar{\varepsilon}_2 = \varepsilon_1$, $N_2 = 0$, $D_2 = 1$. Тогда, в силу (78), (78') мы можем найти множества $G_{\varepsilon_1}^{(1)} \subset B_1$ с $mG_{\varepsilon_1}^{(1)} > mB_1 - \varepsilon_1$, $G_{\varepsilon_1}^{(2)} \subset B_2$ с $mG_{\varepsilon_1}^{(2)} > mB_2 - \varepsilon$ и число $\tau_1^1 = L_2(\varepsilon_1, 0, 1)$ такие, для которых

$$\left| \sum_{i=1}^{L_2^1(x_0)} a_{k_i} \cos k_i x_0 \right| > 1 \quad \text{при } x_0 \in G_{\varepsilon_1}^{(1)} \text{ и } L_2^1(x_0) \leqslant \tau_1^1 \tag{87}$$

и

$$\left| \sum_{i=1}^{M_2^1(x_0)} a_{k_i} \sin k_i x_0 \right| > 1 \quad \text{при } x_0 \in G_{\varepsilon_1}^{(2)} \text{ и } M_2^1(x_0) \leqslant \tau_1^1. \tag{87'}$$

Положим [см. (86)]

$$m_{\nu+\tau_1} = k_\nu \quad \text{при} \quad 1 \leqslant \nu \leqslant \tau_1^1. \tag{88}$$

Возьмем $\overline{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2$, $N_1 = \tau_1$, $D_1 = 2$. Тогда, в силу (77), (77′), мы можем найти множества

$$p_{\varepsilon_2}^{(1)} \subset A_1 \text{ с } mp_{\varepsilon_2}^{(1)} > mA_1 - \varepsilon_2, \tag{89}$$

$$p_{\varepsilon_2}^{(2)} \subset A_2 \text{ с } mp_{\varepsilon_2}^{(2)} > mA_2 - \varepsilon_2 \tag{89′}$$

и число $\tau_2 > L_1(\varepsilon_2, \tau_1, 2) > \tau_1$ такие, что

$$\left|\sum_{i=\tau_1+1}^{L_1^1(x_0)} a_{n_i} \cos n_i x_0\right| > 2 \quad \text{при} \quad x_0 \in p_{\varepsilon_2}^{(1)} \text{ и } L_1^1(x_0) \leqslant \tau_2 \tag{90}$$

и

$$\left|\sum_{i=\tau_1+1}^{M_1^1(x_0)} a_{n_i} \sin n_i x_0\right| > 2 \quad \text{при} \quad x_0 \in p_{\varepsilon_2}^{(2)} \text{ и } M_1^1(x_0) \leqslant \tau_2. \tag{90′}$$

Кроме того, τ_2 выбрано так, что отрезок $[\tau_1 + 1, \tau_2]$ содержит по крайней мере один отрезок $[k_{j_2}^{(1)}, k_{j_2}^{(2)}]$ [см. (79), (79′), (80), (80′)] и для некоторого $p_{i_2} > p_{i_1}$ (см. (85))

$$\delta_{p_{i_2}-1} \leqslant \tau_2 < \gamma_{p_{i_2}}. \tag{91}$$

Полагаем теперь

$$m_{\nu+\tau_1^1} = n_\nu \quad \text{при} \quad \tau_1 + 1 \leqslant \nu \leqslant \tau_2. \tag{92}$$

Далее, опять берем $\overline{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2$, $N_2 = \tau_1^1$, $D_2 = 2$ и, в силу (78), (78′), находим множества $G_{\varepsilon_2}^{(1)} \subset B_1$ с $mG_{\varepsilon_2}^{(1)} > mB_1 - \varepsilon_2$, $G_{\varepsilon_2}^{(2)} \subset B_2$ с $mG_{\varepsilon_2}^{(2)} > mB_2 - \varepsilon_2$ и число $\tau_2^1 = L_2(\varepsilon_2, \tau_1^1, 2) > \tau_1^1$ такие, что

$$\left|\sum_{i=\tau_1^1+1}^{L_2^1(x_0)} a_{k_i} \cos k_i x_0\right| > 2 \quad \text{при} \quad x_0 \in G_{\varepsilon_2}^{(1)} \text{ и } L_2^1(x_0) \leqslant \tau_2^1 \tag{93}$$

и

$$\left|\sum_{i=\tau_1^1+1}^{M_2^1(x_0)} a_{k_i} \sin k_i x_0\right| > 2 \quad \text{при} \quad x_0 \in G_{\varepsilon_2}^{(2)} \text{ и } M_2^1(x_0) \leqslant \tau_2^1. \tag{93′}$$

После этого кладем

$$m_{\nu+\tau_2} = k_\nu \quad \text{при} \quad \tau_1^1 + 1 \leqslant \nu \leqslant \tau_2. \tag{94}$$

Далее, берем $\overline{\varepsilon}_1 = \varepsilon_3$, $N_1 = \tau_2$, $D_1 = 3$ и проводим построение с помощью формул (77), (77′), (79), (79′), (80), (80′), (83) и т. д.

Легко сообразить, что таким образом мы по индукции можем определить m_ν для всех ν [см. (86), (88), (92), (94)].

Очевидно, что тогда ряды Фурье функций $f(x)$ и $\overline{f}(x)$ по системе $\{\cos m_\nu x, \sin m_\nu x\}$ будут иметь вид:

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=\tau_k+1}^{\tau_{k+1}} a_{n_i} \cos n_i x + \sum_{i=\tau_k^1+1}^{\tau_{k+1}^1} a_{k_i} \cos k_i x \right) \quad (\tau_0 = \tau_0^1 = 0), \tag{95}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=\tau_k+1}^{\tau_{k+1}} a_{n_i} \sin n_i x + \sum_{i=\tau_k^1+1}^{\tau_{k+1}^1} a_{k_i} \sin k_i x \right), \tag{95′}$$

где внутренние суммы следует расписать, придерживаясь следующего правила: сначала расписывается сумма

$$\sum_{i=\tau_k+1}^{\tau_{k+1}} a_{n_i} \cos n_i x.$$

в порядке возрастания индексов i, а потом уже расписывается сумма

$$\sum_{i=\tau_1^1+1}^{\tau_{k+1}^1} a_{n_i} \cos k_i x\,.$$

Аналогично для ряда (95′).

Ряды же Фурье функций $\varphi(x)$ и $\bar{\varphi}(x)$ по системе $\{\cos m_\nu x, \sin m_\nu x\}$ примут вид:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=\tau_k+1}^{\tau_{k+1}} c_{n_i} \cos n_i x - \sum_{i=\tau_k^1+1}^{\tau_{k+1}^1} c_{k_i} \cos k_i x\right) \tag{96}$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=\tau_k+1}^{\tau_{k+1}} c_{n_i} \sin n_i x - \sum_{i=\tau_k^1+1}^{\tau_{k+1}^1} c_{k_i} \sin k_i x\right), \tag{96′}$$

где внутренние суммы следует расписать по тому же правилу.

Что касается ряда (96), то, в силу выбора $\tau_1, \tau_2, \ldots$ [см. (85), (91)], мы можем заключить, что любая сумма

$$\sum_{i=\gamma_p}^{\delta_p} c_{n_i} \cos n_i x \quad (p=1, 2, \ldots)$$

находится целиком (и в «правильном» порядке) в одном из кусков

$$\sum_{i=\tau_k+1}^{\tau_{k+1}} c_{n_i} \cos n_i x$$

расписанного ряда (96). Следовательно, в силу (84), мы можем заключить, что у непрерывной функции $\varphi(x)$ ряд Фурье по системе $\cos m_\nu x$, т. е. расписанный ряд (96), не сходится на $[0,2\pi]$ по метрике L^q ни для какого $q>2$.

Аналогичные рассуждения показывают, что и ряд (96′) не сходится в метрике L^q ни для какого $q>2$. При этом, конечно, нужно будет опираться на неравенство (84′) вместо (84).

С другой стороны, в силу построения $\tau, \tau_2, \ldots$, мы можем заключить, что

$$\sum_{i=n_{j_s}^{(1)}}^{n_{j_s}^{(2)}} a_{n_i} \cos n_i x$$

находится целиком внутри «куска»

$$\sum_{i=\tau_s+1}^{\tau_{s+1}} a_{n_i} \cos n_i x$$

расписанного ряда (95). Поэтому, на основании (79), (80), ряд Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\cos m_\nu x\}$ не сходится на $[0,2\pi]$ по метрике L.

Основываясь на неравенствах (79′), (80′), мы можем при помощи аналогичных рассуждений убедиться в том, что ряд Фурье (95′) от функции $\bar{f}(x)$ не сходится на $[0,2\pi]$ по метрике L.

Обозначим

$$A_0^{(1)} = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, p_{\varepsilon_k}^{(1)}, \quad A_0^{(2)} = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, p_{\varepsilon_k}^{(2)}, \quad B_0^{(1)} = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, G_{\varepsilon_k}^{(1)}, \quad B_0^{(2)} = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, G_{\varepsilon_k}^{(2)}.$$

Ясно, что [см. (89), (89′)]

$$A_0^{(1)} \subset A_1 \text{ и } mA_0^{(1)} = mA_1,\ A_0^{(2)} \subset A_2 \text{ и } mA_0^{(2)} = mA_2,\ B_0^{(1)} \subset B_1,\ mB_0^{(1)} = mB_1,$$
$$B_0^{(2)} \subset B_2 \text{ и } mB_0^{(2)} = mB_2, \quad mA_0^{(1)} + mB_0^{(1)} = 2\pi,\ mA_0^{(2)} + mB_0^{(2)} = 2\pi.$$

Поэтому теорема 6 будет полностью доказана, если мы покажем, что расписанный ряд (95) ((95′)) неограниченно расходится в каждой точке $x_0 \in A_0^{(1)} + B_0^{(1)}$ ($x_0 \in A_0^{(2)} + B_0^{(2)}$). Пусть точка $x_0 \in A_0^{(1)}$. Это значит, что

$$x_0 \in p_{\varepsilon_{\mu_s}}^{(1)} \quad (\mu_1 < \mu_2 < \ldots). \tag{97}$$

Поэтому из (90) вытекает неравенство:

$$\left| \sum_{i=\tau_{\mu_s}+1}^{L_1^1(x_0)} a_{n_i} \cos n_i x_0 \right| \geqslant \mu_s + 1 \quad (\tau_{\mu_s} < L_1^1(x_0) \leqslant \tau_{\mu_s+1}), \tag{98}$$

где число $L_1^1(x_0)$ зависит еще от μ_s. А неравенство (98) влечет неограниченную расходимость расписанного ряда (95) в точке $x_0 \in A_0^{(1)}$ [см. (97)].

Если же мы будем пользоваться неравенствами (87) и (93), то получим неограниченную расходимость расписанного ряда (95) в точках $x_0 \in B_0^{(1)}$.

Аналогичные рассуждения показывают, что расписанный ряд (95′) неограниченно расходится в точках $x_0 \in A_0^{(2)} + B_0^{(2)}$. В этом случае нужно только основываться на соотношениях (90′), (87′), (93′). Теорема 6 доказана.

Замечание 6. Из доказательства теоремы 6 видно, что при определении функции $f(x)$ мы могли ее сделать равной нулю на отрезке $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$ при наперед заданном $\varepsilon > 0$.

Кроме того, можно было бы добиться и несуммируемости почти всюду переставленных рядов Фурье от функций $f(x)$ и $\bar{f}(x)$ наперед заданным методом Тёплица T. Но так как доказательство теоремы 6 и без того длинно, то мы сочли более целесообразным рассмотреть этот вопрос в другой работе.

Отметим, что для функций, аналитических внутри единичного круга, справедлива

ТЕОРЕМА 7. *Существует фиксированная переставленная степенная система функций* $\{z^{m_\nu}\}$, *обладающая следующими свойствами:*

1) *Найдется аналитическая в единичном круге функция*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu z^{m_\nu} \in H_p \ (\text{для всех } 0 < p < 2), \tag{64''}$$

являющаяся аналитической и на дуге $\Gamma = \{|z| = 1, 1 < \arg z < 2\pi - 1\}$, *причем* $\operatorname{Re} f(z)|_\Gamma = 0$, *такая, что ряд* (64″) *на единичной окружности почти всюду неограниченно расходится. Более того, ряд* (64″) *также не сходится в метрике L на единичной окружности.*

2) *Найдется функция*

$$\varphi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} e_\nu z^{m_\nu} \quad (|z| < 1), \tag{64'''}$$

аналитическая в $|z| < 1$, *непрерывная в* $|z| \leqslant 1$ *и такая, что ряд* (64‴) *на единичной окружности не сходится по метрике* L^p *ни для какого* $p > 2$.

То же заключение справедливо для действительной и мнимой частей рядов (64″) *и* (64‴).

Теорема 7 следует из теоремы 6.

§ 4. О сходимости и о базисах

Результаты настоящего параграфа будут получены как следствия теоремы 6 из § 3 или же как следствия применяемого там метода доказательства.

Из теоремы 6 непосредственно вытекает следующая

ТЕОРЕМА 8. *Существует фиксированная переставленная тригонометрическая система* $\{\cos m_\nu x, \sin m_\nu x\}$, *которая не является базисом в пространстве функций* $L^p(0, 2\pi)$ *ни для какого* $p \in [1, 2) + (2; \infty)$, *причем для* $1 \leqslant p < 2$ *это реализуется одной и той же функцией, принадлежащей* $L^q(0, 2\pi)$ *для всех* $1 \leqslant q < 2$, *а при* $2 < p < \infty$ *это реализуется одной непрерывной функцией, сопряженная к которой тоже непрерывна.*

В самом деле, за переставленную тригонометрическую систему возьмем систему функций $\{\cos m_\nu x, \sin m_\nu x\}$ из теоремы 6 § 3. Теорема 8 становится очевидной, если при $1 \leqslant p < 2$ мы возьмем функцию $f(x)$, а при $2 < p < \infty$ — функцию $\varphi(x)$ из теоремы 6.

Замечание 7. Из результатов Орлича ([6]) также можно получить, что переставленная тригонометрическая система не является базисом в L^p при $1 \leqslant p < 2$.

Что касается случая $2 < p < \infty$, то он у нас реализуется одной и той же непрерывной функцией $\varphi(x)$, сопряженная к которой тоже непрерывна. Это последнее, как нам представляется, не вытекает из результатов Орлича.

ТЕОРЕМА 9. *Если тригонометрический ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{99}$$

обладает тем свойством, что для каждой перестановки членов ряда (99) *существует число* $A > 0$ *и множество* E *с* $mE > 0$ *(число* A *и множество* E *могут зависеть от перестановки) такие, что*

$$\left|\sum_{s=1}^{N}(a_{k_s}\cos k_s x + b_{k_s}\sin k_s x)\right| \leqslant A$$

для всех $x \in E$, $N = 1,2,\ldots$, *то*:

1) *ряд* (99) *является рядом Фурье некоторой функции* $F(x) \in L^2(0,2\pi)$;

2) *функция* $F(x)$ *может не принадлежать ни к какому* $L^p(0,2\pi)$ *при* $p > 2$.

Утверждение 1) непосредственно вытекает из метода доказательства неограниченной расходимости почти всюду ряда (95).

Для доказательства утверждения 2) рассмотрим ряд [см. (65)]

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n}\ln^2 n} = \Phi(x) \quad (x \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi))\,. \tag{100}$$

В § 3 мы убедились, что ряд (100) является рядом Фурье функции $\Phi(x)$, которая принадлежит $L^2(0,2\pi)$ [см. (65)] и не принадлежит $L^q(0,2\pi)$ для каждого $q > 2$ [см. (69)]. Поэтому утверждение 2) будет доказано, если мы покажем, что ряд (100) безусловно сходится почти всюду на $[0,2\pi]$. Но в силу теоремы Орлича [см. (1), стр. 170] ряд (100) безусловно сходится почти всюду, ибо, положив $\omega(n) = (\log_2 n)^{\frac{1}{2}}$ и $n_k = 2^{k^3}$, мы получим:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}\ln^2 n}\right)^2 \ln^2 n\,(\log_2 n)^{\frac{1}{2}} < \infty\,, \qquad \ln n_{k+1} \leqslant 8\,\ln n_k,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\omega(n_k)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} < \infty\,,$$

т. е. условия теоремы Орлича выполнены, что и требовалось доказать.

Следствие 6. *Если тригонометрический ряд* (99) *безусловно сходится почти всюду на* $(0,2\pi)$, *то он является рядом Фурье функции* $F(x) \in L^2\ (0,2\pi.)$

Это следствие представляет собой частный случай теоремы 9 (см. утверждение 1).

Замечание 8. Следствие 6 также легко вывести из следующей теоремы Орлича (5):

если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится по мере на* $[a,\ b]$ *при любом порядке членов, то почти всюду на* $[a,\ b]$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^2(x) < \infty$.

Следствие 7. *Если* $f(x) \in L^p(0,2\pi)\,(1 \leqslant p < 2)$ *и* $f(x) \overline{\in} L^2(0,2\pi)$, *то члены ряда Фурье функции* $f(x)$ *можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд, а также его сопряженный, неограниченно расходился почти всюду на* $(0,2\pi)$. *

* См. замечание 6.

Следствие 7 вытекает из теоремы 9.

Таким образом, ряды Фурье по переставленной тригонометрической системе от функций $f(x)\in L^p(0,2\pi)$ при $1\leqslant p<2$, вообще говоря, почти всюду неограниченно расходятся.

Поэтому справедливо

Следствие 8. *Принцип локализации Римана для рядов Фурье (по переставленной тригонометрической системе) от функций $f(x)\in L^p(0,2\pi)$ при $1\leqslant p<2$, вообще говоря, не верен.*

Следствие 8 вытекает из следствия 7. Более того, следствие 8 заключено в теореме 6, ибо там функция $f(x)\in L^p(0,2\pi)$ для всех $1\leqslant p<2$, $f(x)=0$, при $x\in[1,2\pi-1]$ и тем не менее ее ряд Фурье по системе $\{\cos m_k x\}$ был почти всюду неограниченно расходящимся, в том числе и на отрезке $[1,2\pi-1]$.

Замечание 9. Некоторые из полученных результатов можно перенести и на ортогональные системы. Например, справедливо утверждение: *если $\psi_n(t)$ — полная ортонормированная система на $[a, b]$ такая, что для любого $E\subset(a, b)$ с $mE>0$*

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_E \psi_n^2(t)\,dt>0,$$

то для любой функции $f(x)\in L^p(a, b)\,(1\leqslant p<2)$, $f(x)\,\overline{\in}\,L^2(a, b)$, члены ее ряда Фурье по системе $\{\psi_n(t)\}$ можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд почти всюду на $[a, b]$ неограниченно расходился.

Поступило
11.X.1957

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kaczmarz S., Steinhaus H., Theorie der Orthogonalreihen, Warszawa—Lwow, 1935.

[2] Колмогоров А. Н., Меньшов Д. Е., Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales, Math. Zeitschr., 26 (1927), 432—441.

[3] Marcienkiewicz J., Sur la convergence des séries orthogonales, Studia Math., 6 (1936), 39—45.

[4] Orlicz W., Einigen Gegenbeispiele zur Konvergenztheorie der allgemeinen Orthogonalentwicklungen, Studia Math., 6 (1936), 98—103.

[5] Orlicz W., Über die Divergenz von allgemeinen Orthogonalreihen, Studia Math., 4 (1933), 27—32.

[6] Orlicz W., Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen. I, II, Studia Math., 4 (1933), 33—37, 41—47.

[7] Стечкин С. Б., Об абсолютной сходимости ортогональных рядов. I, Матем. сборн., 29 (71): 1 (1951), 225—232.

[8] Стечкин С. Б., Об абсолютной сходимости рядов Фурье (второе сообщение), Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 19 (1955), 221—246.

[9] Ульянов П. Л., О некоторых эквивалентных условиях сходимости рядов и интегралов, Успехи матем. наук, 8, вып. 6 (58) (1953), 133—141.

[10] Ульянов П. Л., О безусловной сходимости почти всюду, Матем. сборн., 40 (82):1 (1956), 95—100.

[11] Ульянов П. Л., О перестановках тригонометрической системы, Доклады Ак. наук СССР, 116, № 4, (1957), 568—571.

[12] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 543—562

Г. Ц. ТУМАРКИН и С. Я. ХАВИНСОН

О СУЩЕСТВОВАНИИ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ ОДНОЗНАЧНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ЗАДАННЫМ МОДУЛЕМ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

(*Представлено академиком* **В. И. Смирновым**)

В работе устанавливается теорема о возможности устранения многозначности у любой аналитической функции с однозначным модулем и без точек ветвления в n-связной области G путем подключения к функции множителя, являющегося непрерывной в $\overline{G}$ аналитической функцией, модуль значений которой равен единице и которая имеет в G не более, чем $n-1$ нуль. При помощи этой теоремы решается до конца вопрос о существовании в многосвязных областях аналитических функций ряда важных классов с заданным на границе модулем граничных значений.

Введение

Пусть рассматривается единичный круг K. Тогда, как известно [см. например, (1), гл. II], необходимое и достаточное условие для того, чтобы заданная на единичной окружности функция $\rho(e^{i\theta})$ совпадала почти всюду на окружности с модулем граничных значений некоторой функции ограниченного вида (класса A), состоит в том, что

$$\int_0^{2\pi} |\ln \rho(e^{i\theta})|\, d\theta < \infty.$$

Таких функций с заданным модулем получается бесконечно много и среди них наиболее простой является функция

$$R_\rho(w) = \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w} \ln \rho(e^{i\theta})\, d\theta.$$

Эта функция не имеет нулей и входит в класс D, введенный впервые В. И. Смирновым [см. (2), (1) и § 4 настоящей работы], причем среди функций класса D с таким же модулем на границе $R_\rho(w)$ имеет наибольший модуль в любой точке w. Функции, обладающие последним свойством, иногда называют функциями максимального модуля.

Случай, когда G — произвольная односвязная область со спрямляемой границей, легко сводится к случаю круга при помощи конформного

отображения. Условие существования функции класса A с заданным на границе G модулем $\rho(\zeta)$ будет иметь вид:

$$\int_{\Gamma} |\ln \rho(\zeta)| \, |\psi'(\zeta) \, d\zeta| < \infty,$$

где $w=\psi(z)$ — отображение G на K.

Перейдем к случаю n-связной области G.

Если для данного случая мы будем строить функцию с заданным на границе Γ модулем $\rho(\zeta)$ по формуле, аналогичной формуле для $R_{\rho}(w)$ в круге, с естественной заменой ядра Шварца на комплексное ядро Грина, то получим функцию, которая, вообще говоря, будет многозначной

В работе Локки ([3]) для n-связной области G с аналитической границей доказывается существование функции $f(z)$, однозначной и аналитической в G, граничные значения которой почти везде на Γ совпадают с $\rho(\zeta)$, причем $\rho(\zeta)$ ограничена с двух сторон:

$$0 < m \leqslant \rho(\zeta) \leqslant M < \infty.$$

Из рассуждений Локки легко заключить (хотя он сам этого явно не формулирует), что построенная им функция с граничным модулем $\rho(\zeta)$ входит в класс A. Из наших результатов будет, в частности, вытекать, что даже при более общем допущении

$$\int_{\Gamma} |\ln \rho(\zeta)| \frac{\partial g}{\partial n} \, ds < \infty$$

построенная нами функция с модулем $\rho(\zeta)$ входит в класс $D \subset A$. В случае же, когда $\rho(\zeta) \leqslant M < \infty$, построенная нами функция оказывается просто ограниченной в G.

Из доказываемых ниже теорем будет вытекать также (и с усилением) известный результат П. Мирберга ([4]), доказавшего в 1930 г., что, какова бы ни была отрицательная гармоническая функция $u(z)$ в конечносвязной области G, всегда найдется однозначная в этой области аналитическая функция $f(z)$, для которой

$$\ln |f(z)| < u(z).$$

Этот результат Мирберга использовался, в частности, для доказательства представимости мероморфной функции с ограниченной характеристикой в конечносвязной области G в виде частного двух однозначных ограниченных функций [см. например, ([5])]. Заметим, что в работе ([6]) автор, получив обычными рассуждениями, как в случае круга, представление мероморфной функции с ограниченной характеристикой в виде частного двух ограниченных функций, не отмечает, что эти функции могут оказаться многозначными.

Кроме построения функций класса D с заданным на границе модулем мы решаем ту же задачу для функций других важных классов, причем

накладываемые на модуль $\rho(\zeta)$ условия не могут быть для этих классов улучшены. Все эти построения базируются на теореме § 1, утверждающей, что если многозначная функция $F(z)$ имеет однозначный модуль в n-связной области G, то введением дополнительного множителя

$$\exp\left\{-\sum_{k=1}^{m}[g(z,\ z_k)-ih(z,\ z_k)]\right\},$$

где $g(z,\ z_k)$ — функция Грина области G, $-h(z,\ z_k)$ — сопряженная к ней функция, $m\leqslant n-1$, z_k — некоторые специально подобранные точки G, можно получить новую функцию $F^*(z)$, являющуюся уже однозначной. Важнейшим обстоятельством в приложениях этой теоремы является то, что указанный дополнительный множитель имеет на границе области модуль, равный единице.

Содержание настоящей работы разбито на шесть параграфов.

В § 1 дается точная формулировка упомянутой только что теоремы и начало доказательства этой теоремы.

В § 2 изучается одна специальная экстремальная задача, свойства решения которой нужны для доказательства теоремы § 1.

В § 3 излагается окончание доказательства теоремы § 1.

§ 4 посвящен построению в области со спрямляемой границей функций различных классов с заданным на границе модулем.

В § 5 в качестве приложения полученных в предыдущих параграфах результатов дается новое простое доказательство теоремы о представлении функции ограниченного вида (класса A) в виде частного двух ограниченных функций.

Наконец, § 6 посвящен распространению результатов § 4 на области с неспрямляемой границей.

§ 1. Теорема об одном способе устранения многозначности

ТЕОРЕМА 1.1. *Если $F(z)$ — аналитическая многозначная функция с однозначным модулем, не имеющая точек ветвления в n-связной области G, то найдется не более чем $n-1$ точек $z_1,\ z_2,\ldots,\ z_m$, $m\leqslant n-1$, таких, что функция*

$$F^*(z)=F(z)\exp\left\{-\sum_{k=1}^{m}[g(z,\ z_k)-ih(z,\ z_k)]\right\}, \tag{1.1}$$

где $g(z,\ z_k)$ — функция Грина с полюсом z_k области G, а $-h(z,z_k)$ — сопряженная к $g(z,\ z_k)$, будет однозначной в области G.

Доказательство этой теоремы требует некоторых предварительных рассмотрений. Мы можем ограничиться случаем, когда G есть круговая область *. Общий случай получается тогда конформным отображением G на каноническую круговую область K.

* Круговой областью мы называем область, граница которой состоит из конечного числа полных окружностей.

Сначала, используя обычные рассуждения, применяемые при построении функций, конформно отображающих многосвязные области на канонические [см., например, (7), гл. VI, § 4 и (8), приложение § 2], мы покажем, что найдется аналитическая в K функция $F_1(z)$, имеющая однозначный модуль, сохраняющий постоянное значение на каждом из контуров λ_i, составляющих границу K, такая, что периоды аргумента $F_1(z)$ при обходе граничных контуров будут такие же, как и периоды аргумента $F(z)$.

Далее, решая некоторую экстремальную задачу, мы докажем, что существует такая система точек $z_1, z_2, \ldots, z_m$, $m \leqslant n-1$, что функция

$$F_1(z) \exp\left\{-\sum_{k=1}^{m} [g(z,z_k) - ih(z,z_k)]\right\} \tag{1.2}$$

будет однозначной в K. А тогда функция $F^*(z)$, определенная формулой (1.1), также будет однозначной в K.

ЛЕММА 1.1. *Какова бы ни была аналитическая в области K функция $F(z)$ с однозначным модулем, не имеющая внутри K точек разветвления, найдется такая система чисел $\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}$, что функция*

$$\widetilde{F}(z) = F(z) \exp\left\{\sum_{i=1}^{n-1} \rho_i w_i(z)\right\}, \tag{1.3}$$

где $w_i(z) = \omega_i(z) + i\Omega_i(z)$, $\omega_i(z)$ — гармоническая мера контура λ_i границы Λ области K, а $\Omega_i(z)$ — ее сопряженная, будет однозначной в K.

Доказательство. Не нарушая общности, мы можем считать K конечной областью, а λ_n — внешним контуром. Обозначим через P_{il} приращение функции Ω_i при обходе λ_l в положительном направлении. Тогда, как известно, определитель $|P_{il}|$, составленный из чисел P_{il}, $i = 1, \ldots, n-1$, $l = 1, \ldots, n-1$, отличен от нуля [см., например, (8) или (7)]. Поэтому, обозначая через δ_l приращение, которое получает $\arg F(z)$ при обходе λ_l, мы получаем, что система линейных уравнений с неизвестными $\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}$

$$\sum_{i=1}^{n-1} P_{il}\rho_i = -\delta_l, \quad l = 1, \ldots, n-1, \tag{1.4}$$

имеет решение. Беря в качестве ρ_i в формуле (1.3) решение системы (1.4), убеждаемся, что $\arg \widetilde{F}(z)$ при обходе $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ будет иметь периоды, равные нулю.

§ 2. Решение одной экстремальной задачи

Нам потребуется решить следующую экстремальную задачу. Пусть в круговой канонической области K рассматривается класс B_ρ однозначных аналитических и ограниченных функций $f(z)$, удовлетворяющих

на границе Λ области K неравенствам:

$$|f(\zeta)| \leqslant \rho_i, \quad \zeta \in \lambda_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где λ_i — граничные контуры, а $\rho_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$ — заданные числа. Требуется охарактеризовать функцию класса B_ρ, имеющую наибольший модуль в заданной точке $z_0 \in K$. Эта экстремальная задача является частным случаем тех задач, которые изучены С. Я. Хавинсоном в работе (10).

Мы предпочитаем, однако, дать здесь полное доказательство свойств экстремальной функции как из соображений связности изложения, так и потому, что для рассматриваемого частного случая рассуждения могут быть сделаны особенно изящными. Сошлемся на две леммы функционального анализа, являющиеся следствием теоремы Хана — Банаха.

ЛЕММА 2.1. *Пусть $F = \{f\}$ — пространство типа (B) и F_1 — линейное многообразие в F. Пусть $f_0 \in F - F_1$ и d — расстояние от f_0 до F_1. Существует линейный функционал $l(f)$ со свойствами:*

1) $l(f_0) = 1$,
2) $l(f) = 0, \ f \in F_1$,
3) $\|l\| = \frac{1}{d}$

[см., например, (11), стр. 163].

ЛЕММА 2.2. *Пусть $F = \{f\}$ — пространство типа (B), F_1 — линейное многообразие в F, F^* — сопряженное пространство к F и $\mathfrak{M} \subset F^*$ — множество всех линейных функционалов над F, обращающихся в нуль на F_1. Тогда для произвольного линейного функционала $l \in F^*$ имеем:*

$$\|l\|_{F_1} = \inf_{m \in \mathfrak{M}} \|l - m\|_{F^*},$$

причем существует $m^* \in \mathfrak{M}$, для которого нижняя грань достигается.

Эта лемма, которую обычно называют соотношением двойственности, в последнее время широко применялась при решении экстремальных задач в теории аналитических функций [см. (9), (10), (12) — (15)]. В работах по теории приближений функций действительного переменного подобные леммы (в более специализированном виде) применялись еще ранее [см. (16) и (17)].

Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.1.

$$1. \ \sup_{f \in B_\rho} |f(z_0)| = \inf_{\varphi \in E_1} \int_\Lambda \rho(\zeta) \left| \frac{1}{\zeta - z_0} - \varphi(\zeta) \right| ds, \ * \tag{2.1}$$

где $\rho(\zeta) = \rho$, $\zeta \in \lambda_i$.

* Класс $E_1 = E_1(K)$ состоит, как и в односвязном случае, из функций $\varphi(z)$, представимых интегралом Коши через свои граничные значения (см. § 4).

2. *В обеих частях равенства* (2.1) *существуют экстремальные функции* $f^*(z) \in B_\rho$ *и* $\varphi^*(z) \in E_1$, *связанные на* Λ *соотношением*:

$$f^*(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta - z_0} - \varphi^*(\zeta)\right] d\zeta = \rho_i e^{i\alpha}\left[\frac{1}{\zeta - z_0} - \varphi^*(\zeta)\right] ds, \qquad (2.2)$$

где $\zeta \in \lambda_i$, α — *вещественное число*.

3. $f^*(z)$ *единственна с точностью до постоянного множителя, по модулю равного единице, аналитична в* K, *имеет в* K *не более чем* $n-1$ *нуль* (n — *связность* K) *и удовлетворяет условию*:

$$|f^*(\zeta)| = \rho_i, \quad \zeta \in \lambda_i. \qquad (2.3)$$

Введем следующие обозначения:

C — пространство непрерывных на Λ функций с нормой

$$\|f\| = \max |f(\zeta)|, \quad \zeta \in \Lambda.$$

C_A — класс аналитических непрерывных в $\bar{K}$ функций.

$\widetilde{C}_A$ — подпространство C, состоящее из функций вида $\frac{f_1(\zeta)}{\rho(\zeta)}$, где $f_1(\zeta) \in C_A$.

C_ρ — $f(z) \in C_\rho$, если $f(z) \in C_A$ и $\frac{|f(\zeta)|}{\rho(\zeta)} \leqslant 1$.

L_1 — пространство суммируемых на Λ функций.

$\widetilde{E}_1$ — подпространство в L_1, состоящее из функций вида $f(\zeta) = f_1(\zeta)\rho(\zeta)$, где $f_1(\zeta)$ — граничные значения $f_1(z) \in E_1$.

Найдем вид линейных функционалов $m(f)$,

$$m(f) = \int_\Lambda f(\zeta)\, dG(\zeta),$$

над C, обращающихся в нуль на $\widetilde{C}_A$. Вводя функцию

$$G_1(\zeta) = \int [\rho(\zeta)]^{-1}\, dG(\zeta),$$

перепишем $m(f)$, $f \in \widetilde{C}_A$, так:

$$m(f) = \int_\Lambda f_1(\zeta)\, [\rho(\zeta)]^{-1}\, dG(\zeta) = \int_\Lambda f_1(\zeta)\, dG_1(\zeta),$$

где $f_1(\zeta) \in C_A$. Полагая

$$f_1(\zeta) = \frac{1}{\zeta - z}, \quad z \,\bar{\in}\, \bar{K},$$

из условия, что $m(f) \equiv 0$ на $\widetilde{C}_A$, найдем:

$$\int_\Lambda \frac{dG_1(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \equiv 0, \quad z \,\bar{\in}\, K.$$

Отсюда следует, что

$$G_1(\zeta) = \int \varphi(\zeta)\, d\zeta,$$

где $\varphi(\zeta) \in E_1$. Для односвязной области это хорошо известный факт (см., например, ([1]), гл. III]. Случай конечносвязной области без труда сводится к случаю односвязной [см. ([10])].

Итак, всякий линейный функционал $m(f)$, обращающийся тождественно в нуль на $\widetilde{C}_A$, имеет вид:

$$m(f) = \int_\Lambda f(\zeta)\rho(\zeta)\varphi(\zeta)\,d\zeta, \quad \varphi(\zeta)\in E_1$$
$$(dG(\zeta) = \rho(\zeta)\,dG_1(\zeta) = \rho(\zeta)\varphi(\zeta)\,d\zeta).$$

Применим к функционалу

$$l(f) = \int_\Lambda f(\zeta)\,\rho(\zeta)\frac{1}{\zeta - z_0}\,d\zeta$$

лемму 2.2. Имеем:

$$\|l\|_{\widetilde{C}_A} = \sup_{f\in\widetilde{C}_A,\ \|f\|\leq 1}\left|\int_\Lambda f(\zeta)\rho(\zeta)\frac{1}{\zeta - z_0}\,d\zeta\right| = \sup_{f\in C_\rho}\left|\int_\Lambda f(\zeta)\frac{1}{\zeta - z_0}\,d\zeta\right| =$$
$$= \inf_{\varphi\in E_1}\int_\Lambda\left|\rho(\zeta)\frac{1}{\zeta - z_0} - \rho(\zeta)\varphi(\zeta)\right|ds = \inf_{\varphi\in E_1}\int_\Lambda \rho(\zeta)\left|\frac{1}{\zeta - z_0} - \varphi(\zeta)\right|ds \qquad (2.4)$$

и при этом существует $\varphi^*(z)\in E_1$, для которой нижняя грань достигается. Так как для любой $f(z)\in B_\rho$ и любой $\varphi(z)\in E_1$ $(f(z)\varphi(z)\in E_1)$ имеет место соотношение

$$\left|\int_\Lambda f(\zeta)\frac{1}{\zeta - z_0}\,ds\right| = \left|\int_\Lambda f(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta - z_0} - \varphi(\zeta)\right]ds\right| \leqslant \int_\Lambda \rho(\zeta)\left|\frac{1}{\zeta - z_0} - \varphi(\zeta)\right|ds$$

и так как, кроме того, $C_\rho\subset B_\rho$, то равенство (2.4) распространяется и на B_ρ:

$$\sup_{f\in B_\rho}|f(z_0)| = \sup_{f\in B_\rho}\left|\int_\Lambda f(\zeta)\frac{1}{\zeta - z_0}\,d\zeta\right| = \inf_{\varphi\in E_1}\int_\Lambda \rho(\zeta)\left|\frac{1}{\zeta - z_0} - \varphi(\zeta)\right|ds$$

и при этом существует $\varphi^*(z)\in E_1$, для которой нижняя грань достигается.

Так как $\frac{\rho(\zeta)}{\zeta - z_0}\in L_1 - \widetilde{E}_1$, то, по лемме 2.1, найдется над L_1 функционал $r(\psi)$, $\psi\in L_1$, со свойствами:

$$r(\psi) = 0, \quad \psi\in\widetilde{E}_1,$$
$$\|r\| = \left[\inf_{\psi\in\widetilde{E}_1}\int_\Lambda\left|\frac{\rho(\zeta)}{\zeta - z_0} - \psi(\zeta)\right|ds\right]^{-1} = \left[\inf_{\varphi\in E_1}\int_\Lambda \rho(\zeta)\left|\frac{1}{\zeta - z_0} - \varphi(\zeta)\right|ds\right]^{-1} = d^{-1},$$
$$r\left[\frac{\rho(\zeta)}{\zeta - z_0}\right] = 1.$$

Но, как известно [см. ([11])], $r(\psi)$ имеет вид:

$$r(\psi) = \int_\Lambda \alpha(\zeta)\psi(\zeta)\,\alpha\zeta,$$

где $\alpha(\zeta)$ ограничена на Λ и $\|r\| = \operatorname{vrai\,max}|\alpha(\zeta)| = d^{-1}$.

Для $\psi\in\widetilde{E}_1$ получаем:

$$\int_\Lambda \alpha(\zeta)\psi(\zeta)\,d\zeta = \int_\Lambda \alpha(\zeta)\rho(\zeta)\varphi(\zeta)\,d\zeta = 0, \quad \varphi(\zeta)\in E_1. \qquad (2.5)$$

Как и в односвязном случае, можно доказать, что отсюда следует совпадение $\alpha(\zeta)\rho(\zeta)$ с граничными значениями ограниченной аналитической в K функции $\widetilde{\alpha}(z)$.

Положим

$$f^*(z) = \widetilde{\alpha}(z) \cdot d.$$

Тогда очевидно, что $f^*(z) \in B_\rho$:

$$|f^*(\zeta)| = d\,|\alpha(\zeta)\rho(\zeta)| \leqslant d \cdot d^{-1}\rho(\zeta).$$

Таким образом,

$$l(f^*) = \int\limits_\Lambda \frac{f^*(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z_0} = d\int\limits_\Lambda \frac{\alpha(\zeta)\,\rho(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z_0} = d = \inf_{\varphi \in E_1} \int\limits_\Lambda \rho(\zeta)\left|\frac{1}{\zeta - z_0} - \varphi(\zeta)\right| ds. \quad (2.6)$$

Мы использовали здесь равенство

$$\int\limits_\Lambda \frac{\alpha(\zeta)\,\rho(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z_0} = r\left[\frac{\rho(\zeta)}{\zeta - z_0}\right] = 1$$

[см. (2.5)].

Сравнивая (2.4) и (2.6), мы видим, что $f^*(z)$ есть экстремальная функция для (2.1). Для любой экстремальной функции $f^*(z)$ мы можем записать:

$$\left|\int\limits_\Lambda f^*(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z_0}\right| = \left|\int\limits_\Lambda f^*(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta - z_0} - \varphi^*(\zeta)\right] d\zeta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_\Lambda |f^*(\zeta)|\left|\frac{1}{\zeta - z_0} - \varphi^*(\zeta)\right| ds \leqslant \int\limits_\Lambda \rho(\zeta)\left|\frac{1}{\zeta - z_0} - \varphi^*(z)\right| ds. \quad (2.7)$$

Из (2.1) следует, что всюду в (2.7) имеет место знак равенства, а это возможно лишь при выполнении соотношений (2.2) и (2.3).

Из соотношения (2.2) следует единственность экстремальной функции $f^*(z)$ с точностью до множителя $e^{i\alpha}$. В самом деле, написав соотношение (2.2) для двух различных экстремалей $f_1^*(z)$ и $f_2^*(z)$ в классе B_ρ, но с одной и той же экстремалью $\varphi^*(z) \in E_1$, легко найдем, что на Λ

$$f_1^*(\zeta) = e^{i\alpha} f_2^*(\zeta),$$

а тогда и тождественно

$$f_1^*(z) = e^{i\alpha} f_2^*(z).$$

Докажем, что $f^*(z)$ аналитична в $\overline{K}$. Прежде всего, из положительности на Λ дифференциала

$$f^*(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta - z_0} - \varphi^*(\zeta)\right] d\zeta = \Phi(\zeta)\,d\zeta \geqslant 0 \quad \left(\Phi(z) = f^*(z)\left[\frac{1}{z - z_0} - \varphi^*(z)\right]\right)$$

при помощи обычных методов выводится аналитическая продолжимость $\Phi(z)$ за границу Λ. Действительно, $\Phi(z)$ — аналитическая функция класса E_1 вблизи Λ, а свойства функций класса E_1 позволяют, как легко видеть, сохранить классическое доказательство принципа симметрии Римана — Шварца. Следовательно, $\Phi(z)$ имеет на Λ конечное число нулей. Возьмем дугу $\gamma \subset \Lambda$ между двумя соседними (возможными) нулями $\Phi(z)$. Пристроим к ней односвязную область $d \subset K$, граница

которой состоит из γ, отрезков радиусов окружности Λ_i и концентрической с γ дуги. Функции $f^*(z)$ и $\frac{1}{f^*(z)}$ входят в $D(d)$*. Для $f^*(z)$ это утверждение очевидно, а

$$\frac{1}{f^*(z)} = \frac{1}{\Phi(z)}\left[\frac{1}{z-z_0} - \varphi^*(z)\right],$$

причем $\frac{1}{\Phi(z)}$, будучи аналитической в $\bar{d}$, за исключением двух полюсов, лежащих на границе, входит в класс $D(d)$ и $\frac{1}{z-z_0} - \varphi^*(z)$ тоже входит в класс $D(d)$.

Действительно, $\varphi^*(z) \in E_1(K)$, а $E_1(K) \subset D(K)$; последнее включение хорошо известно для круга и может быть доказано для n-связной круговой области. Поэтому

$$\varphi^*(z) \in D(d) \supset D(K).$$

Пересадив функцию $f^*(z)$ из области d в единичный круг, замечаем, что в силу свойств функций класса D [см. (1)], логарифм модуля пересаженной функции представим интегралом Пуассона. Используя то обстоятельство, что

$$\ln|f^*(z)| = \ln\rho_i = \text{const}$$

на γ, мы получаем возможность продолжить гармоническую функцию $\ln|f^*(z)|$ через γ. Следовательно, $f^*(z)$ аналитически продолжается через γ. Аналогично, $f^*(z)$ продолжается и через другие дуги, подобные γ. При этом, так как продолжение осуществляется по классическому принципу симметрии, продолженная функция $f^*(z)$ будет, как нетрудно заметить, однозначной аналитической функцией с возможными особенностями (однозначного характера) лишь в нулях $\Phi(z)$. Но так как $f^*(z)$ ограничена в K и, следовательно, в продолженной области, то $f^*(z)$ совсем не имеет особенностей на Λ. Итак, $f^*(z)$ аналитична в $\bar{K}$.

Нам остается оценить число нулей $f^*(z)$. Из положительности дифференциала

$$f^*(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta-z_0} - \varphi^*(\zeta)\right]d\zeta = \Phi(\zeta)\,d\zeta \geqslant 0$$

выводим, что

$$\underset{\Lambda}{\Delta}\arg\Phi(\zeta) = 2\pi(n-2).$$

Так как $\Phi(z)$ — мероморфная в K функция с единственным полюсом первого порядка в точке z_0, то $\Phi(z)$ имеет ровно $n-1$ нуль. Следовательно, $f^*(z)$ имеет не более, чем $n-1$ нуль.

Теорема полностью доказана.

§ 3. Окончание доказательства теоремы § 1

Вернемся к доказательству теоремы, сформулированной в § 1. Пусть в круговой n-связной области K задана многозначная аналитическая

* Определение и свойства класса D в односвязном случае см. в (2), а также в (1). Для многосвязной области определение класса D см. в § 4 настоящей работы; это последнее определение применимо и в односвязном случае.

функция $F(z)$, модуль которой является однозначным в K. Согласно лемме 1.1, найдется функция $F_1(z)$,

$$F_1(z) = \exp \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k^* w_k(z) \quad *, \tag{3.1}$$

аргумент которой получает при обходе граничных контуров λ_i, $i=1,\ldots,n$, такие же приращения, как и аргумент $F(z)$. Из формулы (3.1) следует, что

$$\begin{aligned} |F_1(\zeta)| &= e^{\rho_k^*}, \quad \zeta \in \lambda_k, \quad k = 1, \ldots, n-1, \\ |F_1(\zeta)| &= 1, \qquad \zeta \in \lambda_n. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Рассмотрим класс B_{e^ρ}, состоящий из аналитических, однозначных и ограниченных внутри K функций $f(z)$ таких, что $|f(\zeta)| \leqslant e^{\rho_k^*}$ при $\zeta \in \lambda_k$, где $k = 1, \ldots, n$, $\rho_n = 0$. Тогда, как доказано в теореме 2.1, функция $f^*(z)$, реализующая экстремум в задаче о

$$\sup_{f \in B_{e^{\rho^*}}} \left| \int_\Lambda \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z_0} \right|,$$

будет аналитической функцией в $\overline{K}$, имеющей в K не более, чем $n-1$ нуль, причем $|f(\zeta)| = e^{\rho_k}$ при $\zeta \in \Lambda_k$. Обозначая нули $f^*(z)$ через $z_1, \ldots, z_m$, $m \leqslant n-1$, мы можем представить $f^*(z)$ в виде:

$$f^*(z) = \exp\left[-\sum_{k=1}^{m} g(z, z_k) - ih(z, z_k)\right] \cdot \exp \sum_{k=1}^{n} \rho_k^* w_k(z).$$

В самом деле,

$$\ln|f^*(z)| + \sum_{k=1}^{m} g(z, z_k)$$

— гармоническая в области $\overline{K}$ функция, имеющая на граничном контуре λ_k значение ρ_k^*. Отсюда легко вытекает, что

$$\ln|f^*(z)| + \sum_{k=1}^{m} g(z, z_k) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k^* \omega_k(z).$$

Действительно, функции, стоящие в обеих частях доказываемого равенства, гармоничны в $\overline{K}$ и имеют одинаковые значения на границе K (равны ρ_i^* на контуре γ_i).

Таким образом, оказывается, что функция

$$F_1(z) = \exp \sum_{k=1}^{m} \rho_k^* w_k(z)$$

становится однозначной после умножения ее на

$$\exp\left[-\sum_{k=1}^{m} (g(z, z_k) - ih(z, z_k))\right].$$

---

* Здесь ρ_k^* — числа, противоположные по знаку числам ρ_k, используемым в лемме 1.2.

Но так как характер многозначности аргумента $F(z)$ таков же, как и аргумента $F_1(z)$, то отсюда заключаем, что и функция

$$F(z) \cdot \exp\left\{-\sum_{k=1}^{m}\left[g(z, z_k) - ih(z, z_k)\right]\right\}$$

будет однозначной в G, что требовалось доказать.

§ 4. Построение аналитических функций с заданным на границе модулем

Перейдем к построению в конечносвязной области G однозначных аналитических функций, модуль граничных значений которых совпадает (почти всюду) с заранее заданной функцией.

Мы будем рассматривать следующие классы однозначных аналитических в области G функций.

Класс $A(G)$. $f(z) \in A(G)$, если субгармоническая функция $\ln^+|f(z)|$ имеет в G гармоническую мажоранту. Класс $A(G)$ является хорошо известным классом функций ограниченного вида (ограниченной характеристики), введенным Р. Неванлинна [см. ([18])].

Класс $D(G)$. Пусть $M > 0$. Обозначим через $U^M(z)$ наилучшую гармоническую мажоранту субгармонической функции $\ln^+\left|\frac{f(z)}{M}\right|$. Мы скажем, что $f(z) \in D(G)$, если $U^M(z) \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} 0$ внутри G. Класс $D(G)$ в многосвязных областях впервые изучался нами в работе ([19]), где, в частности, даны другие определения этого класса.

Для случая, когда G — единичный круг или, вообще, односвязная область, класс $D(G)$, как можно доказать, совпадает с классом, рассматривавшимся В. И. Смирновым ([2]) [см. также ([1])].

Классы $H_p(G)$, $p > 0$. $f(z) \in H_p(G)$, если субгармоническая функция $|f(z)|^p$ имеет в G гармоническую мажоранту.

Для классов $H_p(G)$, при любом $p > 0$ имеют место включения:

$$H_p(G) \subset D(G) \subset A(G).$$

Для произвольных областей классы $H_p(G)$ изучались в работах ([20]), ([21]), ([19]).

Классы $E_p(G)$, $p > 0$. $f(z) \in E_p(G)$, если существует последовательность сложных контуров $\{\Gamma_j\}$, $\{\Gamma_j\} \subset G$, сходящихся к Γ — границе G, такая, что

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} \int_{\Gamma_j} |f(z)|^p\, ds < +\infty.$$

В случае односвязных областей классы $E_p(G)$ изучались в работах ([2]), ([22]) [см. также ([1]), гл. III].

В случае многосвязных областей классы E_p изучались нами. В одной из наших работ показано (этот факт хорошо известен для односвязных областей), что для того чтобы $f(z) \in E_p(G)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(z) / \sqrt[p]{\psi'(z)} \in H_p(G),$$

где $w = \psi(z)$ — конформное отображение области G на круговую каноническую область K.

Если G — n-связная область со спрямляемой границей Γ, то функции любого из перечисленных классов имеют почти везде на Γ угловые граничные значения. А именно, имеет место следующая теорема [см. ([19])].

ТЕОРЕМА 4.1. *Функция $f(z)$, входящая в один из классов $A(G)$, $D(G)$, $H_p(G)$, $E_p(G)$, имеет почти везде на Γ угловые граничные значения, которые удовлетворяют следующим условиям:*

Если $f(z) \in A(G)$ или $f(z) \in D(G)$, то

$$\int_\Gamma |\ln|f(\zeta)|| \frac{\partial g}{\partial n} ds < +\infty. \tag{4.1}$$

Если $f(z) \in H_p(G)$, то выполняется (4.1) и, кроме того,

$$\int_\Gamma |f(\zeta)|^p \frac{\partial g}{\partial n} ds < +\infty. \tag{4.2}$$

Если $f(z) \in E_p(G)$, то выполняется (4.1) и, кроме того,

$$\int_\Gamma |f(\zeta)|^p ds < +\infty. \tag{4.3}$$

Доказательство. Чтобы доказать неравенство (4.1), проще всего поступить следующим образом. Отобразим конформно G на круговую каноническую область K и воспользуемся инвариантностью класса $A(G)$ при конформных отображениях. Дифференциал $\frac{\partial g}{\partial n} ds$ остается при этом инвариантным, ибо он с точностью до множителя совпадает с дифференциалом гармонической меры множеств на границе области, а гармоническая мера — инвариант конформного отображения. Таким образом, нужно доказать соотношение

$$\int_\Lambda |\ln|f(\zeta)|| \frac{\partial g}{\partial n} ds < +\infty. \tag{4.4}$$

для функции $f(z) \in A(K)$, где Λ — граница K. Но соотношение (4.4) в нашем случае эквивалентно более простому неравенству:

$$\int_\Lambda |\ln|f(\zeta)|| ds < +\infty, \tag{4.5}$$

так как K ограничено аналитическими кривыми (окружностями λ_i) и $0 < C_1 \leqslant \frac{\partial g}{\partial n} \leqslant C_2 < +\infty$ на Λ. Однако функция $f(z) \in A(G)$ может быть представлена в следующем виде:

$$f(z) = f_1(z) + \cdots + f_n(z), \tag{4.6}$$

где $f_i(z)$ входит в класс A в той из односвязных областей G_i, ограниченных контуром $\gamma_i \subset \Gamma$, которая содержит G [см. ([21])].

В нашем случае $G = K$ и G_i ограничено окружностью λ_i ($\Lambda = \bigcup_i \lambda_i$). В силу известных свойств функций класса A в круге, легко получаем (отобразив, если $\infty \in G_i$, G_i на внутренность круга), что $f_i(z)$ имеет почти везде на λ_i угловые граничные значения и

$$\int_{\lambda_i} |\ln|f_i(\zeta)|| ds < +\infty, \tag{4.7}$$

Функции $f_j(z)$, $j \neq i$, аналитичны на γ_i и поэтому

$$\int_{\lambda_i} |\ln|f_j(\zeta)|| \, ds < +\infty. \tag{4.8}$$

Из (4.7) и (4.8) при помощи элементарных неравенств получаем, что

$$\int_{\Lambda} \ln^+ |f(z)| \, ds < +\infty.$$

Требуемое неравенство (4.5) устанавливается теперь при помощи рассуждений, аналогичных приведенным в § 1 гл. II книги ([1]).

Точно так же доказывается и неравенство (4.2).

Доказательство неравенства (4.3) можно найти в работе ([10]).

Нам потребуются еще следующие свойства функций введенных только что классов:

4.2. *Для того чтобы $f(z) \in D(G)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\ln^+ |f(z)|$ имела гармоническую мажоранту в G, представимую по формуле Грина*:

$$U(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} U(\zeta) \, \frac{\partial g}{\partial n} \, ds.$$

4.3. *Для того чтобы $f(z) \in H_p(G)$, необходимо и достаточно, чтобы $f(z) \in D(G)$ и*

$$\int_{\Gamma} |f(\zeta)|^p \frac{\partial g}{\partial n} \, ds < +\infty.$$

4.4 *Если $f(z) \in D(G)$ и*

$$\int_{\Gamma} |f(\zeta)|^p \, ds < +\infty,$$

то $f(z) \in E_p(G)$.

Предложение 4.2, аналогичное известному свойству функции класса D в круге, имеется в нашей работе ([19]). Предложения 4.3 и 4.4 [см. ([19])] являются аналогами хорошо известной (в случае, когда G — круг) теоремы Полубариновой-Кочиной [см. ([2]), а также ([1])]. В общем случае доказательства этих предложений будут подробно изложены в другой нашей работе.

Докажем теорему, из которой будет следовать, что суммируемость $\ln \rho(\zeta) \frac{\partial g}{\partial n}$ является условием, не только необходимым для того, чтобы $\rho(\zeta)$ совпадала с модулем граничных значений функции класса $A(G)$, но и достаточным.

ТЕОРЕМА 4.5. *Если $\rho(\zeta) \geqslant 0$ такова, что*

$$\int_{\Gamma} |\ln \rho(\zeta)| \frac{\partial g}{\partial n} \, ds < +\infty, \tag{4.9}$$

то существует аналитическая однозначная в области G функция $f^*(z)$, имеющая в G не более чем $n-1$ нуль, модуль граничных значений кото-

рой совпадает почти всюду на Г *с* $\rho(\zeta)$. *Логарифм модуля такой функции* $f^*(z)$ *может быть построен по формуле:*

$$\ln|f^*(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \ln\rho(\zeta)\frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial n}\,ds - \sum_{i=1}^{k} g(z, z_i), \tag{4.10}$$

где $g(\zeta, z)$ — *функция Грина области* G, *а* $z_1, \ldots, z_k$, $k \leqslant n-1$, — *некоторые точки внутри* G. *Построенная функция* $f^*(z)$, *как это непосредственно следует из формулы* (4.10) *и предложения* 4.2, *входит в класс* $D(G)$.

Доказательство. Построим аналитическую функцию $F(z)$, для которой

$$\ln|F(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \ln\rho(\zeta)\frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial n}\,ds. \tag{4.11}$$

Если $F(z)$ окажется однозначной в G, то теорема очевидна. Поэтому мы должны рассмотреть случай, когда $F(z)$ многозначна в G. Но тогда достаточно к $F(z)$ применить теорему 1.1, чтобы прийти к нужному нам заключению.

Как уже было отмечено выше, последняя теорема обобщает и уточняет результаты О. Локки (3).

Для функций классов $H_p(G)$ и $E_p(G)$ справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 4.6. *Если* $\rho(\zeta) \geqslant 0$ *удовлетворяет условиям:*

$$\int_\Gamma \ln\rho(\zeta)\frac{\partial g}{\partial n}\,ds > -\infty, \tag{4.12}$$

$$\int_\Gamma [\rho(\zeta)]^p\frac{\partial g}{\partial n}\,ds < +\infty, \tag{4.13}$$

то существует функция $f^*(z) \in H_p(G)$ *такая, что* $|f^*(\zeta)| = \rho(\zeta)$ *почти всюду на* Г. *При этом функция* $f^*(z)$, *обладающая указанными свойствами, может быть выбрана так, что логарифм ее модуля представляется по формуле* (4.10).

Доказательство теоремы следует из того, что при выполнении условий (4.12) и (4.13) будет выполняться условие (4.9). Поэтому, на основании предыдущей теоремы, можно построить функцию $f^*(z) \in D(G)$, для которой $|f^*(\zeta)| = \rho(\zeta)$ на Г. Построенная функция $f^*(z)$ будет, на основании предложения 4.3, входить в класс $H_p(G)$.

ТЕОРЕМА 4.7. *Если* $\rho(\zeta) \geqslant 0$ *удовлетворяет условию* (4.12) *и*

$$\int_\Gamma [\rho(\zeta)]^p\,ds < +\infty, \tag{4.14}$$

то существует функция $f^*(z) \in E_p(G)$ *такая, что* $|f^*(\zeta)| = \rho(\zeta)$ *почти всюду на* Г. *При этом функцию* $f^*(z)$, *обладающую требуемыми свойствами, можно строить так же, как в теоремах* 4.5 *и* 4.6.

Доказательство теоремы 4.7 проводится при помощи рассуждений, аналогичных примененным при доказательстве теоремы 4.6. Только при этом вместо предложения 4.2 надо воспользоваться предложением 4.3.

Замечание. $\frac{1}{f^*(z)}$, где $f^*(z)$ — построенная в теоремах 4.5—4.7 функция, входит в класс D во всякой области $\widetilde{G} \subset G$, которая не содержит нулей $f^*(z)$.

Последнее обстоятельство оказывается важным при исследовании ряда вопросов.

§ 5. Представление мероморфных функций ограниченного вида в конечносвязной области в виде отношения двух ограниченных функций

Установленные теоремы позволяют без труда доказать упоминавшийся в начале работы результат о возможности представления однозначной мероморфной в конечносвязной области G функции $F(z)$ с ограниченной характеристикой в виде частного двух ограниченных в G однозначных аналитических функций.

ТЕОРЕМА 5.1. *Если $F(z)$ — однозначная мероморфная в конечносвязной области G функция с ограниченной характеристикой, то $F(z)$ может быть представлена в виде частного двух однозначных ограниченных в G функций:*

$$F(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}, \quad |f_i(z)| < 1, \quad i = 1, 2.$$

Доказательство. Пусть $z = \alpha(t)$ конформно отображает круг $|t| < 1$ на универсальную поверхность наложения области G. Тогда функция $F[\alpha(t)]$ будет мероморфной функцией с ограниченной характеристикой, автоморфной относительно группы преобразований $\mathfrak{G}$, соответствующей нашему отображению. Применяя рассуждения, используемые обычно при доказательстве возможности представления функции ограниченного вида в круге $|t| < 1$ в виде частного двух ограниченных функций, получаем, что $F[\alpha(t)]$ может быть представлена в виде:

$$F(\alpha(t)) = \frac{b_1(t)\,\widetilde{f}_1(t)}{b_2(t)\,\widetilde{f}_2(t)}.$$

Здесь $b_i(t)$, $i = 1, 2$,— произведения Бляшке, составленные по нулям и полюсам функций $F[\alpha(t)]$, а

$$\widetilde{f}_i(t) = \exp[-U_i(t) - iV_i(t)], \quad i = 1,2,$$

где $U_2(z)$ — наименьшая гармоническая мажоранта $\ln^+|F(\alpha(t))|$ и $U_1(t)$— наименьшая гармоническая мажоранта $\ln^-|F(\alpha(t))|$ [см. ([18]), гл. VII, § 1].

Нетрудно видеть, что $U_1(t)$ и $U_2(t)$ будут автоморфными относительно преобразований группы $\mathfrak{G}$. Заметим, что функции $|b_1(t)|$ и $|b_2(t)|$ будут также автоморфны относительно группы $\mathfrak{G}$. Это следует из того, что совокупность нулей $b_1(t)$ в круге $|t| < 1$, представляющая собой множество всех точек круга $|t| < 1$, соответствующих нулям $F(z)$, не изменится, если применить одно из преобразований, входящих в группу $\mathfrak{G}$;

для функции $b_2(t)$ рассуждаем аналогично. Если теперь вернуться в область G, то получим:

$$F(z) = \frac{b_1(\beta(z))\widetilde{f}_1(\beta(z))}{b_2(\beta(z))\widetilde{f}_2(\beta(z))} \tag{5.1}$$

($\beta(z)$ — функция, обратная к $\alpha(t)$), причем каждая из функций в правой части (5.1) будет, на основании сказанного, иметь однозначный модуль в G. Применяя к функции $b_1(\beta(z))\widetilde{f}_1(\beta(z))$ теорему 1.1, заключаем. что существует не более $n-1$ точек $z_1, \ldots, z_k$, $k \leqslant n-1$, таких, что произведение

$$f_1(z) = b_1(\beta(z)) \cdot \widetilde{f}_1(\beta(z)) \exp\left\{-\sum_{i=1}^{k}[g(z, z_i) - ih(z, z_i)]\right\}$$

становится однозначной функцией в G. Полагая

$$f_2(z) = b_2(\beta(z)) \cdot \widetilde{f}_2(\beta(z)) \exp\left\{-\sum_{i=1}^{k}[g(z, z_i) - ih(z, z_i)]\right\},$$

в силу однозначности $F(z)$ и $f_1(z)$, выводим, что и $f_2(z)$ будет однозначной функцией в G. Так как при этом, очевидно,

$$F(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)},$$

то теорема доказана.

§ 6. Распространение полученных результатов на области с неспрямляемой границей

В этом параграфе будет показано, как перенести изложенные выше результаты о построении однозначных аналитических функций с заданным на границе модулем граничных значений на n-связные области с жордановой, но уже неспрямляемой границей. Основная трудность, которая возникает при этом, заключается в выяснении того, что надо понимать в данном случае под граничными значениями рассматриваемых функций $f(z)$. Дело в том, что теперь мы не можем говорить об угловых граничных значениях наших функций, как это было для областей со спрямляемыми границами, так как существуют примеры односвязных жордановых областей, для которых множество точек, достижимых углами, переходит при конформном отображении на круг в множество меры нуль [см. ([23])]. Более сильные примеры того же рода были указаны М. А. Лаврентьевым ([24]), доказавшим существование такой односвязной жордановой области, для которой множество точек, достижимых отрезками, переходит при конформном отображении на круг в множество меры нуль. Применяя отмеченный уже нами результат о возможности представления в конечносвязной области G каждой функции ограниченного вида в виде частного двух ограниченных и аналитических в G функций, можно легко установить, что в произвольной n-связной области G с жордановой границей Γ для всякой функции $f(z) \in A(G)$ существует множество $E \subset \Gamma$ полной гармонической меры, $\omega(E, G, z_0) = 1$, для каждой точки ζ которого функция $f(z)$ имеет единственное асимптотическое значение $f(\zeta)$. При этом

мы говорим, что $f(z)$ имеет в ζ число $f(\zeta)$ своим асимптотическим значением, если найдется жорданова кривая γ_ζ, лежащая, за исключением своего конца ζ, в области G, такая, что будет существовать

$$\lim_{\substack{z\to\zeta \\ z\in\gamma_\zeta}} f(z) = f(\zeta).$$

Для доказательства достаточно заметить, что в круговой канонической области K с границей Λ для всякой функции $F(w) \in A(K)$ существует множество $e \subset \Lambda$, $me = m\Lambda$, в каждой точке ξ которого функция $F(w)$ имеет единственное асимптотическое значение $F(\xi)$.

Это непосредственно вытекает из наличия у $F(w)$ угловых граничных значений $F_*(\xi)$ почти всюду па Λ и из одного весьма общего результата Багемила ([25]), утверждающего, что для комплекснозначной в круге $|w| < 1$ функции $F(w)$ может существовать не более счетного множества точек на окружности, в каждой из которых $F(w)$ имеет по крайней мере два различных асимптотических значения.

Для распространения наших результатов на произвольные n-связные области G с жордановой границей нам остается воспользоваться конформным отображением K на G. Заметим, что при этом множество $e^* \subset \Delta$, $me^* = 0$, переходит в множество $E^* \subset \Gamma$ гармонической меры нуль. Это следует из того, что множество e^* будет иметь гармоническую меру нуль относительно K, а при взаимно однозначных конформных отображениях гармоническая мера множеств не изменяется:

$$\omega(e^*, K, w_0) = \omega(E^*, G, z_0),$$

где $z_0 \in G$ и $w_0 \in K$ — соответствующие точки при конформном отображении K на G.

Таким образом, для произвольных n-связных областей G с жордановой границей Γ мы можем под граничными значениями $f(\zeta)$ функций $f(z) \in A(G)$ понимать их асимптотические значения, однозначно определенные почти всюду на Γ относительно гармонической меры.

Для функций $f(z)$ класса $D(G)$ можно утверждать, в дополнение к сказанному о функциях класса $A(G)$, следующее:

ЛЕММА 6.1. *Не существует ни одной точки ζ, в которой функция $f(z) \in D(G)$ имеет два различных конечных асимптотических значения.*

Этот факт, представляющий собой некоторое обобщение известной теоремы Линделёфа об ограниченных функциях, в то же время легко сводится, в силу известных свойств функций класса D, к теореме Линделёфа. Действительно, если для точки $\zeta \in \Gamma$ существуют две кривые γ'_ζ и γ''_ζ такие, что

$$\lim_{\substack{z\to\zeta \\ z\in\gamma'_\zeta}} f(z) = \alpha, \qquad \lim_{\substack{z\to\zeta \\ z\in\gamma''_\zeta}} f(z) = \beta, \quad \alpha, \beta \neq \infty,$$

то, предполагая $\alpha \neq \beta$, мы можем, взяв две достаточно близкие к ζ точки $\zeta_1 \in \gamma'_\zeta$ и $\zeta_2 \in \gamma''_\zeta$ и соединив их жордановой кривой $\tilde{\gamma} \subset G$, считать, не на-

рушая общности, что область $\widetilde{G}$, ограниченная кривой $\widetilde{\gamma}$, а также дугами кривых γ'_ζ и γ''_ζ, примыкающими к ζ, односвязна. Из определения класса $D(G)$ следует, что если $f(z) \in D(G)$ и $\widetilde{G} \subset G$, то $f(z) \in D(\widetilde{G})$. Предельные значения $f(z)$ будут ограничены на периферии $\widetilde{\Gamma}$ области $\widetilde{G}$ всюду, за исключением, быть может, точки ζ. Но тогда $f(z)$ будет ограничена в $\widetilde{G}$. Последнее свойство функций класса D хорошо известно для случая, когда рассматриваемая область есть круг [см., например, ([1])]. Наш случай немедленно сводится к этому. Для завершения доказательства остается применить классическую теорему Линделёфа.

Замечание. Приведенную лемму нельзя распространить на функции класса A, так как даже в том случае, когда область G есть круг $|w| < 1$, можно построить аналитическую функцию класса A, для которой существует счетное число точек, в каждой из которых построенная функция имеет по крайней мере два различных асимптотических значения [см. ([26])].

Используя замечания настоящего параграфа о граничных значениях функций и установленные в предыдущих параграфах предложения, мы сумеем распространить наши результаты на построение в произвольных конечносвязных областях с жордановой границей функций определенных классов с заданным на границе модулем граничных значений, под которыми, как указывалось выше, надо теперь уже понимать асимптотические значения.

Так как метод получения указанных распространений совершенно ясен, а применяемые при этом рассуждения носят обычный характер, то мы их опускаем, приводя сразу формулировки получающихся результатов.

ТЕОРЕМА 6.1. *Функция $f(z) \in A(G)$ имеет почти всюду на Γ относительно гармонической меры конечные граничные значения $f(\zeta)$, причем*

$$\int_\Gamma |\ln|f(\zeta)||\,d\omega < \infty, \tag{6.1}$$

где $\omega(E) = \omega(E, G, z_0)$ — гармоническая мера множества E относительно G, вычисленная в z_0.

Если же $f(z) \in H_p(G)$, то, кроме того,

$$\int_\Gamma |f(\zeta)|^p\,d\omega < \infty.$$

При доказательстве используется конформное отображение на круговую каноническую область K.

ТЕОРЕМА 6.2. *Если $\rho(\zeta) \geqslant 0$ такова, что $\int_\Gamma |\ln\rho(\zeta)|\,d\omega < \infty$, то существует функция $f^*(z) \in D(G)$, имеющая в G не более чем $n-1$ нуль*

$z_1, z_2, \ldots, z_m$, $m \leqslant n-1$, *такая, что почти всюду на* Γ (*относительно гармонической меры*) $|f^*(\zeta)| = \rho(\zeta)$, *причем* $\ln|f(z)|$ *будет иметь следующее представление*:

$$\ln|f^*(z)| = \int\limits_{\Gamma} \ln\rho(\zeta)\, d\omega(E, G, z) - \sum_{k=1}^{m} g(z, z_k).$$

Если к тому же $\int\limits_{\Gamma} [\rho(\zeta)]^p\, d\omega < \infty$, *то построенная функция* $f(z)$ *будет входить в* $H_p(G)$.

Поступило
8.IV.1957

ЛИТЕРАТУРА

1 Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, М.—Л., ГТТИ, изд. 2-е, 1950.
2 Смирнов В. И., Sur les formules de Cauchy et de Green et quelques problèmes, qui s'y rattachent, Известия Ак. наук СССР, ОМЕН, № 3 (1932), 337—372.
3 Lokki O., Über das Randwertproblem der analytischen Funktionen, Annales academiae scientiarum Fennicae, 144 (1952), 1—8.
4 Myrberg P. I., Über beschränkte Funktionen in mehrfach zusammenhängenden Bereichen Suomalaisen tiedakatemian toimituksia, Annales academiae scientiarum Fennicae, Sarja A, Nid., XXIII, № 8 (1930),
5 Heins M., Lindelöfian maps, Ann. of Math, 62, № 3 (1955), 418—446.
6 Oğŭstörelli N., Extension de la théorie de Nevanlinna aux domaines multiplement connexes, Istanbul Univ. fen. fac. mec., 18, № 4 (1953), 384—419.
7 Голузин Г. М., Геометрическая теория функций, М.— Л., ГТТИ, 1952.
8 Курант Р., Принцип Дирихле, конформное отображение и минимальные поверхности, перев. с англ., Москва, ИЛ, 1953.
9 Хавинсон С. Я., Об экстремальных свойствах функций, отображающих область на многолистный круг, Доклады Ак. наук СССР, 88, № 6 (1953), 957—959.
10 Хавинсон С. Я., Экстремальные задачи для некоторых классов аналитических функций в конечносвязных областях, Матем. сборн., 36 (78): 3 (1955), 445—478.
11 Люстерник Л. А. и Соболев В. И., Элементы функционального анализа, М.— Л., ГТТИ, 1951.
12 Rogosinski W., Shapiro H., On certain extremum problems for analytic functions, Acta math., 90, № 3—4 (1950), 287—318.
13 Lax P., Reciprocal extremal problems in function theory, Communs Pure and Appl. Math. 8, № 3, (1955), 437—453.
14 Penez J., Approximation by boundary values of analytic functions, Proc. Nat. Acad. USA, 40, № 4 (1954), 240—243.
15 Bonsall F. F., Dual extremum problems in the theory of functions, J. Lond Math. Soc., 31, № 1 (1956), 105—110.
16 Крейн М. Г., Проблема в абстрактном нормированном пространстве, статья IV в книге Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн, «О некоторых вопросах теории моментов», Харьков, ГОНТИ, 1938.
17 Никольский С. М., Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 10 (1946), 207—256.
18 Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М.— Л., ГТТИ, 1941
19 Тумаркин Г. Ц. и Хавинсон С. Я., Классы однозначных аналитических функций в многосвязных областях, Сборник «Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного», Гостехиздат, М., 1958.
20 Parreau M., Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et la classification des surfaces de Riemann, Annales de l'Institut Fourier, 3 (1951), 103—197.

[21] Rudin W., Analytic functions of class H_p, Trans. Amer. math. Soc., 78, № 1 (1955), 46—66.
[22] Келдыш М. В. и Лаврентьев М. А., Sur la représentation conforme des domaines limites par des courbes rectifiables, Ann. Ecole Norm., 54 (1937), 1—38.
[23] Вениаминов В. И., Sur les dérivée limite d'une fonction analytique, C. R. Acad. Sci., 180 (1925), 114—116.
[24] Лаврентьев М. А., О некоторых граничных задачах в теории однолистных функций, Матем. сборн., 1 (43):6 (1936), 815—844.
[25] Bagemihl F., Curvilinear cluster sets of arbitrary functions, Proc. Nat. Acad. USA, 41, № 6 (1955), 379—382.
[26] Bagemihl F., Seidel W., Functions of bounded characteristic with prescribed ambiguous points, Michigan Math. J., 3, № 1 (1955—56), 77—81.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 563—576

Н. И. ФЕЛЬДМАН

О СОВМЕСТНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ПЕРИОДОВ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ЧИСЛАМИ

(*Представлено академиком* М. А. Лаврентьевым)

В работе выведена оценка снизу для суммы $|\omega-\xi|+|\omega_1-\xi_1|$, где ω и ω_1 — периоды эллиптической функции $\wp(z)$ с алгебраическими инвариантами, а ξ и ξ_1 — алгебраические числа. Оценка зависит от степеней и высот чисел ξ и ξ_1 и от степени поля, образованного присоединением ξ и ξ_1 к полю рациональных чисел.

Будем обозначать символом $\wp(z)$ эллиптическую функцию Вейерштрасса. Пусть ω и ω_1 — некоторая фиксированная пара ее основных периодов, а g_2 и g_3 — ее инварианты, т. е. коэффициенты уравнения

$$y'^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3, \tag{1}$$

решением которого является функция $\wp(z)$.

В настоящей работе доказывается следующая

ТЕОРЕМА. *Если инварианты g_2, g_3 являются алгебраическими числами, то существует такое число $\Lambda_0 = \Lambda_0(g_2, g_3, \omega, \omega_1)$, что неравенство*

$$|\omega-\xi|+|\omega_1-\xi_1| > e^{-\Lambda_0 n_0 N \ln^2 N} \tag{2}$$

справедливо для любых алгебраических чисел ξ и ξ_1, принадлежащих произвольному полю степени n_0, где

$$N \ln N = n_0\left(\ln n_0 + \frac{\ln h}{n} + \frac{\ln h_1}{n_1} + 1\right),$$

а n и h, n_1 и h_1 являются степенью и высотой сооответственно чисел ξ и ξ_1 *.

§ 1

ЛЕММА 1. *Если l — целое положительное число, то*

$$\frac{d^s}{dz^s}\left(\wp^l(z)\right) = \sum_{2a+3b+4c=s+2l} \gamma_{a,b,c}(l, s)\,(\wp(z))^a\,(\wp'(z))^b\,(\wp''(z))^c, \tag{3}$$

где a, b, c — целые неотрицательные числа, а целые коэффициенты $\gamma_{a,b,c}(l, s)$ удовлетворяют неравенству:

$$\sum_{2a+3b+4c=s+2l} |\gamma_{a,b,c}(l, s)| \leqslant s!\ 2^l \gamma^s, \tag{4}$$

γ — абсолютная постоянная.

---

* Мера трансцендентности одного периода функции $\wp(z)$ рассматривалась в работе ([2]), где было доказано неравенство:

$$|\omega-\xi| > e^{-\Lambda n^4 (n \ln n + 1 + \ln h) \ln^4 (n \ln n + 2 + \ln h)}.$$

Доказательство этой леммы приведено в работе (²) (лемма 2).

ЛЕММА. 2. *Пусть* $p_{l,s}=\frac{d^s}{dz^s}\left[\wp^l\left(z+\frac{\omega}{4}\right)\right]_{z=0}$. *Тогда определитель*

$$\Delta=|p_{l,s}|_{l,s=1,\ldots,q-1}=p_{1,1}^{\frac{q(q-1)}{2}}\prod_{s=1}^{q-1}s!\neq 0. \qquad (5)$$

Доказательство приведено в работе (²), стр. 168.

ЛЕММА 3. *Пусть* $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_{q_0-1}$ — *различные числа*, Δ — *определитель* (5), $\Delta_{l,s}$ — *алгебраическое дополнение его элемента* $p_{l,s}$, $\bar\Delta$ — *определитель Вандермонда, построенный из элементов* $\beta_0,\ldots,\beta_{q_0-1}$, *а* $\bar\Delta_{y,k}$ — *алгебраическое дополнение элемента* β_y^k. *Если*

$$f_{y,s}=\sum_{k=0}^{q_0-1}\sum_{l=0}^{q-1}C_{k,l}\sum_{t=0}^{k}C_s^t p_{l,s-t}\cdot\frac{k!}{(k-t)!}\beta_y^{k-t},$$

то справедливо равенство:

$$C_{\varkappa,\lambda}=\sum_{s=0}^{q-1}\sum_{y=0}^{q_0-1}f_{y,s}\sum_{\tau=0}^{q_0-1}(-1)^\tau C_{\varkappa+\tau}^\tau\frac{(s+\tau)!}{s!}\frac{\Delta_{\lambda,s+\tau}}{\Delta}\frac{\bar\Delta_{y,\varkappa+\tau}}{\bar\Delta}, \qquad (6)$$

причем символы $\Delta_{\lambda,s+\tau}$ *и* $\bar\Delta_{y,\varkappa+\tau}$ *считаются равными нулю, если соответственно* $s+\tau\geqslant q$ *или* $\varkappa+\tau\geqslant q_0$.

Доказательство. Рассмотрим правую часть доказываемого равенства (6), подставив вместо величины $f_{y,s}$ ее значение. Имеем:

$$\sum_{s=0}^{q-1}\sum_{y=0}^{q_0-1}\sum_{k=0}^{q_0-1}\sum_{l=0}^{q-1}C_{k,l}\sum_{t=0}^{k}C_s^t\frac{k!}{(k-t)!}\beta_y^{k-t}p_{l,s-t}\cdot$$

$$\cdot\sum_{\tau=0}^{q_0-1}(-1)^\tau C_{\varkappa+\tau}^\tau\frac{(s+\tau)!}{s!}\frac{\Delta_{\lambda,s+\tau}}{\Delta}\frac{\bar\Delta_{y,\varkappa+\tau}}{\bar\Delta}=$$

$$=\sum_{k=0}^{q_0-1}\sum_{l=0}^{q-1}C_{k,l}\sum_{s=0}^{q-1}\sum_{y=0}^{q_0-1}\sum_{t=0}^{k}\sum_{\tau=0}^{q_0-1-\varkappa}C_s^t\frac{k!}{(k-t)!}\cdot$$

$$\cdot\beta_y^{k-t}p_{l,s-t}(-1)^\tau C_{\varkappa+\tau}^\tau\frac{(s+\tau)!}{s!}\frac{\Delta_{\lambda,s+\tau}}{\Delta}\frac{\bar\Delta_{y,\varkappa+\tau}}{\bar\Delta}=\sum_{k=0}^{q_0-1}\sum_{l=0}^{q-1}C_{k,l}\,\delta_{k,l}.$$

Докажем, что $\delta_{k,l}=0$, если $\{k,l\}\neq\{\varkappa,\lambda\}$, а $\delta_{\varkappa,\lambda}=1$. В самом деле,

$$\delta_{k,l}=\sum_{s=0}^{q-1}\sum_{t=0}^{k}\sum_{\tau=0}^{q_0-1-\varkappa}C_s^t\frac{k!}{(k-t)!}p_{l,s-t}(-1)^\tau C_{\varkappa+\tau}^\tau\cdot$$

$$\cdot\frac{(s+\tau)!}{s!}\frac{\Delta_{\lambda,s+\tau}}{\Delta}\sum_{y=0}^{q_0-1}\beta_y^{k-t}\frac{\bar\Delta_{y,\varkappa+\tau}}{\bar\Delta}.$$

По известному свойству определителя, последняя сумма обращается в единицу, если $k - t = \varkappa + \tau$, и в нуль — в остальных случаях, поэтому

$$\delta_{k,l} = \sum_{s=0}^{q-1} \sum_{t=0}^{k-\varkappa} C_s^t \frac{k!}{(k-t)!} p_{l,\,s-t} (-1)^{k-\varkappa-t} \cdot$$
$$\cdot\; C_{k-t}^{k-\varkappa-t} \frac{(s+k-\varkappa-t)!}{s!} \frac{\Delta_{\lambda,\, s+k-\varkappa-t}}{\Delta},$$

так как в сумме остаются лишь те слагаемые, для которых $k - t = \varkappa + \tau$, т. е. $\tau = k - \varkappa - t$, а так как $\tau \geqslant 0$, то $k - \varkappa \geqslant t$. Изменив порядок суммирования, получаем:

$$\delta_{k,l} = \sum_{t=0}^{k-\varkappa} C_{k-t}^{\varkappa} (-1)^{k-\varkappa-t} \frac{k!}{(k-t)!} \sum_{s=0}^{q-1} C_s^t p_{l,\,s-t} \frac{(s+k-\varkappa-t)!}{s!} \frac{\Delta_{\lambda,\, s+k-\varkappa-t}}{\Delta}.$$

Заметим, что при $s < t$ будет $C_s^t = 0$, а при $s > q - 1 - k + \varkappa + t$ в нуль обращается $\Delta_{\lambda,\, s+k-\varkappa-t}$. Поэтому суммирование по s можно вести в пределах от t до $q - 1 - k + \varkappa + t$. Таким образом,

$$\delta_{k,l} = \sum_{t=0}^{k-\varkappa} C_{k-t}^{\varkappa} (-1)^{k-\varkappa-t} \frac{k!}{(k-t)!} \cdot$$
$$\cdot \sum_{s=t}^{q-1-k+\varkappa+t} C_s^t p_{l,\,s-t} \frac{(s+k-\varkappa-t)!}{s!} \frac{\Delta_{\lambda,\, s+k-\varkappa-t}}{\Delta}.$$

Положим $s = u + t$. Тогда u будет изменяться от 0 до $q - 1 - k + \varkappa$ и

$$\delta_{k,l} = \sum_{t=0}^{k-\varkappa} C_{k-t}^{\varkappa} (-1)^{k-\varkappa-t} \frac{k!}{(k-t)!} \cdot$$
$$\cdot \sum_{u=0}^{q-1-k+\varkappa} C_{u+t}^t p_{l,u} \frac{(u+k-\varkappa)!}{(u+t)!} \frac{\Delta_{\lambda,\, u+k-\varkappa}}{\Delta} =$$
$$= \sum_{t=0}^{k-\varkappa} \frac{(k-t)!\,(-1)^{k-\varkappa-t}\, k!}{\varkappa!\,(k-\varkappa-t)!\,(k-t)!} \sum_{u=0}^{q-1-k+\varkappa} \frac{(u+t)!}{t!\,u!} \frac{(u+k-\varkappa)!}{(u+t)!} \frac{\Delta_{\lambda,\, u+k-\varkappa}}{\Delta} p_{l,u} =$$
$$= \sum_{u=0}^{q-1-k+\varkappa} \frac{k!}{\varkappa!} \frac{(-1)^{k-\varkappa}}{(k-\varkappa)!} \frac{(u+k-\varkappa)!}{u!} \frac{\Delta_{\lambda,\, u+k-\varkappa}}{\Delta} p_{l,u} \sum_{t=0}^{k-\varkappa} (-1)^t \frac{(k-\varkappa)!}{(k-\varkappa-t)!\cdot t!} =$$
$$= \sum_{u=0}^{q-1-k+\varkappa} \frac{k!}{\varkappa!} \frac{(-1)^{k-\varkappa}}{(k-\varkappa)!} \frac{(u+k-\varkappa)!}{u!} \frac{\Delta_{\lambda,\, u+k-\varkappa}}{\Delta} p_{l,u} \sum_{t=0}^{k-\varkappa} (-1)^t C_{k-\varkappa}^t.$$

Сумма по t обращается в нуль, если $k \neq \varkappa$. Если же $k = \varkappa$, то эта сумма равна 1. Итак, $\delta_{k,l} = 0$, если $k \neq \varkappa$. Далее,

$$\delta_{\varkappa,l} = \sum_{u=0}^{q-1} p_{l,u} \frac{\Delta_{\lambda,u}}{\Delta} = \begin{cases} 1, & l = \lambda, \\ 0, & l \neq \lambda. \end{cases}$$

Таким образом, $\delta_{k,l} = 0$, если $\{k, l\} \neq \{\varkappa, \lambda\}$, а $\delta_{\varkappa,\lambda} = 1$, что доказывает формулу (6).

ЛЕММА 4. *Пусть* $L_1, L_2, \ldots, L_m$ — *линейные однородные формы от* $\mu > m$ *переменных с вещественными коэффициентами*

$$L_i = a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,\mu}x_\mu, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad |a_{i,k}| \leqslant a,$$

где a — *целое число,* N_0 — *также целое число* > 1. *Тогда целые числа* $x_1, \ldots, x_\mu$ *можно выбрать так, что будут выполняться неравенства:*

$$|L_i| \leqslant \frac{1}{N_0}, \quad |x_k| \leqslant 2(a\mu N_0)^{\frac{m}{\mu-m}}, \quad x_1^2 + \cdots + x_\mu^2 \neq 0. \tag{7}$$

Доказательство этой леммы приведено в книге ([1]), стр. 18.

ЛЕММА 5. *Пусть*

$$P(z) = a_0 z^n + \cdots + a_n = a_0 \prod_{\nu=1}^{n} (z - \xi_\nu), \quad a_0 > 0, \quad |a_i| \leqslant H.$$

Тогда

$$\prod_{\nu=1}^{n} (1 + |\xi_\nu|) \leqslant (n+1)\, 4^n a_0^{-1} H. \tag{8}$$

Доказательство этой леммы имеется в работе ([3]).

ЛЕММА 6. *Пусть* ζ, ξ *и* ξ_1 — *алгебраические числа, степени и высоты которых соответственно равны числам* ν, h_0; n, h *и* n_1, h_1, *а степень поля* K, *образованного присоединением* ζ, ξ *и* ξ_1 *к полю рациональных чисел, равна числу* p_0. *Пусть, далее* $P(z, y, y_1)$ — *многочлен от трех переменных с целыми рациональными коэффициентами. Тогда или* $P(\zeta, \xi, \xi_1) = 0$, *или*

$$|P(\zeta, \xi, \xi_1)| > e^{-\gamma p_0\left[\ln M + m_0 + m + m_1 + \frac{m_0 \ln h_0}{\nu} + \frac{m \ln h}{n} + \frac{m_1 \ln h_1}{n_1}\right]}, \tag{9}$$

где m_0, m *и* m_1 — *степени многочлена* $P(z, y, y_1)$ *по переменным* z, y *и* y_1, M — *высота этого многочлена, а* γ — *абсолютная постоянная.*

Доказательство. Отметим сперва следующее обстоятельство: если $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — различные (не обязательно все) корни уравнения с целыми коэффициентами

$$a_0 x^k + \cdots + a_k = 0,$$

то число $\alpha_1 \ldots \alpha_s a_0$ является целым алгебраическим [см., например, ([1]), стр. 95]. Поэтому величина

$$\beta = d^{\frac{p_0 m}{n}} d_1^{\frac{p_0 m_1}{n_1}} d_0^{\frac{p_0 m_0}{\nu}} \prod_{i=0}^{p_0-1} P(\zeta^{(i)}, \xi^{(i)}, \xi_1^{(i)}),$$

где d, d_1, d_0 — старшие коэффициенты неприводимых уравнений для ξ, ξ_1, ζ, числа $\xi^{(0)}, \xi_1^{(0)}, \zeta^{(0)}$ совпадают с ξ, ξ, ζ, а $\xi^{(i)}, \xi_1^{(i)}, \zeta^{(i)}$ — их сопряженные в полях $K^{(1)}, \ldots, K^{(p_0-1)}$, сопряженных с полем K, является целым рациональным числом, и если она не равна нулю, то ее абсолютная величина не меньше единицы.

Далее, так как

$$\begin{aligned} |P(z, y, y_1)| &\leqslant M(1 + |z| + \cdots + |z|^{m_0}) \cdot \\ &\cdot (1 + |y| + \cdots + |y|^m)(1 + |y_1| + \cdots + |y_1|^{m_1}) \leqslant \\ &\leqslant M(1 + |z|)^{m_0}(1 + |y|)^m (1 + |y_1|)^{m_1}, \end{aligned}$$

то

$$\left|\prod_{i=1}^{p_0-1} P(\zeta^{(i)}, \xi^{(i)}, \xi_1^{(i)})\right| \leqslant M^{p_0-1} \prod_{i=1}^{p_0-1} (1+|\zeta^{(i)}|)^{m_0} (1+|\xi^{(i)}|)^m (1+|\xi_1^i|)^{m_1},$$

а по лемме 5 эта величина меньше, чем

$$M^{p_0-1}((\nu+1)\,4^\nu d_0^{-1} h_0)^{\frac{p_0 m_0}{\nu}} ((n+1)\,4^n d^{-1} h)^{\frac{p_0 m_0}{n}} ((n_1+1)\,4^{n_1} d_1^{-1} h_1)^{\frac{p_0 m_1}{n_1}}.$$

Множители $\frac{p_0}{\nu}$, $\frac{p_0}{n}$ и $\frac{p_0}{n_1}$ в показателях появились вследствие того, что среди чисел $\zeta^{(0)}, \zeta^{(1)}, \ldots, \zeta^{(p_0-1)}$ каждое из чисел $\zeta, \zeta^{(1)}, \ldots \zeta^{(\nu-1)}$ — корней неприводимого уравнения для ζ — встречается $\frac{p_0}{\nu}$ раз, среди чисел $\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(p_0-1)}$ каждое из чисел $\xi, \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n-1)}$ встречается $\frac{p_0}{n}$ раз, а среди чисел $\xi_1^{(0)}, \xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_1^{(p_0-1)}$ каждое из чисел $\xi_1, \xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_1^{(n_1-1)}$ встречается $\frac{p_0}{n_1}$ раз.

Таким образом, если $\beta \neq 0$, то

$$|P(\zeta, \xi, \xi_1)| = \frac{|\beta|}{\left|\prod_{i=1}^{p_0-1} P(\zeta^{(i)}, \xi^{(i)}, \xi_1^{(i)})\right| d^{\frac{p_0 m}{n}} d_1^{\frac{p_0 m_1}{n_1}} d_0^{\frac{p_0 m_0}{\nu}}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{M^{p_0-1}[(\nu+1)^{\frac{1}{\nu}} \cdot 4]^{p_0 m_0} [(n+1)^{\frac{1}{n}} \cdot 4]^{p_0 m} [(n_1+1)^{\frac{1}{n_1}} \cdot 4]^{p_0 m_1}} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{e^{p_0\left(\frac{m_0 \ln h_0}{\nu} + \frac{m \ln h}{n} + \frac{m_1 \ln h_1}{n_1}\right)}} \geqslant$$

$$\geqslant e^{-\gamma p_0\left(m_0+m+m_1+\ln M + \frac{m_0 \ln h_0}{\nu} + \frac{m \ln h}{n} + \frac{m_1 \ln h}{n_1}\right)}.$$

§ 2

Переходим к доказательству теоремы. Известно, что $\wp'\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0$, поэтому из уравнения (1) вытекает, что число $\wp\left(\frac{\omega}{2}\right)$ будет алгебраическим. Дифференцируя уравнение (1), получим еще одно дифференциальное уравнение для функции $\wp(z)$:

$$y'' = 6y^2 - \frac{1}{2} g_2. \tag{10}$$

Известно также следующее соотношение [см., например, ([5]), стр. 272], справедливое, если $2z$ не является периодом $\wp(z)$:

$$\wp(2z) = \frac{1}{4}\left\{\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right\}^2 - 2\wp(z),$$

которое после подстановки вместо $\wp''(z)$ и $\wp'(z)^2$ их значений из (1) и (10) принимает вид:

$$\wp(2z) = \frac{16\wp^4(z) + 8g_2\wp^2(z) + 32g_3\wp(z) - g_2^2}{64\wp^3(z) - 16g_2\wp(z) - 16g_3}. \tag{11}$$

Из равенства (11) вытекает, что число $\wp\left(\frac{\omega}{4}\right)$ будет алгебраическим, а значит, из уравнений (1) и (10) будет следовать и алгебраичность

чисел $\wp'\left(\frac{\omega}{4}\right)$ и $\wp''\left(\frac{\omega}{4}\right)$. Пусть эти три числа содержатся в поле K_0, степень которого равна ν, а ζ — образующее число этого поля. Тогда

$$\left.\begin{aligned} \wp\left(\frac{\omega}{4}\right) &= b_0\zeta^{\nu-1} + b_1\zeta^{\nu-2} + \cdots + b_{\nu-1}, \\ \wp'\left(\frac{\omega}{4}\right) &= b_0'\zeta^{\nu-1} + b_1'\zeta^{\nu-2} + \cdots + b_{\nu-1}', \\ \wp''\left(\frac{\omega}{4}\right) &= b_0''\zeta^{\nu-1} + b_1''\zeta^{\nu-2} + \cdots + b_{\nu-1}'', \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

причем числа b_i, b_i', b_i'' — рациональные.

Будем в дальнейшем через $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ обозначать положительные числа, не зависящие от n, h, n_1, h_1, n_0, N и λ. Положим

$$\lambda_0 = \max\left(1 + |\omega| + |\omega_1|;\ 1 + |\xi| + |\xi_1|;\ \left|\wp\left(\frac{\omega}{4}\right)\right|;\ \left|\wp'\left(\frac{\omega}{4}\right)\right|;\ \left|\wp''\left(\frac{\omega}{4}\right)\right|\right),$$

$$\lambda = \max\left(100\gamma\nu;\ (3 + \lambda_{14})\ln^{-1}2;\ 24 + 12(\lambda_{16} + \lambda_{17})\right), \tag{13}$$

где числа λ_{14}, λ_{16} и λ_{17} будут введены в дальнейшем, а число γ — постоянная из леммы 6. Пусть еще $\Lambda = \lambda^8$.

Покажем, что неравенство

$$|\xi - \omega| + |\xi_1 - \omega_1| < e^{-\Lambda n_0 N \ln^2 N} \tag{14}$$

невозможно для достаточно больших N. Доказательство будем вести от противного. Пусть неравенство (14) справедливо. Положим

$$\left.\begin{aligned} q &= [\lambda^2 N \ln N], \quad q_0 = [\lambda^4 n_0 \ln N], \\ s_0 &= [\lambda^3 N \ln N], \quad x_0 = [\lambda \sqrt{n_0 \ln N}]. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Из чисел $\xi^u \xi_1^{u_1}$, $u = 0, 1, \ldots, n-1$, $u_1 = 0, 1, \ldots, n_1 - 1$, выберем n_0 линейно независимых. Обозначим их через $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n_0}$. Рассмотрим функцию

$$f(z) = \sum_{k=0}^{q_0-1} \sum_{l=0}^{q-1} C_{k,l}\, z^k \wp^l\left(z + \frac{\omega}{4}\right), \qquad C_{k,l} = \sum_{\tau=1}^{n_0} C_{k,l}^{(\tau)} \zeta_\tau. \tag{16}$$

Для ее производных имеем выражение:

$$f^{(s)}(z) = \sum_{k=0}^{q_0-1} \sum_{l=0}^{q-1} C_{k,l} \sum_{t=0}^{k} C_s^t \frac{k!\, z^{k-t}}{(k-t)!} \left(\wp^l\left(z + \frac{\omega}{4}\right)\right)^{(s-t)}, \tag{17}$$

и если

$$p_{l,s} = \frac{d^s}{dz^s}\left[\wp^l\left(z + \frac{\omega}{4}\right)\right]_{z=0},$$

то для целых x и x_1

$$f^{(s)}(\omega x + \omega_1 x_1) = \sum_{k=0}^{q_0-1} \sum_{l=0}^{q-1} C_{k,l} \sum_{t=0}^{k} C_s^t \frac{k!\,(\omega x + \omega_1 x_1)^{k-t}}{(k-t)!} p_{l,\,s-t}.$$

Правая часть этого выражения представляет собой линейную форму относительно qq_0n_0 величин $C_{k,l}^{(\tau)}$. Оценим коэффициенты $A_{k,l}^{(\tau)}(x, x_1, s)$ этих

форм для x, $x_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(x_0 - 1)$; $s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1$. Имеем:

$$|A_{k,l}^{(\tau)}(x, x_1, s)| \leqslant \lambda_0^{n+n_1} 2^{s_0} (q_0 - 1)! (\lambda_0 x_0)^{q_0 - 1} \max_{\substack{0 \leqslant l \leqslant q-1 \\ 0 \leqslant \sigma \leqslant s_0 - 1}} |p_{l,\sigma}|.$$

По лемме 1,

$$|p_{l,\sigma}| \leqslant \sigma!\, 2^l \lambda_1^\sigma \lambda_0^{\sigma+2l},$$

так что

$$|A_{k,l}^{(\tau)}(x, x_1, s)| \leqslant q_0!\, x_0^{q_0} s! \cdot \lambda_2^{q+n_0+s_0+q_0} = a. \tag{18}$$

Если разбить каждую из форм $f^{(s)}(\omega x + \omega_1 x_1)$ на вещественную и мнимую части, то мы получим $2(2x_0 - 1)^2 s_0$ линейных форм относительно величин $C_{k,l}^{(\tau)}$, коэффициенты которых будут удовлетворять неравенству (18). По лемме 4, целые числа $C_{k,l}^{(\tau)}$ можно выбрать так, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$|f^{(s)}(x\omega + x_1\omega_1)| < \frac{2}{N_0} = \frac{2}{\left[e^{\frac{\lambda^5}{10} n_0 N \ln^2 N}\right]} < e^{-\frac{\lambda^5}{11} n_0 N \ln^2 N} \tag{19}$$

$$(x, x_1 = 0, \pm 1, \ldots, \pm(x_0 - 1); \quad s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1),$$

$$|C_{k,l}^{(\tau)}| \leqslant 2(a n_0 q q_0 N)^{\frac{2(2x_0-1)^2 s_0}{n_0 q q_0 - 2(2x_0-1)^2 s_0}} \leqslant$$

$$\leqslant 2\exp\left\{\frac{8\lambda^5 n_0 N \ln^2 N}{(\lambda^2 N \ln N - 1)(\lambda^4 n_0 \ln N - 1) n_0 - 8\lambda^5 n_0 N \ln^2 N} \cdot\right.$$

$$\left.\cdot \ln\left(q_0!\, x_0^{q_0}\, s_0!\;\; \lambda_2{}^{q+q_0 s_0+n}\;\; n_0 q q_0 e^{\frac{1}{10}\lambda^5 n_0 N \ln^2 N}\right)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2\exp\left\{\frac{8\left(\lambda^4 n_0 \ln N\{\ln(\lambda^4 n_0 \ln N) + \ln(\lambda\sqrt{n_0 \ln N})\} + 2\lambda^3 N \ln^2 N + \frac{1}{10}\lambda^5 n_0 N \ln^2 N\right)}{\lambda n_0 (1 - \lambda^{-1} N^{-1} \ln^{-1} N)(1 - \lambda^{-4} n_0^{-1} \ln^{-1} N) - 8}\right\} <$$

$$< e^{\lambda^4 N \ln^2 N}, \quad N > N_1, \tag{20}$$

причем среди чисел $C_{k,l}^{(\tau)}$ имеются отличные от нуля. Положим

$$f_{s,x,x_1}(\xi, \xi_1) = \sum_{k=0}^{q_0-1} \sum_{l=0}^{q-1} C_{k,l} \sum_{t=0} C_s^t \frac{k!}{(k-t)!} (\xi x + \xi_1 x_1)^{k-t} p_{l,s-t}. \tag{21}$$

Очевидно,

$$|f^{(s)}(x\omega + x_1\omega_1) - f_{s,x,x_1}(\xi, \xi_1)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{q_0-1} \sum_{l=0}^{q-1} |C_{k,l}| \sum_{t=0}^{k} \left\{C_s^t \frac{k!}{(k-1)!} |p_{l,s-t}| \cdot |(\xi x + \xi_1 x_l)^{k-t} - (\omega x + \omega_1 x_1)^{k-t}|\right\}.$$

Так как, вследствие (14) и (13),

$$|(\xi x + \xi_1 x_1)^\tau - (\omega x + \omega_1 x_1)^\tau| = |x(\omega - \xi) + x_1(\omega_1 - \xi_1)|(|\xi_1 x_1 + \xi x|^{\tau-1} +$$

$$+ |\xi x + \xi_1 x_1|^{\tau-2}|\omega x + \omega_1 x_1| + \ldots + |\omega x + \omega_1 x_1|^{\tau-1}) \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\Lambda n_0 N \ln^2 N}(|x| + |x_1|)^\tau \lambda_0^\tau,$$

то соотношения (15) и (20) приводят к неравенству:

$$|f_{s,x,x_1}(\xi, \xi_1) - f^{(s)}(x\omega + x_1\omega_1)| \leqslant qq_0 e^{\lambda^4 N \ln^2 N} \, n_0 \lambda_0^{n+n_1} \cdot 2^s \cdot$$

$$\cdot (q_0 - 1)!\, s!\, 2^q \lambda_2^{q+s} e^{-\lambda^8 n_0 N \ln^2 N} \lambda_0^q (|x| + |x_1| + 1)^{q_0} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{1}{2}\lambda^8 n_0 N \ln^2 N} \lambda_3^s s!\, (|x| + |x_1| + 1)^{q_0}, \quad N > N_2.$$

Таким образом,

$$|f_{s,x,x_1}(\xi, \xi_1)| < f^{(s)}(x\omega + x_1\omega_1)| + e^{-\frac{1}{2}\lambda^8 n_0 N \ln^2 N} \lambda_3^s \, s!\, (|x| + |x_1| + 1)^{q_0}.$$

Если $s \leqslant s_0$, а $|x|$ и $|x_1| \leqslant 2\lambda^2 \sqrt{n_0 \ln N}$, то, по (15),

$$|f_{s,x,x_1}(\xi, \xi_1)| < |f^{(s)}(\omega x + \omega_1 x_1)| +$$

$$+ \lambda_3^{\lambda^3 N \ln N} e^{-\frac{1}{2}\lambda^8 n_0 N \ln^2 N + \lambda^3 N \ln N (\ln N + 2\ln\ln N) + \lambda^4 n_0 \ln N \ln(n_0 \ln N)} \leqslant$$

$$\leqslant |f^{(s)}(x\omega + x_1\omega_1)| + e^{-\frac{1}{3}\lambda^8 n_0 N \ln^2 N}. \qquad (22)$$

В частности, если $x, x_1 = 0, \pm 1, \ldots, \pm(x_0 - 1)$; $s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1$, то, вследствие (19),

$$|f_{s,x,x_1}(\xi, \xi_1)| \leqslant e^{-\frac{\lambda^8}{11} n_0 N \ln^2 N} + e^{-\frac{\lambda^8}{3} n_0 N \ln^2 N} < e^{-\frac{\lambda^8}{12} n_0 N \ln^2 N}. \qquad (23)$$

Величины $f_{s,x,x_1}(\xi, \xi_1)$ представляют собой многочлены от ξ, ξ_1, $\wp\left(\frac{\omega}{4}\right)$ $\wp'\left(\frac{\omega}{4}\right)$ и $\wp''\left(\frac{\omega}{4}\right)$. Пусть λ_4 — общий знаменатель коэффициентов правых частей формул (12). Тогда, вследствие (3), величины $\lambda_4^{s+2q} f_{s,x,x_1}(\xi, \xi_1)$ представляют собой многочлены с целыми рациональными коэффициентами от алгебраических чисел ξ, ξ_1, ζ. Оценим величины M_{s,x,x_1} — высоты этих многочленов. Имеем:

$$M_{s,x,x_1} \leqslant \lambda_4^{s+2q} qq_0 n_0 e^{\lambda^4 N \ln^2 N} 2^s (q_0 - 1)!\, (|x| + |x_1| + 1)^{q_0 - s} \, s!\, \lambda_5^{q+s} \lambda_6^{s+2q}.$$

Если $s \leqslant s_0$, а $|x|$ и $|x_1| \leqslant 2\lambda^2 \sqrt{n_0 \ln N}$, то, по (15),

$$M_{s,x,x_1} \leqslant e^{5\lambda^4 N \ln^2 N}. \qquad (24)$$

Оценим степени m, m_1 и m_0 многочлена $f_{s,x,x_1}(\xi, \xi_1)$ по переменным ξ, ξ_1 и ζ.

Из (3), (12), (16) и (21) вытекают неравенства:

$$\left.\begin{aligned} m &\leqslant q_0 - 1 + n - 1 < \lambda^4 n_0 \ln N + n < 2\lambda^4 n_0 \ln N, \\ m_1 &\leqslant q_0 - 1 + n_1 - 1 < \lambda^4 n_0 \ln N + n_1 < 2\lambda^4 n_0 \ln N, \\ m_0 &\leqslant (s_0 + 2q)\nu < 2\nu\lambda^3 N \ln N < \lambda^4 N \ln N. \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Степень p_0 поля K, образованного присоединением к полю рациональных чисел величин ξ, ξ_1 и ζ, очевидно, не больше числа νn_0. Значит, по лемме 6, если

$$f_{s,x,x_1}(\xi, \xi_1) \neq 0,$$

то должно выполняться неравенство

$$|f_{s,x,x_1}(\xi,\xi_1)| > e^{-\gamma\nu n_0\{5\lambda^4 N\ln N + 5\lambda^4 N\ln^2 N + 2n_0\ln N\lambda^4\left(\frac{\ln h}{n} + \frac{\ln h_1}{n_1}\right) + \lambda^4 N\ln N\lambda_7\}} >$$
$$> e^{-\gamma\nu n_0 8\lambda^4 N\ln^2 N}, \quad N > N_3 \tag{26}$$
$$(s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1, \quad x, x_1 = 0, \pm 1, \ldots, \pm[2\lambda^2\sqrt{n_0\ln N}]).$$

Условие (13) показывает, что неравенства (23) и (26) противоречат друг другу, следовательно, для $x, x_1 = 0, \pm 1, \ldots, \pm(x_0 - 1)$ и $s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1$ числа $f_{s,x,x_1}(\xi,\xi_1)$ равны нулю. Повторив рассуждения, проведенные при выводе неравенства (22), мы получим неравенство:

$$|f^{(s)}(x\omega + x_1\omega_1)| < |f_{s,x,x_1}(\xi,\xi_1)| + e^{-\frac{1}{3}\lambda^8 n_0 N\ln^2 N} \tag{27}$$
$$(s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1,\ x, x_1 = 0, \pm 1, \ldots, \pm[2\lambda^2\sqrt{n_0\ln N}],$$

откуда для $x, x_1 = 0, \pm 1, \ldots, \pm(x_0 - 1)$, $s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1$ следует:

$$|f^{(s)}(x\omega + x_1\omega_1)| < e^{-\frac{1}{3}\lambda^8 n_0 N\ln^2 N}. \tag{28}$$

Покажем, что неравенства (28) справедливы и для целых x и x_1 из большего промежутка. Сделаем это при помощи индукции.

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. *Пусть неравенство* (28) *справедливо для* $s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1$ *и* $x, x_1 = 0, \pm 1, \ldots, \pm(\bar{x}_p - 1)$, *где* $\bar{x}_p = x_0 2^p$ *и* $2^p < 2\lambda$; *тогда это неравенство при* $N > N_7$ *справедливо также для* $s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1$ *и* $x, x_1 = 0, \pm 1, \ldots, \pm(\bar{x}_{p+1} - 1)$ *и для этих же* s, x, x_1 *будет* $f_{s,x,x_1}(\xi,\xi_1) = 0$.

Доказательство. Функция $f(z)$ регулярна во всей плоскости z, кроме точек вида $\omega x + \omega_1 x + \frac{3}{4}\omega$ (x и x_1 — целые числа), в которых она имеет полюсы порядка не выше $2(q-1)$.

Введем функцию

$$F_T(z) = \prod_{r=-T}^{T} \cos^{2q-2}\left(\frac{\pi z}{\omega} - \frac{\pi r\omega_1}{\omega} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Во всех точках вида $\omega x + \omega_1 x_1 + \frac{3}{4}\omega$, x, x_1 — целые, $-T \leqslant x_1 \leqslant T$, эта функция имеет нули порядка $2(q-1)$, так что функция

$$f_T(z) = F_T(z) f(z)$$

будет регулярна в бесконечной полосе $z = t\omega + t_1\omega_1$, $|t| < T + 1$. Пользуясь формулой Коши для производных, получим оценку:

$$|F_T^{(s)}(z)| = \left|\frac{s!}{2\pi i}\int_{|\zeta| = |z|+1} \frac{F_T(\zeta)}{(\zeta - z)^{s+1}}\,d\zeta\right| \leqslant \frac{s!}{2\pi}\,2\pi(|z| + 1)\cdot$$
$$\cdot e^{2(q-1)(2T+1)\left(\frac{\pi}{|\omega|}(1 + |z|) + \frac{\pi T|\omega_1|}{|\omega|} + \frac{\pi}{4}\right)} \leqslant s!\, e^{\lambda_8 qT(|z|+T)}. \tag{29}$$

Неравенство (29) и условия леммы показывают, что для целых x и x_1 при $|x|$, $|x_1| < \bar{x}_p$ и $s \leqslant s_0 - 1$

$$|f_T^{(s)}(\omega x + \omega_1 x_1)| = \left|\sum_{\tau=0}^{s} C_s^\tau F_T^{(\tau)}(\omega x + \omega_1 x_1)\, f^{(s-\tau)}(\omega x + \omega_1 x_1)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2^s s!\, e^{\lambda_8 \lambda^2 N \ln N I(1+\lambda_9 \bar{x}_p) - \frac{1}{3}\lambda_5 n_0 N \ln^2 N}. \tag{30}$$

Оценим величину $f_T^{(s)}(\omega x + \omega_1 x_1)$ для $|x|$, $|x_1| \leqslant 2\bar{x}p$. Обозначим параллелограмм, ограничивающий область $\omega t + \omega_1 t_1$ при $|t|$, $|t_1| \leqslant 2\bar{x}p$, через Δ. Очевидно,

$$\max_{z \in \Delta} |z| = \lambda_9 \bar{x}_p.$$

Положим

$$\rho = \frac{1}{4}\min|x\omega + x_1\omega_1|,$$

где x и x_1 — целые, $x^2 + x_1^2 > 0$, и пусть $R_1 = \lambda_9 \bar{x}_p + \rho$, $R_2 = 3{,}5\, R_1$, T — наименьшее целое, для которого окружность $|z| = R_2$ окажется внутри полосы $|t_1| \leqslant T + \frac{1}{2}$, а T_0 — наименьшее целое, для которого эта окружность окажется внутри полосы $|t| \leqslant T_0$. Тогда

$$T = \lambda_{10}\bar{x}_p, \quad T_0 = \lambda_{11}\bar{x}_p.$$

Параллелограмм, образованный линиями $t = \pm T_0$ и $t_1 = \pm\left(T + \frac{1}{2}\right)$, обозначим через Δ_1. Очевидно,

$$\max_{z \in \Delta_1} |z| = \lambda_{12}\bar{x}_p.$$

На границе этого параллелограмма функция $\wp\left(z + \frac{\omega}{4}\right)$ ограничена числом λ_{13}, следовательно, справедлива оценка:

$$|f(z)| \leqslant q q_0 e^{\lambda^4 N \ln^2 N}\, n_0 \lambda_0^{n+n_1} (\lambda_{12}\bar{x}_p)^{q_0} \lambda_{13}^{q-1} \leqslant e^{3\lambda^4 N \ln^2 N}, \quad N > N_4, \quad z \in \Delta_1.$$

Из оценки (29) для $z \in \Delta_1$ выводим неравенство:

$$|F_T(z)| \leqslant e^{\lambda_8 \lambda^2 N \ln N\, \lambda_{10}\bar{x}_p(\lambda_{12}\bar{x}_p + \lambda_{10}\bar{x}_p)} \leqslant e^{\lambda_{14} 2^{2p} n_0 \lambda^4 N \ln^2 N},$$

так что для $z \in \Delta_1$

$$|f_T(z)| \leqslant e^{(3+\lambda_{14}2^{2p}) n_0 \lambda^4 N \ln^2 N}. \tag{31}$$

Так как функция $f_T(z)$ регулярна внутри области, ограниченной контуром Δ_1, то неравенство (31) остается справедливым и в точках, лежащих внутри контура Δ_1, в частности, в точках окружности $|z| = R_2$.

Применив к функции $f_T(z)$ интерполяционную формулу Эрмита, получим равенство:

$$f_T(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=R_2} \left\{ \prod_{x, x_1 = -\bar{x}_p+1}^{\bar{x}_p-1} \frac{(z - x\omega - x_1\omega_1)}{(\zeta - x\omega - x_1\omega_1)} \right\}^{s_0} \frac{f_T(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} +$$

$$+ \sum_{-\bar{x}_p+1 \leqslant x',\, x_1' \leqslant \bar{x}_p+1} \; \sum_{s=0}^{s_0-1} \frac{f_T^{(s)}(\omega x' + \omega_1 x_1')}{2\pi i \cdot s!} \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{|\zeta - x'\omega - x_1\omega_1| = \rho} \left\{ \prod_{x, x_1 = \bar{x}_p+1}^{\bar{x}_p-1} \frac{(z - x\omega - x_1\omega_1)}{(\zeta - x\omega - x_1\omega_1)} \right\}^{s_0} \frac{(\zeta - \omega x' - \omega_1 x_1')^s}{z - \zeta}\, d\zeta$$

для z, расположенных на окружности $|z| = R_1$. Оценим правую часть этой формулы. Для этого воспользуемся неравенствами (30), (31) и определением величин R_1, R_2, T.

Имеем:

$$\max_{|z| = R_1} |f_T(z)| \leqslant \frac{2\pi R_2}{2\pi} \left(\frac{R_1 + \frac{R_1}{2}}{3{,}5R_1 - \frac{R_1}{2}} \right)^{s_0(2\bar{x}_p-1)^2} \frac{1}{3{,}5R_1 - R_1}\, e^{(3+\lambda_{14}2^{2p})\lambda^4 n_0 N \ln^2 N} +$$

$$+ (2\bar{x}_p + 1)^2 s_0 \frac{2^{s_0}}{2\pi} e^{-\frac{\lambda^8}{3} n_0 N \ln^2 N + \lambda_8 \lambda^2 N \ln N . \lambda_{10}(\lambda_0 + \lambda_{10}) 2^{2p} \lambda^2 n_0 \ln N} \frac{(1+\rho)^{s_0}\, 2\pi\rho}{R_1 - \frac{R_1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \max_{\substack{|z| = R_1 \\ |\zeta - x'\omega - x_1'\omega_1| = \rho}} \left| \prod_{x, x_1 = -x_p+1}^{x_p-1} \left(\frac{z - x\omega - x_1\omega_1}{\zeta - x\omega - x_1\omega_1} \right)^{s_0} \right|. \tag{32}$$

Выведем оценку снизу для произведения

$$\prod_{x = -\bar{x}_p+1}^{\bar{x}_p-1} |\zeta - x\omega - x_1\omega_1|,$$

где x_1 — фиксированное целое из промежутка $[-\bar{x}_p + 1, \bar{x}_p - 1]$, а ζ удовлетворяет условию

$$|\zeta - x'\omega - x_1'\omega_1| = \rho.$$

Очевидно, все множители этого произведения не меньше ρ. Пусть перпендикуляр, опущенный из точки ζ на прямую $z = t\omega + x_1\omega_1$, пройдет между точками $\bar{x}\omega + x_1\omega_1$ и $(\bar{x} + 1)\,\omega + x_1\omega_1$. Тогда

$$\prod_{x = -\bar{x}_p+1}^{\bar{x}_p-1} |\zeta - x\omega - x_1\omega_1| \geqslant |(-\bar{x}_p + 1 - \bar{x})\omega| \cdot$$

$$\cdot |(-\bar{x}_p + 2 - \bar{x})\,\omega| \cdots |\omega| \cdot \rho \cdot \rho \cdot |\omega| \cdot |2\omega| \cdots |(\bar{x}_p - 1 - \bar{x} - 1)\,\omega| =$$

$$= \rho^2 |\omega|^{2\bar{x}_p - 3} (\bar{x}_p + \bar{x} - 1)!\, (\bar{x}_p - \bar{x} - 2)! = \rho^2 |\omega|^{2\bar{x}_p - 3} \left(C_{2\bar{x}_p - 3}^{\bar{x}_p + \bar{x} - 1} \right)^{-1} (2\bar{x}_p - 3)! >$$

$$> \rho^2 |\omega|^{2\bar{x}_p - 3}\, 2^{3 - 2\bar{x}_p} (2\bar{x}_p - 3)^{(2\bar{x}_p - 3)} e^{3 - 2\bar{x}_p} > \lambda_{15}^{\bar{x}_p} \bar{x}_p^{2\bar{x}_p}.$$

Если $\bar{x} = \bar{x}_p - 1$ или $\bar{x}_p - 2$, то проведенное рассуждение следует несколько изменить, но полученная оценка будет справедлива и в этом случае. Таким образом,

$$\frac{(1+\rho)^{s_0} 2\pi\rho}{R_1 - \frac{R_1}{2}} \max_{\substack{|z| = R_1 \\ |\zeta - x'\omega - x'_1\omega_1| = \varepsilon}} \left| \prod_{x,\, x_1 = -\bar{x}_p + 1}^{\bar{x}_p + 1} \left(\frac{z - x\omega - x_1\omega_1}{\zeta - x\omega - x_1\omega_1} \right)^{s_0} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left(R_1 + \frac{R_1}{2}\right)^{(2\bar{x}_p - 1)^2 s_0} (1+\rho)^{s_0}}{\left(\lambda_{15}^{\bar{x}_p} \bar{x}_p^{2\bar{x}_p}\right)^{(2\bar{x}_p - 1)^2 s_0}} \leqslant \frac{\left(\frac{3}{2}\lambda_9 \bar{x}_p + \frac{3}{2}\rho\right)^{4\lambda^5 2^{2p} n_0 N \ln^2 N} (1+\rho)^{\lambda^3 N \ln N}}{(\lambda_{15} \bar{x}_p)^{4\lambda^5 2^{2p} n_0 N \ln^2 N}} \leqslant$$

$$\leqslant e^{\lambda_{16} \lambda^5 2^{2p} n_0 N \ln^2 N},$$

и вследствие (13), (15) и (32) получаем:

$$\max_{|z| = R_1} |f_T(z)| \leqslant \frac{3}{2{,}5} e^{-3 \ln 2 \cdot 2^{2p} \lambda^5 n_0 N \ln^3 N + (3 + \lambda_{14})\, 2^{2p} \lambda^4 n_0 N \ln^2 N} +$$

$$+ e^{-\frac{1}{3} \lambda^8 n_0 N \ln^2 N + \lambda_{14} 2^{2p} \lambda^4 n_0 N \ln^2 N + \lambda_{16} 2^{2p} \lambda^5 n_0 N \ln^2 N} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-2^{2p} \lambda^5 n_0 N \ln^2 N}, \quad N > N_5. \tag{33}$$

Возвратимся к функции $f(z)$. Оценим снизу функцию $F_T(z)$ в окрестностях точек $x\omega + x_1\omega_1$ при целых x, x_1. Пусть

$$\frac{1}{\omega} = \alpha + \beta i, \quad \frac{\omega_1}{\omega} = \alpha_1 + \beta_1 i,$$

$$\varepsilon = \min\left(\rho;\ \frac{|\beta_1|}{2 \max\limits_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} |\alpha \sin\theta + \beta\cos\theta|};\ \frac{1}{8 \max\limits_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} |\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta|}\right). \tag{34}$$

Положим

$$z = \omega x + \omega_1 x_1 + \varepsilon(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Тогда

$$w = \left| \cos\left(\frac{\pi z}{\omega} - \pi r \frac{\omega_1}{\omega} - \frac{\pi}{4}\right) \right| =$$

$$= \left| \cos\left\{\pi(x_1 - r)(\alpha_1 + \beta_1 i) + \pi\varepsilon(\cos\theta + i\sin\theta)(\alpha + \beta i) - \frac{\pi}{4}\right\} \right| =$$

$$= \left| \cos\left\{\pi(x_1 - r)\alpha_1 - \frac{\pi}{4} + \pi\varepsilon(\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + i\pi(x_1 - r)\beta_1 + i\pi\varepsilon(\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)\right\} \right|.$$

Если $x_1 \neq r$, то в силу (34), неравенства

$$|\cos(a + bi)| = \left| \frac{e^{-b+ai} + e^{b-ai}}{2} \right| \geqslant \frac{1}{2}\left(e^{|b|} - e^{-|b|}\right) \geqslant |b|$$

и того, что $\beta_1 \neq 0$, получаем:

$$w \geqslant \frac{\pi |\beta_1|}{2} > 0.$$

Если же $x_1 = r$, то

$$w = \left| \cos\left\{\frac{\pi}{4} - \pi\varepsilon(\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta) - i\pi\varepsilon(\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)\right\} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left| e^{\pi\varepsilon(\alpha \sin\theta + \beta\cos\theta) + i\frac{\pi}{4} - i\pi\varepsilon(\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta)} + \right.$$

$$\left. + e^{-\pi\varepsilon(\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta) - i\frac{\pi}{4} - i\pi\varepsilon(\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta)} \right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left(e^{\pi\varepsilon(\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta)} \cos\left[\frac{\pi}{4} - \pi\varepsilon(\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta)\right] + \right.$$

$$\left. + e^{-\pi\varepsilon(\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta)} \cos\left[\frac{\pi}{4} - \pi\varepsilon(\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta)\right]\right) \geqslant$$

$$\geqslant \cos\left[\frac{\pi}{4} - \pi\varepsilon(\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta)\right] \geqslant \cos\frac{3\pi}{8}.$$

Таким образом, все функции $\cos\left(\frac{\pi z}{\omega} - \pi r\frac{\omega_1}{\omega} - \frac{\pi}{4}\right)$ равномерно ограничены по абсолютной величине снизу в областях $|x\omega + x_1\omega_1 - z| \leqslant \varepsilon$ положительным числом λ_{18}, так что

$$\min_{|x\omega+x_1\omega_1-z|\leqslant\varepsilon} |F_T(z)| = \min_{|x\omega+x_1\omega_1-z|\leqslant\varepsilon} \left| \prod_{r=-T}^{T} \cos^{2q-2}\left(\frac{\pi z}{\omega} - \pi r\frac{\omega_1}{\omega} - \frac{\pi}{4}\right)\right| \geqslant$$

$$\geqslant \lambda_{18}^{(2q-2)(2T+1)} \geqslant e^{-\lambda_{19}\lambda^3 2^p N \ln N \sqrt{n_0 \ln N}}.$$

Но все области $|z - x\omega - x_1\omega_1| \leqslant \varepsilon$ для $x,\ x_1 = 0, \pm 1, \ldots, \pm(\bar{x}_{p+1} - 1)$ лежат в круге $|z| \leqslant R_1$, следовательно, из (33) вытекает:

$$\max_{|z-x\omega-x_1\omega_1|\leqslant\varepsilon} |f(z)| \leqslant \max_{|z|=R_1} |f_T(z)| \cdot \frac{1}{\min\limits_{|z-x\omega-x_1\omega_1|\leqslant\varepsilon} |F_T(z)|} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-2^{2p}\lambda^5 n_0 N \ln^2 N + \lambda_{19} 2^{2p}\lambda^3 n_0^{\frac{1}{2}} N \ln^{\frac{3}{2}} N} < e^{-\frac{1}{2}\lambda^5 2^{2p} n_0 N \ln^2 N},$$

$$N > N_6, \quad x,\ x_1 = 0, \pm 1, \ldots, \pm(\bar{x}_{p+1} - 1).$$

Воспользовавшись формулой Коши для производных аналитической функции, получим неравенство:

$$\left| f^{(s)}(x\omega + x_1\omega_1)\right| \leqslant \frac{s!}{2\pi}\left| \int_{|x\omega+x_1\omega_1-\zeta|=\varepsilon} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - x\omega - x_1\omega_1)^{s+1}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{1}{2}2^{2p}\lambda^5 N \ln^2 N + \lambda^3 N \ln N - s\ln\varepsilon} \leqslant e^{-\frac{1}{3}2^{2p}\lambda^5 n_0 N \ln^2 N} \tag{35}$$

$$(s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1; \quad x,\ x_1 = 0, \pm 1, \ldots, \pm(\bar{x}_{p+1} - 1)).$$

Неравенство (22) приводит нас теперь к неравенству

$$|f_{s,x,x_1}(\xi, \xi_1)| \leqslant e^{-\frac{1}{3}2^{2p}\lambda^5 n_0 N \ln^2 N} + e^{-\frac{1}{3}\lambda^8 n_0 N \ln^2 N} \leqslant e^{-\frac{1}{4}2^{2p}\lambda^5 n_0 N \ln^2 N}$$

$$(s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1; \quad x,\ x_1 = 0, \pm 1, \ldots, \pm(\bar{x}_{p+1} - 1)). \tag{36}$$

Из сравнения этого неравенства с неравенством (26) мы заключаем, что для рассматриваемых $s,\ x,\ x_1$ величины $f_{s,x,x_1}(\xi, \xi_1)$ должны обращаться в нуль и что должно выполняться неравенство (28). Лемма доказана.

Последовательно применяя основную лемму, получим, что $f_{s,x,x_1}(\xi, \xi_1) = 0$ для $s = 0, 1, \ldots, q-1$ и x, $x_1 = 0, \pm 1, \ldots, \pm 2[\lambda^2 \sqrt{n_0 \ln N}]$.

В качестве $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{q_0-1}$ выберем q_0 чисел $x\omega + x_1\omega_1$ с x, x_1 — целыми числами из промежутка $(-2[\lambda^2 \sqrt{n_0 \ln N}], 2[\lambda^2 \sqrt{n_0 \ln N}])$. Тогда соответствующие $f_{s,x,x_1}(\xi, \xi_1)$ совпадают с величинами $f_{y,s}$ из леммы 3 и формула (6) показывает, что все коэффициенты $C_{k,l}$ функции $f(z)$ равны нулю. Но величины $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n_0}$ линейно независимы, значит все числа $C_{k,l}^{(\tau)}$ равны нулю, а это противоречит их выбору; следовательно, неравенство (14) для достаточно больших N невозможно. Увеличив постоянную Λ, мы получим неравенство (2), справедливое для всех N.

Поступило
8.VII.1957

ЛИТЕРАТУРА

1 Гельфонд А. О., Трансцендентные и алгебраические числа, Москва, 1952.
2 Фельдман Н. И., Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел. II, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 15 (1951), 153—176.
3 Фельдман Н. И., Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел. I, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 15 (1951), 53—74.
4 Гекке Э., Лекции по теории алгебраических чисел, М.—Л., 1940.
5 Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, М.—Л., 1934.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 577—584

И. М. ВИНОГРАДОВ

ОБ ОДНОМ КРАТНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Дано новое улучшение оценки известного интеграла

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |T_0|^{2b}\, d\alpha_n \cdots d\alpha_1;$$

$$T_0 = \sum_{0 < x \leqslant p_0} e^{2\pi i (\alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x)}.$$

Обозначения. Буквою n обозначаем целое число с условием $n \geqslant 4$; полагаем $\nu = \frac{1}{n}$.

Символом $\sum^{M} Z$ обозначаем сумму не более чем M слагаемых вида Z, а символом $\sum_0^{M} Z$ обозначаем произведение положительного числа A на сумму не более чем B слагаемых вида Z при условии, что $AB \leqslant M$.

Говоря о значениях x, попадающих в интервал длиною h, мы будем иметь в виду то обстоятельство, что все эти значения удовлетворяют одному и тому же условию вида $a < x \leqslant a + h$.

В этой статье дано новое усовершенствование теоремы, касающейся оценки интеграла вида

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 |T_0|^{2b} d\alpha_n \ldots d\alpha_1;$$

$$T_0 = \sum_{0 < x \leqslant p_0} e^{2\pi i (\alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x)},$$

где x пробегает какую-либо возрастающую последовательность целых чисел, лежащих в указанных границах. Метод доказательства этой теоремы является дальнейшим усовершенствованием метода доказательств прежних ее вариантов [лемма 3, стр. 408 книги (1); теорема 1 работы (2)]. Как частный случай из этой теоремы получается лемма работы (3).

ЛЕММА 1. *Пусть* m — *целое положительное и* $U_0, \ldots, U_m$ — *неотрицательные. Тогда*

$$\left(\sum_{s=0}^{m} 2^{-s} U_s\right)^2 \leqslant 2 \sum_{s=0}^{m} U_s^2.$$

Доказательство. Доказательство тривиально.

ЛЕММА 2. *Пусть* $p_0 \geqslant (2n)^n$, $p_0 = RH$, $R > 1$, $H \geqslant n^2$, $C = n$, *наконец*, $v_1, \ldots, v_n$ *пробегают целые числа интервалов*

$$X_1 < v_1 \leqslant Y_1, \ldots, \quad X_n < v_n \leqslant Y_n,$$

ограниченных условиями:

$$-p_0 \leqslant X_1, \quad X_1+R \leqslant Y_1, \quad Y_1+R \leqslant X_2, \ldots, \quad X_n+R \leqslant Y_n, \quad Y_n \leqslant p_0.$$

Тогда, каковы бы ни были интервалы с длинами

$$Cp_0^{1-\nu}, \ldots, Cp_0^{n(1-\nu)},$$

для числа E систем значений $v_1, \ldots, v_n$, при которых суммы

$$v_1+\ldots+v_n, \ldots, \quad v_1^n+\ldots+v_n^n \tag{1}$$

соответственно лежат в этих интервалах, будем иметь:

$$E < C^n H^{\frac{n(n-1)}{2}} p_0^{\frac{n-1}{2}}.$$

Доказательство. На стр. 383 книги ([1]) для числа E_0 систем значений $v_1, \ldots, v_n$, при которых суммы (1) соответственно лежат в каких-либо интервалах с длинами $C, \ldots, Cp_0^{n-1}$, дана оценка (вывод ее, очевидно, верен при $n \geqslant 4$):

$$E_0 < \left(1+\frac{1}{C}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{CH}\right)\left(\frac{7}{9}+\frac{1}{CH^2}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{CH^3}\right)^{n-3} C^n H^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Отсюда следует, что

$$E_0 < 0{,}5C^n H^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Из этой оценки и из соотношения

$$\frac{E}{E_0} = (p_0^{1-\nu}+1)(p_0^{1-2\nu}+1)\ldots(p_0^{\nu}+1) < 2p_0^{\frac{n-1}{2}}$$

и следует утверждение леммы.

ЛЕММА 3. *Пусть l — целое положительное,*

$$p_t = p_0^{(1-\nu)^t}, \quad p_{l-1} \geqslant (2n)^n.$$

Пусть каждому $t=0, \ldots, l-1$ отвечают свои системы

$$(U_{t,1}, \ldots, U_{t,n}),$$

состоящие из целых чисел с условиями

$$|U_{t,1}| \leqslant np_t, \ldots, \quad |U_{t,n}| \leqslant np_t^n,$$

причем можно указать число F_t такое, что, каковы бы ни были число $C \geqslant 2n$ и интервалы с длинами

$$Cp_t^{1-\nu}, \ldots, Cp_t^{n(1-\nu)},$$

число систем $(U_{t,1}, \ldots, U_{t,n})$ с числами, соответственно попадающими в эти интервалы, не превосходит C^nF_t. Выбрав для каждого $t=0, \ldots, l-1$ одну из отвечающих этому t систем и полагая

$$U_s = U_{0,s}+\cdots+U_{l-1,s},$$

составим систему $(U_1, \ldots, U_n)$. Тогда, каковы бы ни были $z_1, \ldots, z_n$, число систем $(U_1, \ldots, U_n)$ с условием

$$U_1 = z_1, \ldots, U_n = z_n \tag{2}$$

будет

$$< 2^l (2n)^{nl} F_0 \ldots F_{l-1}.$$

Доказательство. При наличии равенств (2) для заданного t и для r, равного одному из чисел $1, \ldots, n$, имеем:

$$U_{t,r} = z_r - (U_{0,r} + \cdots + U_{t-1,r}) - (U_{t+1,r} + \cdots + U_{l-1,r}),$$

причем второй член правой части (первые скобки) при $t = 0$ отсутствует. Третий член правой части (вторые скобки) при $t = l - 1$ отсутствует, а при $t < l - 1$ он или отсутствует, или же численно

$$\leqslant n(p_{t+1}^r + \cdots + p_{l-1}^r) = np_{t+1}^r \left(1 + \frac{p_{t+2}}{p_{t+1}} + \cdots + \frac{p_{l-1}}{p_{l-2}} \cdots \frac{p_{t+2}}{p_{t+1}}\right) <$$

$$< np_{t+1}^r (1 + p_{l-2}^{-\nu} + p_{l-2}^{-2\nu} + \ldots) = 0{,}5C_0 p_t^{r(1-\nu)}, \quad C_0 = \frac{2n}{1 - (2n)^{-1}}.$$

Поэтому при заданных системах

$$(z_1, \ldots, z_n), \ (U_{0,1}, \ldots, U_{0,n}), \ldots, (U_{t-1,1}, \ldots, U_{t-1,n})$$

числа системы $(U_{t,1}, \ldots, U_{t,n})$ соответственно попадают во вполне определенные интервалы с длинами

$$C_0 p_t^{1-\nu}, \ldots, C_0 p_t^{n(1-\nu)}.$$

Число же систем $(U_{t,1}, \ldots, U_{t,n})$ с таким ограничением, согласно условию леммы, не превосходит $C_0^n F_t$. Отсюда уже легко убедимся, что число систем $(U_1, \ldots, U_n)$ с условием (2) будет

$$\leqslant C_0^{nl} F_0 \ldots F_{l-1} < 2^l (2n)^{nl} F_0 \ldots F_{l-1}.$$

ТЕОРЕМА. *Пусть l — целое положительное,*

$$p_0^{(1-\nu)^l} \geqslant (4n^2)^n, \quad b = \left[nl + \frac{n(n+1)}{4} + 1\right],$$

$$f(x) = \alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x, \quad T_0 = \sum_{0 < x < p_0} e^{2\pi i f(x)},$$

где x пробегает какую-либо возрастающую последовательность (x) целых чисел, лежащих в указанных границах. Тогда имеем:

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |T_0|^{2b} d\alpha_n \ldots d\alpha_1 < 2^{2bl + 2{,}5n^2 l - nl^2} n^{n^2 l} p_0^{2b - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}(1-\nu)^l}.$$

Доказательство. При любом $t = 0, 1, \ldots, l$ примем обозначения:

$$b_t = b - nt, \quad p_t = p_0^{(1-\nu)^t}, \quad \eta_t = \left[\log_2 \frac{p_t^\nu}{4n^2}\right],$$

$$R_{t,s} = p_t (4n^2 2^s)^{-1}, \quad s = 0, 1, \ldots, \eta_t.$$

Тогда при $t \leqslant l - 1$ будем иметь:

$$\eta_t \geqslant 0, \quad \frac{1}{2} \frac{p_t^\nu}{4n^2} \leqslant 2^\eta \leqslant \frac{p_t^\nu}{4n^2}, \quad R_{t,s} \geqslant p_t^{1-\nu}.$$

Условимся символом T_t обозначать всякую сумму вида

$$T_t = \sum e^{2\pi i f(x)},$$

где x пробегает числа последовательности (x), лежащие в каком-либо

интервале вида

$$\omega < x \leqslant \omega + p_t. \tag{3}$$

Взяв любое число s ряда $0, 1, \ldots, \eta_t$, мы разобьем интервал (3) на $4n^2 2^s$ интервалов вида

$$\omega + (g-1) R_{t,s} < x \leqslant \omega + g R_{t,s}, \quad g = 1, \ldots, 4n^2 2^s, \tag{4}$$

причем g назовем номером интервала. Тогда $T_t^{b_t}$ разобьется на сумму $(4n^2 2^s)^{b_t}$ произведений $Z_{t,s}$:

$$T_t^{b_t} = \sum Z_{t,s}, \quad Z_{t,s} = Z_{t,s,1} \ldots Z_{t,s,b_t}, \quad Z_{t,s,j} = \sum e^{2\pi i f(x)}.$$

Здесь интервал суммирования каждого $Z_{t,s,j}$ есть один из интервалов (4); номер последнего будем считать и номером $Z_{t,s,j}$ (очевидно $Z_{t,s,j}$ может представиться и пустою суммой, если соответствующий интервал (4) не содержит чисел последовательности (x); но произведения $Z_{t,s}$, содержащие такие $Z_{t,s,j}$, как равные нулю, мы можем не рассматривать).

Если среди номеров сомножителей произведения $Z_{t,s}$ найдется n таких, что разность между любыми двумя из них численно >1, то произведение $Z_{t,s}$ назовем правильным; в противном случае произведение $Z_{t,s}$ назовем неправильным.

Пусть g_1 — наименьший из номеров сомножителей неправильного $Z_{t,s}$, g_2 — наименьший из номеров, превосходящих $g_1 + 1$, и т. д.; наконец, g_{n_1} — наименьший из номеров, превосходящих $g_{n_1-1} + 1$, причем номеров, превосходящих $g_{n_1} + 1$, не имеется. Очевидно $n_1 < n$ (в противном случае $Z_{t,s}$ оказалось бы правильным). Заставляя $g'_1, \ldots, g'_{n-1}$ независимо друг от друга пробегать значения $1, \ldots, 4n^2 2^s$, получим $(4n^2 2^s)^{n-1}$ систем $g'_1, \ldots, g'_{n-1}$. Среди них найдется по меньшей мере одна с условием, что ряд $g'_1, \ldots, g'_{n_1}$ совпадает с рядом $g_1, \ldots, g_{n_1}$, причем номера всех сомножителей произведения $Z_{t,s}$ найдутся среди чисел

$$g'_1,\ g'_1 + 1,\ g'_2,\ g'_2 + 1, \ldots,\ g'_{n-1},\ g'_{n-1} + 1. \tag{5}$$

Заставляя $g''_1, \ldots, g''_{b_t}$ независимо друг от друга пробегать значения (5), получим $(2n-2)^{b_t}$ систем $g''_1, \ldots, g''_{b_t}$. Среди них найдется система, совпадающая с системой номеров рассматриваемого произведения $Z_{t,s}$. Из сказанного следует, что число неправильных произведений $Z_{t,s}$ будет

$$< (4n^2 2^s)^{n-1} (2n)^{b_t}.$$

Всякое правильное из произведений $Z_{t,0}$ будем обозначать символом $Z'_{t,0}$. При $0 < s \leqslant \eta_t$ каждое неправильное произведение $Z_{t,s-1}$ представляется суммою $\leqslant 2^{b_t}$ произведений $Z_{t,s}$. При $s < \eta_t$ каждое правильное из них будем обозначать символом $Z'_{t,s}$, при $s = \eta_t$ каждое из них будем обозначать символом $Z'_{t,s}$. Из сказанного следует, что число произведений $Z'_{t,s}$ при $s = 0$ будет

$$< (4n^2)^{b_t},$$

а при $s > 0$ будет

$$< (4n^2 2^s)^{n-1} (2n)^{b_t} 2^{b_t} = (4n^2)^{n-1} 2^{s(n-1)} (4n)^{b_t}.$$

Объединяя при $t \leqslant l-1$ оба случая одною формулой, мы можем сказать, что при $t \leqslant l-1$ и любом $s=0, 1, \ldots, \eta_t$ число произведений $Z'_{t,s}$ будет

$$< 2^{-s}(4n^2)^{b_t} 2^{sn}.$$

Действительно, при $s=0$ это утверждение очевидно, а при $s>0$ оно следует из неравенства

$$\frac{(4n^2)^{n-1} 2^{s(n-1)} (4n)^{bt}}{2^{-s}(4n^2)^{b_t} 2^{sn}} = \frac{(4n^2)^{n-1}}{n^{b_t}} \leqslant \frac{n^{3(n-1)}}{n^{\frac{n(n+5)}{4}}} \leqslant 1.$$

На основании доказанного, при $t \leqslant l-1$ находим:

$$|T_t|^{b_t} < \sum_{s=0}^{\eta_t} 2^{-s} \sum^{(4n^2)^{b_t} 2^{sn}} Z'_{t,s}|,$$

откуда, применяя лемму 1, выводим:

$$|T_t|^{2b_t} \leqslant 2\sum_{s=0}^{\eta_t} \Big(\sum^{(4n^2)^{b_t} 2^{sn}} |Z'_{t,s}| \Big)^2 \leqslant \sum_{s=0}^{\eta_t} \sum^{2(4n^2)^{2b_t} 2^{2sn}} |Z'_{t,s}|^2.$$

Далее, полагаем

$$|Z'_{t,s}|^2 = |Z''_{t,s}|^2 |Z'''_{t,s}|^2,$$

где $Z''_{t,s}$ — произведение тех n сомножителей произведения $Z'_{t,s}$, которые характеризуют это произведение как правильное, если $s<\eta_t$, и — произведение любых n сомножителей произведения $Z'_{t,s}$, если $s=\eta_t$. При этом $|Z'''_{t,s}|^2$ можно представить в виде произведения

$$2b_t - 2n = 2b_{t+1}$$

сомножителей вида $|Z_{t,s,j}|$, причем, согласно известному неравенству имеем:

$$|Z'''_{t,s}|^2 \leqslant (2b_{t+1})^{-2b_{t+1}} \Big(\sum |Z_{t,s,j}|\Big)^{2b_{t+1}},$$

где суммирование распространяется на указанные $2b_{t+1}$ сомножителей. Каждое $Z_{t,s,j}$ можно представить в виде суммы

$$\leqslant R_{t,s}\, p_{t+1}^{-1} + 1 \leqslant 2p_t^{\nu}(4n^2 2^s)^{-1}$$

слагаемых вида T_{t+1}. Поэтому

$$\sum |Z_{t,s,j}| \leqslant \sum^{4b_{t+1} p_t^{\nu}(4n^2 2^s)^{-1}} |T_{t+1}|,$$

$$|Z'''_{t,s}|^2 \leqslant \sum^{(2p_t^{\nu}(4n^2 2^s)^{-1})^{2b_{t+1}}} |T_{t+1}|^{2b_{t+1}},$$

$$|T_t|^{2b_t} \leqslant \sum_{s=0}^{\eta_t} \sum_0^{M_{t,s}} |Z''_{t,s}|^2 |T_{t+1}|^{2b_{t+1}},$$

$$M_{t,s} = 2(4n^2 2^s)^{2n} (2p_t^{\nu} 2^{-s})^{2b_{t+1}}.$$

Написав это неравенство для $t = 0, 1, \ldots, l-1$ (заменяя теперь при заданном t символ s символом s_t), получим:

$$|T_0|^{2b} \leqslant \sum_{s_0=0}^{\eta_0} \cdots \sum_{s_{l-1}=0}^{\eta_{l-1}} \sum_0^M K(s_0, \ldots, s_{l-1}), \quad M = M_{0, s_0} \ldots M_{l-1, s_{l-1}},$$
$$K(s_0, \ldots, s_{l-1}) = |Z''_{0, s_0}|^2 \ldots |Z_{l-1, s_{l-1}}|^2 |T_l|^{2b_l}. \tag{6}$$

Рассмотрим какое-либо определенное $K(s_0, \ldots, s_{l-1})$, причем преобразуем его подстановкой $x = x_0 + v$, где x_0 — значение x, отвечающее одному из слагаемых суммы T_l. Пусть Z''_{t, s_t} — одно из произведений $Z''_{0, s_0}, \ldots, Z''_{l-1, s_{l-1}}$, входящих в это $K(s_0, \ldots, s_{l-1})$. Новые переменные суммирования его n сомножителей $Z_{t, s_t, j}$, расположенных в порядке возрастания номеров, мы обозначим символами $v_1, \ldots, v_n$. Тогда легко найдем:

$$|Z''_{t, s_t}|^2 = \sum e^{2\pi i (X_1 U_1 + \ldots + X_n U_n)}, \quad X_r = \frac{f^{(r)}(x_0)}{r!},$$

где $U_r = V_r - W_r$, причем суммирование распространяется на все системы $(V_1, \ldots, V_n)$, определяемые условием

$$V_r = v_1^r + \ldots + v_n^r, \quad r = 1, \ldots, n,$$

и, независимо от этого, на все системы $(W_1, \ldots, W_n)$, определяемые так же, как и системы $(V_1, \ldots, V_n)$. Нетрудно видеть, что $|U_r| \leqslant np_t^r$.

При $C \geqslant 2n$ оценим число E_1 систем $(U_1, \ldots, U_n)$ с условием, что $U_1, \ldots, U_n$ лежат в наперед заданных интервалах с длинами

$$Cp_t^{1-\nu}, \ldots, Cp_t^{n(1-\nu)}. \tag{7}$$

Сначала рассмотрим случай $s_t < \eta_t$. Из леммы 2 следует, что число E систем $(V_1, \ldots, V_n)$ с условием, что $V_1, \ldots, V_n$ лежат в каких-либо наперед заданных интервалах с длинами (7), удовлетворяет неравенству

$$E < C^n (4n^2 2^{s_t})^{\frac{n(n-1)}{2}} p_t^{\frac{n-1}{2}}.$$

Поэтому

$$E_1 < C^n (4n^2 2^{s_t})^{\frac{n(n-1)}{2}} p_t^{\frac{n-1}{2}} (R_{t, s_t} + 1)^n.$$

Далее, находим:

$$\left(1 + \frac{1}{R_{t, s_t}}\right)^{2n} \leqslant \left(1 + \frac{1}{(4n^2)^{n-1}}\right)^{2n} < 2,$$
$$E_1 < 2C^n (4n^2 2^{s_t})^{\frac{n(n+1)}{2} - 2n} p_t^{2n - \frac{n+1}{2}}. \tag{8}$$

Теперь рассмотрим случай $s_t = \eta_t$. Здесь имеем:

$$E_1 \leqslant (R_{t, s_t} + 1)^{2n} < 2p_t^{2n} (4n^2 2^{\eta_t})^{-2n}.$$

Отношение этой границы для E_1 к значению при $s_t = \eta_t$ правой части неравенства (8) будет

$$\leqslant \frac{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}{C^n} \leqslant 2^{\frac{n^2-5n}{2}}.$$

Поэтому уже при любом $s_t = 0, 1, \ldots, \eta_t$ имеем:

$$E_1 < C^n F_{t, s_t}, \quad F_{t, s_t} = 2^{\frac{n^2-5n+2}{2}} (4n^2 2^{s_t})^{\frac{n(n+1)}{2} - 2n} p_t^{2n - \frac{n+1}{2}}.$$

Отсюда и из леммы 3 следует, что

$$K(s_0, \ldots, s_{l-1}) = \sum e^{2\pi i (X_1 y_1 + \ldots + X_n y_n)},$$

где суммирование распространяется на системы $(y_1, \ldots, y_n)$, состоящие из целых чисел, причем число таких систем с условием $y_1 = z_1, \ldots, y_n = z_n$ будет

$$< U; \; U = 2^{1+l} (2n)^{nl} F_{0, s_0} \ldots F_{l-1, s_{l-1}} p_l^{2b_l}.$$

Далее, оценим интеграл

$$I = \int_0^1 \cdots \int_0^1 K(s_0, \ldots, s_{l-1}) \, d\alpha_n \ldots d\alpha_1.$$

Сумму $X_1 y_1 + \ldots + X_n y_n$ можно получить, заменив в разложении по степеням y разности

$$f(x_0 + y) - f(x_0) = \alpha_n ((x_0 + y)^n - x_0^n) + \ldots + \alpha_1 ((x_0 + y) - x_0)$$

степени $y, \ldots, y^n$ числами $y_1, \ldots, y_n$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} &X_1 y_1 + \cdots + X_n y_n = \alpha_n A_n + \cdots + \alpha_1 A_1, \\ &A_n = \binom{n}{1} x_0^{n-1} y_1 + \ldots + \binom{1}{1} x_0 y_{n-1} + y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &A_2 = \binom{2}{1} x_0 y_1 + y_2, \\ &A_1 = y_1. \end{aligned}$$

Интеграл I, очевидно, равен числу систем $(A_1, \ldots, A_n)$ с условием $A_1 = \ldots = A_n = 0$. Следовательно, он равен числу систем $(y_1, \ldots, y_n)$ с условием $y_1 = \ldots = y_n = 0$. Поэтому $I < U$.

Далее, из (6) выводим:

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |T_0|^{2b} d\alpha_n \ldots d\alpha_1 < \sum_{s_0=0}^{\eta_0} \cdots \sum_{s_{l-1}=0}^{\eta_{l-1}} MU, \tag{9}$$

причем находим:

$$MU = 2^{1+l} (2n)^{nl} p_l^{2b_l} M_{0, s_0} F_{0, s_0} \ldots M_{l-1, s_{l-1}} F_{l-1, s_{l-1}},$$

$$M_{t, s_t} F_{t, s_t} = 2^{\frac{3n^2-3n+4}{2}} n^{n(n+1)} 2^{2b_{t+1}} p_t^{2b_{t+1}\nu + 2n - \frac{n+1}{2}} 2^{s_t \left(\frac{n(n+1)}{2} - 2b_{t+1}\right)},$$

$$\frac{n(n+1)}{2} - 2b_{t+1} \leqslant -1, \qquad \sum_{s_t=0}^{\eta_t} 2^{-s_t} < 2,$$

$$\prod_{t=0}^{l-1} 2 \cdot 2^{\frac{3n^2-3n+4}{2} + 2b_{t+1}} n^{n(n+1)} < 2^{\frac{3n^2-3n+6}{2} l + 2bl - nl(l+1)} n^{n(n+1) l},$$

$$\prod_{t=0}^{l-1} p_t^{2b_{t+1}\nu+2n-\frac{n+1}{2}} = \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{2b_1}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{2b_2} \cdots \left(\frac{p_{l-1}}{p_l}\right)^{2b_l} (p_0 \cdots p_{l-1})^{2n-\frac{n+1}{2}} =$$

$$= p_0^{2b} p_l^{-2b_l} (p_0 \cdots p_{l-1})^{-\frac{n+1}{2}} = p_0^{2b} p_l^{-2b_l} p_0^{-\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}(1-\nu)^l}.$$

Поэтому правая часть неравенства (9) будет

$$< 2^{2,5n^2l-nl^2+2bl} n^{n^2l} p_0^{2b-\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}(1-\nu)^l}.$$

Поступило
9. VII. 1958

ЛИТЕРАТУРА

[1] Виноградов И. М., Избранные труды, Изд. АН СССР, 1952.
[2] Hua L. K., An improvement of Vinogradov's mean value theorem and several applications, Quart. J. Math., 20 (1949), 48—61.
[3] Виноградов И. М., Новая оценка функции $\zeta(1+it)$, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 22 (1958), 161—164.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 585—598

М. П. МИНЕЕВ

ДИОФАНТОВО УРАВНЕНИЕ С ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ К ИЗУЧЕНИЮ ЭРГОДИЧЕСКОЙ СУММЫ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе находится асимптотическая формула для числа решений диофантова уравнения

$$m_1 g^{x_1} + \cdots + m_k g^{x_k} = n_1 g^{y_1} + \cdots + n_k g^{y_k}$$

при увеличении интервала, в который попадают решения. Устанавливается, что

$$\lim_{p\to\infty} \operatorname*{mes}_{0\leqslant\alpha\leqslant 1} E\left\{\sum_{x=0}^{p-1} f(g^x\alpha) < \lambda\sqrt{p}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz.$$

В своей работе (1) А. Г. Постников дает асимптотическую формулу при $p\to\infty$ величины $A_k(p)$, выражающую число решений диофантова уравнения

$$g^{x_1} + \cdots + g^{x_k} = g^{y_1} + \cdots + g^{y_k}$$

в числах $0 \leqslant x_1, \ldots, x_k, \ y_1, \ldots, y_k \leqslant p-1$.

Эта формула имеет вид:

$$A_k(p) = k!p^k + O(p^{k-1}).$$

Пользуясь методом, предложенным в его работе, мы в настоящей статье находим асимптотическую формулу при $p\to\infty$ величины $A_k(p)$, выражающую число решений диофантова уравнения

$$m_1 g^{x_1} + \cdots + m_k g^{x_k} = n_1 g^{y_1} + \cdots + n_k g^{y_k}$$

в числах $0 \leqslant x_1, \ldots, x_k, \ \ y_1, \ldots, y_k \leqslant p-1$ ($m_1, \ldots, m_k, \ n_1, \ldots, n_k$ и $g \geqslant 2$ — фиксированные натуральные числа), и, как приложение этого результата, получаем одну теорему Каца [см. (2)], действуя другим методом.

§ 1. Будем говорить, что системы целых чисел $m_1, \ldots, m_k$ и $n_1, \ldots, n_k$ имеют одинаковый состав, если можно установить между компонентами этих систем взаимно однозначное соответствие так, что если m_i соответствует n_j, то $m_i = n_j$. В противном случае системы имеют неодинаковый состав.

Назовем систему целых чисел $\hat{m}_1, \ldots, \hat{m}_k$ редуцированной относительно g ($g \geqslant 2$ — натуральное) для системы целых чисел $m_1, \ldots, m_k$, если

$$\hat{m}_i = \frac{m_i}{g^l},$$

где l — максимально возможное целое.

ТЕОРЕМА. *Пусть* $m_1, \ldots, m_k$, $n_1, \ldots, n_k$ *и* $g \geqslant 2$ — *фиксированные натуральные числа. Если составы систем* $\hat{m}_1, \ldots, \hat{m}_k$ *и* $\hat{n}_1, \ldots, \hat{n}_k$, *редуцированные относительно* $g \geqslant 2$ *соответственно для систем* $m_1, \ldots, m_k$ *и* $n_1, \ldots, n_k$, *одинаковые, то число решений* $A_k(p)$ *диофантова уравнения*

$$m_1 g^{x_1} + \cdots + m_k g^{x_k} = n_1 g^{y_1} + \cdots + n_k g^{y_k} \tag{1}$$

в числах $0 \leqslant x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k \leqslant p-1$ *при* $p \to \infty$ *выражается формулой:*

$$A_k(p) = i_1!\, i_2! \ldots i_s!\, p^k + O(p^{k-1}), \tag{2}$$

где $i_1, \ldots, i_s$ *определяются из разбиения системы* $m_1, \ldots, m_k$ *на классы равных:*

$$\hat{m}_1^{(1)} = \cdots = \hat{m}_{i_1}^{(1)} = \hat{m}^{(1)}, \ldots, \hat{m}_1^{(1)} = \cdots = \hat{m}_{i_s}^{(s)} = m^{(s)}$$

$(\hat{m}^{(i)} \neq \hat{m}^{(j)}$, *если* $i \neq j$, $i_1 + \cdots + i_s = k)$.

Если же такие составы не совпадают, то число решений уравнения (1) *выражается формулой*

$$A_k(p) = O(p^{k-1}). \tag{3}$$

Доказательство. Очевидно, что решения уравнения

$$m_1 g^{x_1} + \cdots + m_k g^{x_k} = n_1 g^{y_1} + \cdots + n_k g^{y_k}$$

совпадают с решениями уравнения

$$\hat{m}_1 g^{x_1 + l_1} + \cdots + \hat{m}_k g^{x_k + l_k} = \hat{n}_1 g^{y_1 + \gamma_1} + \cdots + \hat{n}_k g^{y_k + \gamma_k}, \tag{4}$$

где $\hat{m}_i = \frac{m_i}{g^{l_i}}$ и $\hat{n}_i = \frac{n_i}{g^{\gamma_i}}$ — компоненты редуцированной системы $\hat{m}_1, \ldots, \hat{m}_k, \hat{n}_1, \ldots, \hat{n}_k$ для $m_1, \ldots, m_k, n_1, \ldots, n_k$ относительно g.

I. Пусть $\hat{m}_1, \ldots, \hat{m}_k$ и $\hat{n}_1, \ldots, \hat{n}_k$ имеют одинаковые составы. Тогда уравнение (4) можно переписать в виде:

$$\hat{m}_1 g^{x_1 + l_1} + \cdots + \hat{m}_k g^{x_k + l_k} = \hat{m}_1 g^{y_1 + \gamma_1} + \cdots + \hat{m}_k g^{y_k + \gamma_k}$$

или в виде:

$$\hat{m}^{(1)} \left(g^{x_1^{(1)} + l_1^{(1)}} + \cdots + g^{x_{i_1}^{(1)} + l_{i_1}^{(1)}}\right) + \cdots + \hat{m}^{(s)} \left(g^{x_1^{(s)} + l_1^{(s)}} + \cdots + g^{x_{i_s}^{(s)} + l_{i_s}^{(s)}}\right) =$$
$$= \hat{m}^{(1)} \left(g^{y_1^{(1)} + \gamma_1^{(1)}} + \cdots + g^{y_{i_1}^{(1)} + \gamma_{i_1}^{(1)}}\right) + \cdots + \hat{m}^{(s)} \left(g^{y_1^{(s)} + \gamma_1^{(s)}} + \cdots + g^{y_{i_s}^{(s)} + \gamma_{i_s}^{(s)}}\right). \tag{5}$$

Запишем каждое $\hat{m}^{(i)}$ в g-ичной системе счисления:

$$\hat{m}^{(i)} = \alpha_{\lambda_i}^{(i)} g^{\lambda_i} + \alpha_{\lambda_i - 1}^{(i)} g^{\lambda_i - 1} + \cdots + \alpha_0^{(i)} \tag{6}$$

$(\alpha_t^{(r)} < g)$ и, подставив (6) в (5), получим:

$$\alpha_{\lambda_1}^{(1)} \left(g^{x_1^{(1)} + l_1^{(1)} + \lambda_1} + \cdots + g^{x_{i_1}^{(1)} + l_{i_1}^{(1)} + \lambda_1}\right) + \alpha_{\lambda_1 - 1}^{(1)} \left(g^{x_1^{(1)} + l_1^{(1)} + \lambda_1 - 1} + \right.$$
$$\left. + \cdots + g^{x_{i_1}^{(1)} + l_{i_1}^{(1)} + \lambda_i - 1}\right) + \cdots + \alpha_0^{(s)} \left(g^{x_1^{(s)} + l_1^{(s)}} + \cdots + g^{x_{i_s}^{(s)} + l_{i_s}^{(s)}}\right) =$$
$$= \alpha_{\lambda_1}^{(1)} \left(g^{y_1^{(1)} + \gamma_1^{(1)} + \lambda_1} + \cdots + g^{y_{i_1}^{(1)} + \gamma_{i_1}^{(1)} + \lambda_1}\right) + \alpha_{\lambda_1 - 1}^{(1)} \left(g^{y_1^{(1)} + \gamma_1^{(1)} + \lambda_1 - 1} + \right.$$
$$\left. + \cdots + g^{y_{i_1}^{(1)} + \gamma_1^{(1)} + \lambda_1 - 1}\right) + \cdots + \alpha_0^{(s)} \left(g^{y_1^{(s)} + \gamma_1^{(s)}} + \cdots + g^{y_{i_s}^{(s)} + \gamma_{i_s}^{(s)}}\right). \tag{7}$$

В уравнении (7) произведем замену переменных, полагая

$$x_{j_\mu}^{(a)} + l_{j_\mu}^{(a)} = {}'x_{j_\mu}^{(a)}, \quad y_{j_\mu}^{(a)} + \gamma_{j_\mu}^{(a)} = {}'y_{j_\mu}^{(a)}.$$

Тогда уравнение (7) запишется в следующем виде:

$$\alpha_{\lambda_1}^{(1)}\left(g^{'x_1^{(1)}+\lambda_1} + \cdots + g^{'x_{i_1}^{(1)}+\lambda_1}\right) + \cdots + \alpha_0^{(s)}\left(g^{'x_1^{(s)}} + \cdots + g^{'x_{i_s}^{(s)}}\right) =$$
$$= \alpha_{\lambda_1}^{(1)}\left(g^{'y_1^{(1)}+\lambda_1} + \cdots + g^{'y_{i_1}^{(1)}+\lambda_1}\right) + \cdots + \alpha_0^{(s)}\left(g^{'y_1^{(s)}} + \cdots + g^{'y_{i_s}^{(s)}}\right). \quad (7')$$

Количество решений уравнения (7) в числах $0 \leqslant x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots$ $\ldots, y_k \leqslant p-1$ совпадает с количеством решений уравнения (7′) в числах

$$l_{j_\mu}^{(a)} \leqslant {}'x_{j_\mu}^{(a)} \leqslant p + l_{j_\mu}^{(a)} - 1, \quad \gamma_{j_\mu}^{(a)} \leqslant y_{j_\mu}^{(a)} \leqslant p + \gamma_{j_\mu}^{(a)} - 1.$$

Систему ${}'y_1^{(1)}, \ldots, {}'y_{i_1}^{(1)}, \ldots, {}'y_1^{(s)}, \ldots, {}'y_{i_s}^{(s)}$ назовем основной, если равенство

$${}'y_{j_a}^{(a)} + t_a = {}'y_{j_b}^{(b)} + t_b,$$

где

$$1 \leqslant a, \quad b \leqslant s, \quad j_a = 1, 2, \ldots, i_a, \quad j_b = 1, 2, \ldots, i_b,$$

$$t_a = 0, 1, 2, \ldots, \lambda_a, \quad t_b = 0, 1, 2, \ldots, \lambda_b,$$

выполняется в том и только том случае, когда

$$(j_a - j_b)^2 + (a-b)^2 + (t_a - t_b)^2 = 0.$$

В противном случае систему ${}'y_1^{(1)}, \ldots, {}'y_{i_1}^{(1)}, \ldots, {}'y_1^{(s)}, \ldots, {}'y_{i_s}^{(1)}$ назовем вспомогательной.

Нам потребуется следующее замечание.

Замечание. Пусть $\mathscr{M}$ — натуральное. Число решений уравнения

$$\mathscr{M} = \beta_1 g^{x_1} + \cdots + \beta_k g^{x_k} \quad (9)$$

($\beta_1, \ldots, \beta_k$ и $g \geqslant 2$ — фиксированные натуральные) в неотрицательных и целых $x_1, \ldots, x_k$ оценивается как $O(1)$ (в константу «O» могут входить величины, зависящие от k и $\beta_1, \ldots, \beta_k$, но не от $\mathscr{M}$).

В самом деле, для некоторого решения $x_1, \ldots, x_k$ будем считать $x_i \geqslant x_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Покажем, что x_1 может принимать значения лишь из последовательности

$$x_l - \beta k, \quad x_l - \beta k + 1, \ldots, x_l + 1,$$

где $\beta = \max(\beta_1, \ldots, \beta_k)$, а x_l выбрано, так что

$$g^{x_l} < \mathscr{M} \leqslant g^{x_l+1}.$$

Ясно, что $x_1 \leqslant x_l + 1$. Пусть $x_1 < x_l - \beta k$ (если $x_l < \beta k$, то очевидно, что всевозможных решений будет лишь $O(1)$). Тогда

$$\mathscr{M} = \beta_1 g^{x_1} + \cdots + \beta_k g^{x_k} \leqslant \beta k g^{x_1} < \beta k g^{x_l - \beta k} < \mathscr{M},$$

чего быть не может. Рассматривая теперь

$$\mathscr{M} - \beta_1 g^{x_1} = \beta_2 g^{x_2} + \cdots + \beta_k g^{x_k},$$

мы проводим то же самое рассуждение для x_2 и т. д. Таким образом, уравнение (9) имеет действительно $O(1)$ решений.

При фиксированных m_i можно записать лишь конечное число уравнений (8). Каждое уравнение имеет не более $O(p^{k-1})$ решений в числах

$$\gamma^{(a)}_{j_a} \leqslant {}'y^{(a)}_{j_a} \leqslant p + \gamma^{(a)}_{j_a} - 1 .$$

По предыдущему замечанию, для каждой системы $'y^{(1)}_1, \ldots, {}'y^{(1)}_{i_1}, \ldots$ $\ldots, {}'y^{(s)}_1, \ldots, {}'y^{(s)}_{i_s}$ найдется лишь $O(1)$ систем $'x^{(1)}_1, \ldots, {}'x^{(1)}_{i_1}, \ldots, {}'x^{(s)}_1, \ldots$ $\ldots, {}'x^{(s)}_{i_s}$ таких, что система $'x^{(1)}_1, \ldots, {}'x^{(s)}_{i_s}, {}'y^{(1)}_1, \ldots, {}'y^{(s)}_{i_s}$ решает уравнение (7′). Следовательно, число решений уравнения (7′), для которых система $'y^{(1)}_1, \ldots, {}'y^{(s)}_{i_s}$ является вспомогательной, будет не более чем $O(p^{k-1})$.

Пусть теперь система $'y^{(1)}_1, \ldots, {}'y^{(1)}_{i_1}, \ldots, {}'y^{(s)}_i, \ldots, {}'y^{(s)}_{i_s}$ основная. В этом случае $'y^{(1)}_1$ пробегает p произвольных значений из своего промежутка, $'y^{(1)}_2$ пробегает $p - C_1$ произвольных значений из своего промежутка, $'y^{(s)}_{i_s}$ пробегает $p - C_{k+1}$ произвольных значений из своего промежутка. Значит, всего таких систем будет $p^k - O(p^{k-1})$. Из них в интервал N

$$\sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant s \\ j_a = 1, 2, \ldots, i_a}} \gamma^{(a)}_{j_a} + l^{(a)}_{j_a} \leqslant {}'y^{(1)}_1, \ldots, {}'y^{(1)}_{i_1}, \ldots, {}'y^{(s)}_1, \ldots, {}'y^{(s)}_{i_s} \leqslant$$

$$\leqslant p - \sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant s \\ j_a = 1, 2, \ldots, a}} \gamma^{(a)}_{j_a} + l^{(a)}_{j_a} - 1$$

попадет $p^k + O(p^{k-1})$, так как число систем, у которых хотя бы одно $\gamma^{(a)}_{j_\mu} \leqslant {}'y^{(a)}_{j_\mu} \leqslant p + \gamma^{(a)}_{j_\mu} - 1$ не попадет в интервал N, будет лишь $O(p^{k-1})$. Следовательно, и решений, у которых система $'y^{(1)}_1, \ldots, {}'y^{(1)}_{i_1}, \ldots, {}'y^{(s)}_1, \ldots$ $\ldots, {}'y^{(s)}_{i_s}$ основная и хотя бы одна компонента $'y^{(a)}_{j_\mu}$ не попадает в интервал N, будет $O(p^{k-1})$.

В силу единственности представления числа $\mathcal{M}$ в виде

$$\sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant s \\ j_a = 1, 2, \ldots, i_a \\ t_a = 0, 1, \ldots, \lambda_a}} x^{(a)}_{t_a} g^{y^{(a)}_{j_a} + t_a} \quad (x^{(a)}_{t_a} < g).$$

в левой части уравнения (7′) при соответствующих коэффициентах должны стоять степени g, показатели которых совпадают с соответствующими показателями в правой части. Значит и все компоненты $'x^{(1)}_1, \ldots, {}'x^{(1)}_{i_1}, \ldots$ $\ldots, {}'x^{(s)}_1, \ldots, {}'x^{(s)}_{i_s}$ лежат в интервале N. Из вида уравнения (7′) вытекает, что в системе показателей $'x^{(a)}_1, \ldots, {}'x^{(a)}_{i_a}$ каждой скобки можно делать всевозможные перестановки, не нарушая равенства. Следовательно, уравнение (1) решает $i_1! \ldots i_s!\, p^k + O(p^{k-1})$ систем $0 \leqslant x_1, \ldots, x_k$,

$y_1, \ldots, y_k \leqslant p-1$, у которых система $'y_1^{(1)}, \ldots, 'y_{i_1}^{(1)}, \ldots, 'y_1^{(s)}, \ldots, 'y_{i_s}^{(s)}$ — основная. Таким образом, в случае I

$$A_k(p) = i_1! \ldots i_s!\, p^k + O(p^{k-1}).$$

II. Пусть составы $\hat{m}_1, \ldots, \hat{m}_k$ и $\hat{n}_1, \ldots, \hat{n}_k$ неодинаковы; тогда, как и в случае I, перейдем к уравнению типа (7′). В этом втором случае оно будет иметь вид:

$$\alpha_{\lambda_1}^{(1)} \left(g^{'x_1^{(1)}+\lambda_1} + \cdots + g^{'x_{i_1}^{(1)}+\lambda_1}\right) + \cdots + \alpha_0^{(s)} \left(g^{'x_1^{(s)}} + \cdots + g^{'x_{i_s}^{(s)}}\right) =$$
$$= \beta_{t_1}^{(1)} \left(g^{'y_1^{(1)}+t_1} + \cdots + g^{'y_{j_1}^{(1)}+t_1}\right) + \cdots + \beta_0^{(2)} \left(g^{'y_1^{(r)}} + \cdots + g^{'y_{j_r}^{(r)}}\right). \qquad (7'')$$

Если система $'y_1^{(1)}, \ldots, 'y_{j_1}^{(1)}, \ldots, 'y_1^{(r)}, \ldots, 'y_{j_r}^{(r)}$ — вспомогательная, то, как и в случае I, уравнение (7″) будет иметь не более $O(p^{k-1})$ решений.

Пусть система $'y_1^{(1)}, \ldots, 'y_{j_1}^{(1)}, \ldots, 'y_1^{(r)}, \ldots, 'y_{j_r}^{(r)}$ — основная. В силу единственности представления числа $\mathscr{M}$ в виде

$$\sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant r \\ i_a = 1, 2, \ldots, j_a \\ \vartheta_a = 0, 1, \ldots, t_a}} \beta_{\vartheta_a}^{(a)} g^{y_{i_a}^{(a)}+t_a} \quad (\beta_{\vartheta_a}^{(a)} < g),$$

не найдется системы $'x_1^{(1)}, \ldots, 'x_{i_1}^{(1)}, \ldots, 'x_1^{(s)}, \ldots, 'x_{i_s}^{(s)}$ такой, чтобы система $'x_1^{(1)}, \ldots, 'x_{i_s}^{(s)}, 'y_1^{(1)}, \ldots, 'y_{j_r}^{(r)}$ решила бы уравнение (7″). Следовательно, в случае II

$$A_k(p) = O(p^{k-1}).$$

Теорема доказана полностью.

Далее мы дадим одно приложение этой теоремы.

§ 2. Пусть $f(t)$ — вещественная периодическая с периодом 1 функция такая, что

$$\int_0^1 f(t)\, dt = 0.$$

Ряд Фурье этой функции имеет вид:

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' a_n e^{2\pi i n t}$$

(штрих указывает на отсутствие в сумме члена с $n=0$), $a_n = \bar{a}_{-n}$. Наложим дополнительное ограничение

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{|n|^\beta},$$

где M — константа, $\beta > \frac{1}{2}$.

ЛЕММА (Кац). *При наложенных условиях существует предел*

$$\lim_{p \to \infty} \frac{1}{p} \int_0^1 \left(\sum_{x=0}^{p-1} f(g^x \alpha) \right)^2 d\alpha.$$

Доказательство. Положим

$$\|f\|^2 = \int_0^1 f^2(t)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' |a_n|^2$$

и для любого натурального k введем обозначение

$$\rho(k) = \int_0^1 f(t)\, f(g^k t)\,dt.$$

Заметим, что

$$\int_0^1 f(g^j t)\, f(g^k t) = \rho(|k-j|).$$

В самом деле, пусть $k \geqslant j$; тогда, полагая $g^j t = z$, получим:

$$\frac{1}{g^j}\int_0^{g^j} f(z)\, f(g^{k-j} z)\,dz = \int_0^1 f(z)\, f(g^{k-j} z)\,dz = \rho(|k-j|).$$

Докажем следующую оценку:

$$|\rho(k)| < \frac{MC(\beta)}{g^{k\beta}}\|f\|,$$

где $C(\beta)$ — константа, зависящая от β. Имеем:

$$f(g^k t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' a_n e^{2\pi i n g^k t}.$$

По тождеству Парсеваля,

$$\int_0^1 f(t)\, f(g^k t)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' a_n \bar{a}_{ng^k}.$$

Отсюда

$$\left|\int_0^1 f(t)\, f(g^k t)\,dt\right| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' |a_n|\,|a_{ng^k}| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' |a_n|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' |a_{ng^k}|^2} \leqslant \|f\| \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\mu^2}{(|n|\,g^k)^{2\beta}}} = \frac{MC(\beta)}{g^{k\beta}}\|f\|.$$

Из доказанного следует, что ряды $\sum_{k=1}^{\infty}\rho(k)$ и $\sum_{k=1}^{\infty}k\rho(k)$ являются рядами сходящимися.

Рассмотрим выражение:

$$\frac{1}{p}\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{p-1} f(g^k t)\right)^2 dt = \frac{1}{p}\sum_{k_1=0}^{p-1}\sum_{k_2=0}^{p-1}\int_0^1 f(g^{k_1} t)\, f(g^{k_2} t)\,dt =$$

$$= \|f\|^2 + 2\,\frac{p-1}{p}\,\rho(1) + 2\,\frac{p-2}{p}\,\rho(2) + \cdots + 2\,\frac{\rho(p-1)}{p} =$$

$$= \|f\|^2 + 2\sum_{k=1}^{p-1}\rho(k) - \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p-1}k\rho(k).$$

Ряды $\sum_{k=1}^{\infty} \rho(k)$, $\sum_{k=1}^{\infty} k\rho(k)$ сходятся; значит, когда $p \to \infty$

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{p-1} f(g^k t)\Big)^2 dt = \|f\| + 2\sum_{k=1}^{\infty} \rho(k),$$

что и требовалось доказать.

В дальнейшем мы будем пользоваться обозначением:

$$\sigma^2 = \|f\|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \rho(k).$$

Замечание. Имеет место следующее неравенство:

$$\frac{1}{p}\int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{p-1} f(g^k t)\Big)^2 dt < \|f\|^2 + MA(\beta)\|f\|, \tag{10}$$

где $A(\beta)$ зависит только от β. В самом деле,

$$\frac{1}{p}\int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{p-1} f(g^k t)\Big)^2 dt = \|f\|^2 + 2\sum_{k=1}^{p-1} \rho(k) - \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p-1} k\rho(k) \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|^2 + 2\sum_{k=1}^{p-1} |\rho(k)| + 2\sum_{k=1}^{p-1} k|\rho(k)| = \|f\| + 2\sum_{k=1}^{p-1} (k+1)|\rho(k)|.$$

Подставляя оценку $|\rho(k)|$, получим неравенство (10).

Докажем теорему, обобщающую один результат Каца (²). Мы будем доказывать эту теорему методом, отличным от метода Каца, не применяя цепей Маркова — Брунса.

ТЕОРЕМА. *При наложенных на функцию $f(t)$ ограничениях и дополнительном условии $\sigma \neq 0$ имеем: при любом фиксированном вещественном λ*

$$\lim_{p\to\infty} \operatorname*{mes}_{0\leqslant\alpha\leqslant1} E\Big\{\sum_{x=0}^{p-1} f(g^x\alpha) < \lambda\sqrt{p}\Big\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\frac{z^2}{\alpha\sigma^2}} dz \ *.$$

Предварительно установим следующую лемму.

ЛЕММА. *Утверждение теоремы справедливо для тригонометрических многочленов $\vartheta(t)$.*

Пусть

$$\vartheta(t) = \sum_{n=-s}^{s}{}' a_n e^{2\pi i t n}, \quad a_n = \bar{a}_{-n}.$$

---

* Ограничение $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$ легко снять. Обозначим $\int_0^1 f(t)\,dt = C$. Тогда $f(t) - C$ удовлетворяет условиям Каца. Итак, если обозначить

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\int_0^1 \Big(\sum_{x=0}^{p-1} f(g^x\alpha) - pC\Big)^2 = \sigma^2$$

и предположить, что $\sigma \neq 0$, то при любом фиксированном вещественном λ

$$\lim_{p\to\infty} \operatorname*{mes}_{0\leqslant\alpha\leqslant1} E\Big\{\sum_{x=0}^{p-1} f(g^x\alpha) - Cp < \lambda\sqrt{p}\Big\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz.$$

Условимся считать, что если $|n| > s$, то $a_n = 0$. Подсчитаем величину

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \int_0^1 \left(\sum_{x=0}^{p-1} \vartheta(g^x\alpha) \right)^2 d\alpha = \rho(0) + 2\sum_{k=1}^{\infty} \rho(k).$$

Введем обозначение: для натуральных m_1 и m_2 будем писать $m_1 \sim m_2$, если существуют натуральные l_1 и l_2 такие, что $m_1 g^{l_1} = m_2 g^{l_2}$. Так как

$$\rho(k) = \sum_{n=-s}^{s}{}' a_n a_{ng^k},$$

то, используя введенное обозначение, получаем:

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \int_0^1 \left(\sum_{x=0}^{p-1} \vartheta(g^x\alpha) \right)^2 d\alpha = \sum_{m_1=-s}^{s}{}' \sum_{\substack{m_2=-s \\ m_1 \sim m_2}}^{s}{}' a_{m_1} a_{m_2}.$$

Рассмотрим

$$I_1 = \int_0^1 \left(\sum_{x=0}^{p-1} \vartheta(g^x\alpha) \right)^l d\alpha,$$

где l — фиксированное целое > 0, $p \to \infty$:

$$I_1 = \int_0^1 \left(\sum_{m=-s}^{s}{}' \sum_{x=0}^{p-1} a_m e^{2\pi i \alpha g^x m} \right)^l d\alpha =$$

$$= \sum_{\substack{m_1, \ldots, m_l \\ -s \leqslant m_i \leqslant s \\ m_i \neq 0}} a_{m_1} \ldots a_{m_l} \sum_{x_1, \ldots, x_l = 0}^{p-1} \int_0^1 e^{2\pi i \alpha (m_1 g^{x_1} + \ldots + m_l g^{x_l})} d\alpha.$$

Если для некоторой системы $x_1', \ldots, x_l'$

$$m_1 g^{x_1'} + \cdots + m_l g^{x_l'} \neq 0,$$

то

$$\int_0^1 e^{2\pi i \alpha (m_1 g^{x_1'} + \ldots + m_l g^{x_l'})} d\alpha = 0.$$

Если же

$$m_1 g^{x_1} + \cdots + m_l g^{x_l} = 0,$$

то

$$\int_0^1 e^{2\pi i \alpha (m_1 g^{x_1'} + \ldots + m_l g^{x_l'})} d\alpha = 1,$$

т. е.

$$I_1 = \sum_{\substack{m_1, \ldots, m_l \\ -s \leqslant m_i \leqslant s \\ m_i \neq 0}} a_{m_1} \ldots a_{m_l} \sum_{\substack{x_1, \ldots, x_l = 0 \\ m_1 g^{x_1} + \ldots + m_l g^{x_l} = 0}}^{p-1} 1.$$

Рассмотрим два случая: когда l — нечетное и когда l — четное.

1) Пусть l — нечетное. В этом случае число решений уравнения

$$m_1 g^{x_1} + \cdots + m_l g^{x_l} = 0 \tag{11}$$

в числах $0 \leqslant x_1, \ldots, x_k \leqslant p-1$ имеет $O\left(p^{\frac{l-1}{2}}\right)$ решений. Значит, тогда

$$I_1 = O\left(p^{\frac{l-1}{2}}\right)$$

(константа O зависит от вида тригонометрического многочлена).

2) l — четное, $l = 2k$. Здесь снова могут представиться два случая:

а) количество положительных m_i не равно количеству отрицательных. Тогда число решений уравнения (11) не превосходит $O(p^{k-1})$.

б) Количество положительных и количество отрицательных m_i совпадают. Тогда число всевозможных расположений положительных и отрицательных m_i в системе $m_1, \ldots, m_l$ будет C_l^k. Положительные m_i будем обозначать через $m_1, \ldots, m_k$, отрицательные — через $-n_1, \ldots, -n_k$. Имеем:

$$I_1 = C_l^k \sum_{\substack{m_1, \ldots, m_k, n_1, \ldots, n_k \\ 1 \leqslant m_1, \ldots, m_k \leqslant s \\ 1 \leqslant n_1, \ldots, n_k \leqslant s}} a_{m_1} \ldots a_{m_k} \bar{a}_{n_1} \ldots \bar{a}_{n_k} \times$$

$$\times \sum_{\substack{x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k = 0 \\ m_1 g^{x_1} + \ldots + m_k g^{x_k} = n_1 g^{y_1} + \ldots + n_k g^{y_k}}}^{p-1} 1 + O(p^{k-1}).$$

Оставим в сумме только такие системы $m_1, \ldots, m_k$, $n_1, \ldots, n_k$, чтобы редуцированные составы для $m_1, \ldots, m_k$ и $n_1, \ldots, n_k$ совпадали. Такую сумму будем обозначать через $\sum^*$; все остальные дадут нам, как мы видели, $O(p^{k-1})$. Итак,

$$I_1 = C_l^k \sum_{\substack{m_1, \ldots, m_k, n_1, \ldots, n_k \\ 1 \leqslant mi \leqslant s \\ 1 \leqslant ni \leqslant s}}^{*} a_{m_1} \ldots a_{m_k} \bar{a}_{n_1} \ldots \bar{a}_{n_k} \sum_{\substack{x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k = 0 \\ m_1 g^{x_1} + \ldots + m_k g^{x_k} - n_1 g^{y_1} + \ldots + n_k g^{y_k}}}^{p-1} 1 + $$

$$+ O(p^{k-1}).$$

Разобьем редуцированные $\hat{m}_1, \ldots, \hat{m}_k$ на классы равных. Пусть $\hat{m}^{(1)}$ занимает i_1 мест, $\hat{m}^{(2)}$ занимает i_2 мест, и т. д.; $\hat{m}^{(\rho)}$ занимает i_ρ мест ($\hat{m}^{(i)} \neq \hat{m}^{(j)}$, если $i \neq j$, $i_1 + \cdots + i_\rho = k$). По теореме о диофантовом уравнении имеем:

$$I_1 = C_l^k p^k \sum_{1 \leqslant m_1, \ldots, m_k, n_1, \ldots, n_k \leqslant s}^{*} a_{m_1} \ldots a_{m_k} \bar{a}_{n_1} \ldots \bar{a}_{n_k} i_1! \ldots i_\rho! + O(p^{k-1}) =$$

$$= C_l^k p^k \sum_{1 \leqslant m_1, \ldots, m_k \leqslant s} a_{m_1} \ldots a_{m_s} \sum\nolimits^{*} \bar{a}_{n_1} \ldots \bar{a}_{n_k} i_1! \ldots i_\rho! + O(p^{k-1}).$$

Обозначим $n_1 = \hat{n}_1 g^{\tau_1}, \ldots, n_k = \hat{n}_k g^{\tau_k}$. Тогда

$$I_1 = C_l^k p^k \sum_{1 \leqslant m_1, \ldots, m_k} a_{m_1} \ldots a_{m_k} \sum\nolimits_{*} \sum_{0 \leqslant \tau_1, \ldots, \tau_k < \infty} \bar{a}_{g^{\tau_1} \hat{n}_1} \ldots \bar{a}_{g^{\tau_k} \hat{n}_k} i_1! \ldots i_\rho! + O(p^{k-1})$$

(здесь через $\sum_*$ обозначено суммирование по всевозможным величинам $\hat{n}_1, \ldots, \hat{n}_k$, для которых состав тот же самый, что и для системы $\hat{m}_1, \ldots, \hat{m}_k$),

$$I_1 = C_l^k p^k \sum_{1 \leqslant m_1, \ldots, m_k \leqslant s} a_{m_1} \ldots a_{m_k} \sum_{0 \leqslant \tau_1, \ldots, \tau_k < \infty} i_1! \ldots i_\rho! \cdot$$
$$\cdot \sum_* \bar{a}_{g^{\tau_1}\hat{n}_1} \ldots \bar{a}_{g^{\tau_k}\hat{n}_k} + O(p^{k-1}).$$

Всевозможных способов расположения $\hat{n}_1, \ldots, \hat{n}_k$ на k местах, для которых состав один и тот же (и совпадает с составом системы $\hat{m}_1, \ldots, \hat{m}_k$), будет $\frac{k!}{i_1! \ldots i_\rho!}$. Поэтому

$$\sum_* \bar{a}_{g^{\tau_1}\hat{n}_1} \ldots a_{g^{\tau_k}\hat{n}_k} = \frac{k!}{i_1! \ldots i_\rho!} a_{g^{\tau_1}\hat{m}_1} \ldots a_{g^{\tau_k}\hat{m}_k},$$

$$I_1 = C_l^k p^k k! \sum_{1 \leqslant m_1, \ldots, m_k \leqslant s} a_{m_1} \ldots a_{m_k} \sum_{0 \leqslant \tau_1, \ldots, \tau_k < \infty} \bar{a}_{g^{\tau_1}\hat{m}_1} \ldots \bar{a}_{g^{\tau_k}\hat{m}_k} + O(p^{k-1}) =$$
$$= C_l^k p^k k! \left(\sum_{m=1}^{s} \sum_{n=1}^{s} a_m a_n \right)^k + O(p^{k-1}) = C_l^k p^k k! \left(\frac{1}{2} \sigma^2 \right)^k + O(p^{k-1}) =$$
$$= C_l^{\frac{l}{2}} p^{\frac{l}{2}} \left(\frac{l}{2} \right)! \frac{1}{2^{\frac{l}{2}}} \sigma^l + O\left(p^{\frac{l}{2}-1}\right).$$

Следовательно,

$$\lim_{p \to \infty} \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{x=0}^{p-1} \vartheta(\alpha g^x) \right)^l d\alpha = \begin{cases} 0, & \text{если } l \text{ нечетное}, \\ C_l^{\frac{l}{2}} \left(\frac{l}{2} \right)! \frac{\sigma^l}{2^{\frac{l}{2}}} = \frac{\sigma^l \, l!}{2^{\frac{l}{2}} \left(\frac{l}{2} \right)!}, & \text{если } l \text{ четное}. \end{cases}$$

Рассмотрим

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} z^l e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz.$$

Полагая $\frac{z}{\sqrt{2}\sigma} = t$, получим:

$$I_2 = \frac{\sigma^l 2^{\frac{l}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^l e^{-t^2} dt = \begin{cases} 0, & \text{если } l \text{ нечетное}, \\ \sigma^l \frac{l!}{2^{\frac{l}{2}} \left(\frac{l}{2} \right)!}, & \text{если } l \text{ четное}. \end{cases}$$

Отсюда следует:

$$\lim_{p \to \infty} \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{x=0}^{p-1} \vartheta(\alpha g^x) \right)^l d\alpha = \frac{\sigma^l 2^{\frac{l}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^l l^{-t^2} dt,$$

или

$$\lim_{p \to \infty} \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{2p}\,\sigma} \sum_{x=0}^{p-1} \vartheta(\alpha g^x) \right)^l d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^l e^{-t^2} dt.$$

Обозначим

$$\operatorname*{mes}_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} E \left\{ \frac{1}{\sqrt{2p}\,\sigma} \sum_{x=0}^{p-1} \vartheta(\alpha g^x) < \lambda \right\} = \Phi_p(\lambda).$$

Имеем:

$$J=\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{2p\sigma}}\sum_{x=0}^{p-1}\vartheta(\alpha g^x)\right)^l d\alpha=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} y\, d\operatorname*{mes}_{0\leqslant\alpha\leqslant1} F\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2p\sigma}}\sum_{x=0}^{p-1}\vartheta(\alpha g^x)\right)^l<y\right\},$$

или, полагая $y=\lambda^l$,

$$J=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^l\, d\operatorname*{mes}_{0\leqslant\alpha\leqslant1} E\left\{\frac{1}{\sqrt{2p\sigma}}\sum_{x=0}^{p-1}\vartheta(\alpha g^x)<\lambda^l\right\}.$$

1. Пусть l — нечетное; тогда

$$J=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^l\, d\Phi_p(\lambda).$$

2. Пусть l — четное. Тогда выражение

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2p\sigma}}\sum_{x=0}^{p-1}\vartheta(\alpha g^x)\right)^l<\lambda^l$$

означает, что

$$-\lambda<\frac{1}{\sqrt{2p\sigma}}\sum_{x=0}^{p-1}\vartheta(\alpha g^x)<\lambda$$

и, следовательно,

$$J=\int_0^{\infty}\lambda^l\, d(\Phi_p(\lambda)-\Phi_p(-\lambda))=\int_0^{\infty}\lambda^l\, d\Phi_p(\lambda)-\int_0^{\infty}\lambda^l\, d\Phi_p(-\lambda).$$

Производя во втором интеграле замену $\lambda'=-\lambda$, получаем:

$$J=\int_0^{\infty}\lambda^l\, d\Phi_p(\lambda)+\int_{-\infty}^{0}\lambda'^l\, d\Phi_p(\lambda')=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^l\, d\Phi_p(\lambda).$$

$\Phi_p(\lambda)$ является функцией распределения:

$$\lim_{p\to\infty}J=\begin{cases}0, & \text{если } l \text{ — нечетное,}\\ \dfrac{l!}{2^l\left(\dfrac{l}{2}\right)!}, & \text{если } l \text{ — четное;}\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}t^le^{-t^2}\,dt=\begin{cases}0, & \text{если } l \text{ — нечетное,}\\ \dfrac{l!\sqrt{\pi}}{2^l\left(\dfrac{l}{2}\right)!}, & \text{если } l \text{ — четное.}\end{cases}$$

По второй предельной теореме А. Маркова [см. ([3]), стр. 552],

$$\lim\Phi_p(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\lambda}e^{-t^2}\,dt.$$

Полагая $t = \frac{z}{\sqrt{2}\sigma}$, получим:

$$\lim_{p\to\infty} \operatorname*{mes}_{0\leqslant\alpha\leqslant1} E\left\{\frac{1}{\sqrt{2p}\,\sigma}\sum_{x=0}^{p-1}\vartheta(\alpha g^x)<\lambda\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{\infty}^{\lambda\sqrt{2}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\,dz.$$

Производя замену $\lambda' = \sigma\sqrt{2}\,\lambda$, окончательно находим:

$$\lim_{p\to\infty} \operatorname*{mes}_{0\leqslant\alpha\leqslant1} E\left\{\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{x=0}^{p-1}\vartheta(\alpha g^x)<\lambda\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\,dz.$$

Лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы для общего случая. Через $A(\beta)$ будем обозначать ту же константу, что и в неравенстве (10). Возьмем сколь угодно малое $\varepsilon>0$ и определим δ из уравнения

$$\varepsilon = \delta^2 + MA(\beta)\,\delta.$$

Поскольку функция $f(t)\in L_2$, то мы можем взять такую частную сумму ряда Фурье $\vartheta(t)$, что

$$\|f-\vartheta\|<\delta.$$

Функция $f(t)-\vartheta(t)$ удовлетворяет тем же свойствам, что и $f(t)$. В силу замечания,

$$\int_0^1\left(\frac{\sum_{x=0}^{p-1} f(g^x\alpha)-\sum_{x=0}^{p-1}\vartheta(g^x\alpha)}{\sqrt{p}}\right)^2 d\alpha \leqslant \sigma^2 + MA(\beta)\,\delta = \varepsilon.$$

Обозначим величину σ, построенную для тригонометрического многочлена $\vartheta(t)$, через σ_1. По неравенству Минковского,

$$\sqrt{\int_0^1\left(\frac{\sum_{x=0}^{p-1} f(g^x\alpha)}{\sqrt{p}}\right)^2 d\alpha} \leqslant \sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\int_0^1\left(\frac{\sum_{x=0}^{p-1}\vartheta(g^x\alpha)}{\sqrt{p}}\right)^2 d\alpha};$$

устремляя $p\to\infty$, получаем:

$$\sigma\leqslant\sqrt{\varepsilon}+\sigma_1.$$

Аналогично находим:

$$\sigma_1\leqslant\sqrt{\varepsilon}+\sigma,$$

т. е.

$$|\sigma-\sigma_1|\leqslant\sqrt{\varepsilon}.$$

Пусть λ_1 и λ_2 — фиксированные вещественные числа, $\lambda_1<\lambda_2$. Обозначим через E_p множество чисел α, $0\leqslant\alpha\leqslant1$, из отрезка $[0, 1]$, для которых

$$\lambda_1\leqslant\frac{\sum_{x=0}^{p-1} f(g^x\alpha)}{\sqrt{p}}\leqslant\lambda_2. \tag{12}$$

Через F_p обозначим множество тех α из отрезка $[0,1]$, для которых

$$\left|\frac{\sum_{x=0}^{p-1} f(g^x\alpha)}{\sqrt{p}}-\frac{\sum_{x=0}^{p-1}\vartheta(g^x\alpha)}{\sqrt{p}}\right|\leqslant\sqrt[4]{\varepsilon}. \tag{13}$$

Поскольку

$$\int\limits_{[0,1]-F_p}\left(\frac{\sum\limits_{x=0}^{p-1} f(g^x\alpha)}{\sqrt{p}}-\frac{\sum\limits_{x=0}^{p-1}\vartheta(g^x\alpha)}{\sqrt{p}}\right)^2 d\alpha\leqslant\varepsilon,$$

то

$$\operatorname{mes} F_p\geqslant 1-\sqrt{\varepsilon}.$$

Отсюда следует:

$$\operatorname{mes} E_p\leqslant\operatorname{mes} E_pF_p+\sqrt{\varepsilon}.$$

Но на F_pE_p выполняются неравенства (12) и (13), значит, на F_pE_p

$$\lambda-\sqrt[4]{\varepsilon}\leqslant\frac{\sum\limits_{x=0}^{p-1}\vartheta(g^x\alpha)}{\sqrt{p}}\leqslant\lambda_2+\sqrt[4]{\varepsilon}.$$

Отсюда имеем:

$$\operatorname{mes} E_p\leqslant\underset{0\leqslant\alpha\leqslant1}{\operatorname{mes}} E\left\{\lambda_1-\sqrt[4]{\varepsilon}\leqslant\frac{\sum\limits_{x=0}^{p-1}\vartheta(g^x\alpha)}{\sqrt{p}}\leqslant\lambda_2+\sqrt[4]{\varepsilon}\right\}+\sqrt{\varepsilon},$$

и, применяя предыдущую лемму, получаем:

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\operatorname{mes} E_p\leqslant\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\lambda_1-\sqrt[4]{\varepsilon}}^{\lambda_2+\sqrt[4]{\varepsilon}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}}\,du+\sqrt{\varepsilon}.$$

Обозначим через G_p множество тех чисел α из отрезка [0,1], для которых

$$\lambda_1+\sqrt[4]{\varepsilon}\leqslant\frac{\sum\limits_{x=0}^{p-1}\vartheta(g^x\alpha)}{\sqrt{p}}\leqslant\lambda_2-\sqrt[4]{\varepsilon}.$$

На множестве G_pF_p

$$\lambda_1\leqslant\frac{\sum\limits_{x-0}^{p-1}\vartheta(g^x\alpha)}{\sqrt{p}}\leqslant\lambda_2;$$

следовательно, $G_pF_p\in E_p$. Так как

$$\operatorname{mes} F_p\geqslant 1-\sqrt{\varepsilon},$$

то

$$\operatorname{mes} G_pF_p\geqslant\operatorname{mes} G_p-\sqrt{\varepsilon}$$

и, значит,

$$\operatorname{mes} E_p\geqslant\operatorname{mes} G_p-\sqrt{\varepsilon}.$$

Применяя лемму, находим:

$$\underline{\lim_{p\to\infty}}\operatorname{mes} E_p\geqslant\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2p}}\int\limits_{\lambda_1+\sqrt[4]{\varepsilon}}^{\lambda_2-\sqrt[4]{\varepsilon}} e^{-\frac{u_2}{\sigma_1^2}}\,du-\sqrt{\varepsilon}.$$

Когда $\varepsilon \to 0$ $\sigma_1 \to \sigma$, и мы получаем:

$$\lim_{p\to\infty} \operatorname{mes} E_p = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\, du.$$

Теорема доказана.

Поступило
19. XI. 1957

ЛИТЕРАТУРА

[1] Postnikow A. G., Analogen des Tarrischen Problems für die Exponentialfunktion, Festschrift anlässliche des 250 geburstages Leonhard Eulers, Berlin, 1957.
[2] Kac M., On distribution of values of sums of the type $\sum f(2^k t)$, Ann. of Math., second series, vol. 47, № 1 (1946), 33—49.
[3] Марков А., Исчисление вероятностей, 4-е изд., М., 1924.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 599–630

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В работе изучается решение одной вариационной задачи Гильберта в пространстве, где предельные значения варьируемых функций с одной и другой стороны заданной поверхности удовлетворяют некоторому линейному соотношению.

§ 1. Введение

1. Гильберт в своей работе ([17]) рассмотрел следующую задачу.

На комплексной плоскости R (или на римановой поверхности, состоящей из нескольких листов) задан замкнутый контур Γ и класс $\mathfrak{M}$ кусочно-аналитических функций f, обладающих свойством

$$D[f] = \iint_R \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right\} dx\, dy < \infty \tag{1}$$

и таких, что их предельные значения f_+ и f_- на Γ соответственно изнутри и извне Γ удовлетворяют условию:

$$f_+ - f_- = 1. \tag{2}$$

Кроме того, функции $f \in \mathfrak{M}$ подчиняются условию

$$\int_\gamma f\, d\gamma = 0, \tag{3}$$

где γ — отрезок, заданный вне контура Γ.

Ставится вопрос о существовании минимума вариационной задачи

$$\min_{f \in \mathfrak{M}} D[f] = D[u] \tag{4}$$

в классе $\mathfrak{M}$.

Ограничившись контуром Γ, состоящим из конечного числа отрезков, параллельных осям координат, Гильберт доказывает существование решения вариационной задачи (4) и устанавливает, что минимизирующая функция u есть функция, гармоническая на $R - \Gamma$. В случае, если R есть риманова поверхность, на функции f класса $\mathfrak{M}$ накладывается дополнительное ограничение, в силу которого функция f должна удовлетворять определенным условиям регулярности в точках ветвления R; контур Γ при этом не должен проходить через точки ветвления.

В настоящей работе мы решаем аналогичную, но несколько более общую вариационную задачу в n-мерном пространстве $R_n = R$ точек

$(x_1, \ldots, x_n)$. Именно, мы задаем в R_n замкнутую дважды непрерывно дифференцируемую поверхность Λ и вне Λ (вместо отрезка) — $(n-1)$-мерный параллелепипед γ. На Λ, кроме того, задаются три функции: $a(Q) \neq 0$, $b(Q)$ и $\varkappa(Q)$, где a и b непрерывно дифференцируемы, а $\varkappa(Q)$ подчиняется более слабым ограничениям, естественно вытекающим из постановки задачи; они будут выполняться, например, если $\varkappa(Q)$ удовлетворяет в метрике $L_2(\Lambda)$ условию Липшица степени $\frac{1}{2}+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$. Рассматривается класс $\mathfrak{M}$ функций, заданных на R и подчиняющихся условиям:

$$D[f] = \int_R \sum_1^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 dR < \infty, \tag{5}$$

$$af_+ - bf_- = \varkappa \text{ на } \Lambda \tag{6}$$

и условию (3), и доказывается существование и единственность минимума вариационной задачи (4), а также то обстоятельство, что u есть функция, гармоническая на $R-\Lambda$. Производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ понимаются в обобщенном смысле.

Из условия (5) уже следует существование предельных значений f_- и f_- функции f на Λ почти для всех нормалей к Λ (или предельных значений в среднем) извне и изнутри Λ.

Таким образом, функция u, минимизирующая вариационную задачу (4), обладает следующими двумя свойствами: 1) $u \in \mathfrak{M}$ и 2) u — гармоническая на $R-\Lambda$ функция.

Однако нетрудно видеть, что среди гармонических на $R-\Lambda$ функций можно определить бесконечное множество принадлежащих к классу $\mathfrak{M}$. Таким образом, сами по себе свойства 1) и 2) не определяют еще экстремальной функции u вариационной задачи. Поэтому естественно возникает вопрос, каковы те дополнительные (кроме 1) и 2)) условия, которым должна удовлетворять функция f, чтобы она обращала в минимум задачу (4), т. е. чтобы она была равна u. Мы показываем, что эти дополнительные (необходимые и достаточные) условия сводятся к следующим:

3) какова бы ни была непрерывно дифференцируемая определенная на Λ функция φ, должно иметь место равенство:

$$\lim_{\delta\to 0} \int \left\{ b\,\frac{\partial u}{\partial n}(Q,\delta) - a\,\frac{\partial u}{\partial n}(Q,\delta)\right\} \varphi(Q)\, d\Lambda = 0. \tag{7}$$

Здесь пара (Q,δ) обозначает точку, отстоящую от точки $Q \in \Lambda$ по нормали к Λ на расстоянии $|\delta|$ и находящуюся с внутренней или внешней стороны Λ в зависимости от того, будет ли δ положительным или отрицательным; $\frac{\partial}{\partial n}$ обозначает дифференцирование по этой нормали (внешней или внутренней).

4) На бесконечности функция u должна иметь свойство:

$$\int_{\sigma_\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 d\sigma_\rho = o(\rho^{1-n}) \quad (\rho\to\infty), \tag{8}$$

где σ_ρ — поверхность шара радиуса ρ с центром в начале координат.

Таким образом, наша вариационная задача решает следующую крае-

вую задачу, имеющую единственное решение: найти на $R-\Lambda$ гармоническую функцию, для которой выполняются условия (3), (5) — (8).

Отдельно исследуется случай $n=2$. При $n=2$ условие (7), выраженное на языке предельных значений $\frac{\partial u}{\partial n}$, может быть заменено эквивалентным условием, выраженным на языке предельных значений (V_+ и V_-) сопряженной к u гармонической функции. При постоянных a и b возникающая при этом краевая задача делается частным случаем хорошо изученной методами теории аналитических функций задачи Римана — Привалова в теории сингулярных интегральных уравнений [см. ([6])]. При $a=b=1$ получается задача Ю. В. Сохоцкого [см. ([16])].

Среди приведенных в настоящей работе вспомогательных лемм отметим лемму 6.15, в которой оценивается интеграл от квадрата несколько более общей, чем гармоническая, функции, взятой по поверхности Λ_h, отстоящей на расстоянии h от Λ.

Я хочу выразить здесь благодарность А. В. Бицадзе за ценные замечания, высказанные им по поводу этой работы.

§ 2. Предварительные сведения

2.1. Пусть G обозначает область n-мерного пространства $R_n=R$.

Функция f, по определению, принадлежит к $L_2(G)$, если она имеет интегрируемый квадрат на G; таким образом,

$$\|f\|^2_{L_2(G)}=\int_G |f|^2\,dG<\infty. \tag{1}$$

Это обозначение мы сохраним и для $(n-1)$-мерных областей $\gamma\subset G$.

Если, кроме того, функция f имеет на G обобщенные частные производные с интегрируемым квадратом, так что

$$D_G[f]=\int_G\sum_1^n\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 dG<\infty, \tag{2}$$

то говорят, что функция f принадлежит классу $W_2^{(1)}(G)$ Соболева [см. ([14])].

Положим

$$\|f\|^2_{W_2^{(1)}(G)}=\|f\|^2_{L_2(G)}+D_G[f]. \tag{3}$$

2.2. Рассмотрим ограниченную односвязную область G с границей Λ, принадлежащей классу C_2. Таким образом, из каждой точки $Q\in\Lambda$ можно, как из центра, описать сферу достаточно малого радиуса, которая высекает из Λ кусок (открытое множество) σ, содержащий строго внутри себя (по отношению к Λ) Q и проектируемый взаимно однозначно на одну из $(n-1)$-мерных координатных плоскостей. Если считать условно, что это есть плоскость $(x_1,\ldots,x_{n-1})$, то σ определяется уравнением

$$x_n=\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})\quad (x_1,\ldots,x_{n-1})\in\sigma', \tag{1}$$

где σ' есть $(n-1)$-мерная (открытая) область (проекция σ на плоскость $x_n=0$), а функции φ есть функция класса C_2 на σ'.

Отметим некоторые свойства функций $f\in W_2^{(1)}(G)$.

Если область G отображается в другую область $\widetilde{G}$ точек $(u_1, \ldots, u_n)$ при помощи преобразований

$$u_i = \psi_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

непрерывно дифференцируемых и обладающих якобианом, ограниченным сверху и снизу на G положительными константами, то функция $f = f(u_1, \ldots, u_n)$, рассматриваемая как функция от переменных u_i, также принадлежит к классу $W_2^{(1)}(G)$ [см. ([7]), § 1].

Заметим, что интеграл (2) п. 2.1 при замене переменных по формулам (2) преобразуется по обычным классическим формулам, как если бы частные производные от f были непрерывными; отсюда, в частности, следует, что

$$D_{\widetilde{G}}[f] = \int\limits_{\widetilde{G}} \sum_1^u \left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\right)^2 d\widetilde{C} < cD_G[f], \tag{3}$$

где c — константа, не зависящая от рядом стоящего множителя.

В достаточно малой (n-мерной) окрестности куска σ поверхности Λ, о котором говорилось выше, можно ввести координаты

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}, h) = (Q; h), \tag{4}$$

обозначающие следующее:

Если из каждой точки Λ провести нормали (внутрь и вне G), то на некотором достаточно малом расстоянии δ от Λ все они не пересекаются. Поэтому каждая точка $P \in G$ из достаточно малой окрестности куска σ единственным образом определяется координатами (4), где

$$Q\{x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})\} \quad (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \sigma'$$

— точка Λ, из которой выходит нормаль к Λ, такая, что на ней лежит точка P, а h — расстояние от P до Q, взятое со знаком плюс, если $P \in G$, и минус, если $P \notin G$.

Преобразование

$$(x_1, \ldots, x_n) \rightleftarrows (x_1, \ldots, x_{n-1}, h)$$

(для области V_σ, представляющей собой достаточно малую окрестность куска σ), есть частный случай преобразования (2) [см. по этому поводу ([8]), § 4] и потому, если $f \in W_2^{(1)}(G)$, то функция f, рассматриваемая как функция от $(x_1, \ldots, x_{n-1}, h)$, принадлежит классу $W_2^{(1)}(V_\sigma)$.

2.3. Если функция $f \in W_2^{(1)}(G)$ и граница Λ области G принадлежит классу C_2, то f можно продолжить за пределы Λ на все пространство R так, что продолженная функция $f \in W_2^{(1)}(R)$, $f \equiv 0$ вне некоторой области $G' \supset \overline{G}$ и

$$\|f\|_{W_2^{(1)}(R)} < c\|f\|_{W_2^{(1)}(G)}, \tag{1}$$

где константа c не зависит от f [см. ([9]), ([11]) и ([1])].

2.4. Если $f \in W_2^{(1)}(G)$ и Λ принадлежит классу C_2, то имеет смысл функция

$$f|_\Lambda = \psi. \tag{1}$$

Именно, функцию f можно видоизменить на множестве n-мерной

меры нуль и после этого получим *:

$$\int\limits_{\Lambda} [f_h - \psi]^2 d\Lambda \underset{h\to 0}{\to} 0, \quad f_h = f|_{\Lambda_h},$$

где $\Lambda_h \subset G$ есть поверхность, отстоящая от Λ по нормали на расстоянии h [см. ([8]), § 4].

Функция ψ принадлежит классу $H_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\Lambda)$ [см. ([14]), § 11 и ([8]), § 2; в ([8]) дано определение классов $H_2^{(r)}$]. Это означает, что $\psi \in L_2(\Lambda)$ и существует константа M такая, что на каждом куске σ, определяемом, например, координатами $x_1, \ldots, x_{n-1}$ (см. п. 2.2), имеет место неравенство:

$$\left(\int\limits_{\sigma} |\psi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}) - \psi(x_1, \ldots, x_{n-1})|^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant M|h|^{\alpha}, \tag{2}$$

где $\alpha = \frac{1}{2}$.

Чтобы отметить, что $\psi \in H_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\Lambda)$ при определенной константе M, будем писать $\psi \in H_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\Lambda; M)$.

Справедливы неравенства:

$$M \leqslant c\sqrt{D_G[f]} \tag{3}$$

и

$$\|f\|_{L_2(\Lambda)} < c\left(\sqrt{D_G[f]} + \|f\|_{L_2(G)}\right), \tag{4}$$

второе из которых хорошо известно. Они вытекают из следующих фактов. Продолжим f за пределы G на R_n так, чтобы продолженная функция принадлежала классу $W_2^{(1)}(R_n)$ и выполнялось неравенство (1) п. 2.3. Заметим, что $W_2^{(1)}(R_n) \subset H_2^{(1)}(R_n)$, и если считать, что M_1 — наименьшая константа, с которой $f \in H_2^{(1)}(R_n;\ M_1)$, то имеет место неравенство $M_1 \leqslant c_1\sqrt{D_{R_n}[f]}$ [см. ([7]), лемма 3]. Поэтому, принимая во внимание теорему 5.14 работы ([8]), будем иметь:

$$\|f\|_{L_2(\Lambda)} + M \leqslant c_2\left(\|f\|_{L_2(R_n)} + M_1\right) \leqslant c_3\left(\|f\|_{L_2(G)} + \sqrt{D_G[f]}\right),$$

откуда следует неравенство (4). Далее, оставляя в этом неравенстве только константу M и применяя к первому члену правой части неравенство Пуанкаре [см. ([14]), стр. 75], получим:

$$M^2 < c_4\left\{\left(\int\limits_G f\,dG\right)^2 + D_G[f]\right\}.$$

Если в этом последнем неравенстве функцию f заменить на $f + c$, где c — константа, подобранная так, чтобы первый член правой части обратился в нуль, то от этого величины M и $D_G[f]$ не изменятся, а это влечет неравенство (3).

2.5. Если $\varepsilon > 0$ и определенная на Λ функция $\psi \in H_2^{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}(\Lambda)$, т. е. если $\psi \in L_2(\Lambda)$ и выполняется неравенство (2) п. 2.4 при $\alpha = \frac{1}{2} + \varepsilon$, то существует в R (а следовательно, и в G) функция f, принадлежащая

* Имеет место также равенство $\lim f = \psi$, когда точка $P \in G$ движется по нормали к соответствующей точке $Q \in \Lambda$ почти для всех нормалей.

классу $H_2^{(1+\varepsilon)}(R)$ и тем более классу $W_2^{(1)}(R)$, для которой имеет место равенство (1) п. 2.4 (это следует из теоремы 6.1 работы ([8])).

При $\varepsilon = 0$ этот факт не верен, так как класс $H_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\Lambda)$ содержит в себе и продолжаемые и не продолжаемые до класса $W_2^{(1)}(G)$ функции ψ.

Однако возможно и в других терминах дать необходимые и достаточные условия. Нам они не будут нужны; отметим только, что в двумерном случае, когда Λ есть гладкий замкнутый контур и ψ можно рассматривать как функцию от длины s дуги Λ, необходимым и достаточным условием является конечность ряда *

$$\sum_1^\infty k\,(a_k^2 + b_k^2) < \infty, \tag{1}$$

где a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции ψ периода l, равного длине Λ.

Свойство (1) эквивалентно тому факту, что $\psi \in L_2(\Lambda)$ и

$$\int_0^l \int_0^l \frac{|\psi(x+u) - \psi(x)|^2}{u^2}\, dx\, du < \infty$$

[см. ([15])].

Этот критерий распространен Б. М. Бабичем и Л. Н. Слободецким ([2]) на более общий случай [см. еще ([18])].

Условимся в дальнейшем, что функция $\psi \in \tilde{H}_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\Lambda)$, если она обладает тем свойством, что существует функция $f \in W_2^{(1)}(R)$ такая, что $f|_\Lambda = \psi$.

Аналогично определяется и класс $\tilde{H}_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\sigma)$, где σ — некоторый кусок Λ. Очевидно,

$$H_2^{\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}(\Lambda) \subset \tilde{H}_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\Lambda) \in H_2^{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}(\Lambda).$$

2.6. Пусть область G_* содержит внутри себя дважды непрерывно дифференцируемый контур Λ, $G_* - \bar{G} = G_1$, а на G_* задана функция f такая, что $f \in W_2^{(1)}(G)$ и $f \in W_2^{(1)}(G_1)$, но при переходе через поверхность Λ может нарушаться существование обобщенных производных функции f. На основании сказанного в п. 2, 4, существуют предельные значения в среднем ** f_+ и f_- функции f на Λ соответственно изнутри и извне Λ, принадлежащие классу $\tilde{H}_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\Lambda)$.

---

* Достаточно взять в качестве G круг единичного радиуса. Если $f \in W_2^{(1)}(G)$, то, на основании вариационного принципа, гармоническая функция u, имеющая те же граничные значения ψ, что f, принадлежит классу $W_2^{(1)}(G)$. Но

$$D_G[u] = \pi \sum_1^\infty k\,(a_k^2 + b_k^2)$$

[см. ([4]), гл. IV, § 2, а также ([10]), стр. 249], где a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции ψ. Наоборот, из сходимости этого ряда следует, очевидно, что $u \in W_2^{(1)}(G)$.

** Нетрудно установить, что и почти всюду по нормалям к Λ.

2.7. Для дальнейшего будет существенно, что из условия (2) п.2.1 следует условие (1) п.2.1. Это обстоятельство обосновано в леммах 2.8 и 2.9, которые, помимо известных фактов, содержат некоторые нужные нам новые оценки.

2.8. ЛЕММА. *Пусть на прямоугольном параллелепипеде*

$$\Delta = \{a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

задана функция f, *имеющая обобщенные частные производные такие, что* $D_\Delta[f] < \infty$. *Тогда почти для всех точек* $P = (x_1 \ldots, x_{n-1})$ *в смысле* $(n-1)$-*мерной меры из* $\Delta_1 = \{a_i \leqslant x \leqslant b_i;\ i = 1, \ldots, n-1\}$ *имеет место равенство*:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(P; x_n) = \varphi(P) + \int_{a_n}^{x^*} f'x_n(P; u)\, du. \tag{1}$$

При этом $\varphi \in L_2(\Delta_1)$ *и выполняются свойства*:

$$\int_{\Delta_1} |f(P, x_n) - \varphi(P)|^2\, d\Delta_1 = o(x_n) \quad (x_n \to 0), \tag{1'}$$

$$\|f\|_{L_2(\Delta)} \leqslant c\,(\|\varphi\|_{L_2(\Delta_1)} + \sqrt{D_\Delta(f)}), \tag{2}$$

$$\|\varphi\|_{L_2(\Delta_1)} \leqslant c\,(\|f\|_{L_2(\Delta)} + \sqrt{D_\Delta(f)}) \tag{3}$$

(неравенства (2) и (3) известны; см. ([14]), п.п. 9.12 и 9.13). Доказательство проведем для двумерного случая, так как в n-мерном случае рассуждения аналогичны.

Будем считать, что $x_1 = x,\ x_2 = y,\ a_1 = a,\ b_1 = b,\ a_2 = 0,\ b_2 = \delta$.

Из условия леммы следует, что после видоизменения f на множестве двумерной меры нуль для почти всех x функция $f(x,y)$ относительно y будет абсолютно непрерывной [см. ([8])] и

$$f(x,y') - f(x,y) = \int_y^{y'} f'_y(x,u)\, du \quad (0 \leqslant y \leqslant y' \leqslant 1), \tag{4}$$

откуда следует:

$$\left(\int_a^b |f(x,y') - f(x,y)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_a^b \left|\int_y^{y'} f'_y(x,u)\, du\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_a^b \int_y^{y'} f'_y(x,u)^2\, dx du\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{y' - y} = o(\sqrt{y' - y}) \to 0. \tag{5}$$

С другой стороны, после, быть может, второго видоизменения на множестве двумерной меры нуль, функция f почти для всех y по x абсолютно непрерывна. Однако существует такое значение y_0, для которого функция $f(x, y_0)$, как функция от x, при переходе от первого ко второму видоизменению изменится только на множестве одномерной меры нуль. Но при втором видоизменении $f(x, y_0)$ абсолютно непрерывна на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Далее, в силу (5), функция $f(x, y) - f(x, y_0)$ относительно x на $[a, b]$ при всяком y имеет интегрируемый квадрат. Поэтому и $f(x, y)$ обладает этим свойством.

В частности,

$$\varphi(x) = f(x, 0) \in L_2(a,b),$$

и из (5) следует (1′).

Далее, почти для всех x и для всякого $y \in [0, \delta]$ справедливо равенство:

$$f(x,y) = \varphi(x) + \int_a^y f'_y(x, u)\, du, \tag{6}$$

откуда следует:

$$f(x, y)^2 \leqslant 2\left\{\varphi(x)^2 + \left(\int_a^y f'_y(x, u)\, du\right)^2\right\}. \tag{7}$$

Интегрируя по Δ, мы приходим к неравенству (2). Разрешая уравнение (6) относительно $\varphi(x)$, легко получаем неравенство (3).

2.9. ЛЕММА. *Пусть на односвязной области G с границей Λ класса C_2 задана функция f, имеющая обобщенные частные производные такие, что $D_G[f] < \infty$, и пусть γ есть $(n-1)$-мерное дифференцируемое многообразие класса C_2, принадлежащее к G, такое, что его можно продолжить за его $(n-2)$-мерную границу с сохранением класса C_2, либо γ гомеоморфно шаровой поверхности в R_n. Тогда*

$$\psi = f|_\gamma \in L_2(\gamma), \tag{1}$$

$f \in L_2(G)$ и существует константа C_G, не зависящая от f, такая, что

$$\|f\|_{L_2(G)} < C_G(\|\psi\|_{L_2(\gamma)} + \sqrt{D_G[f]}) \tag{2}$$

(это неравенство известно, во всяком случае, когда γ — граница G *).

Доказательство. Прежде всего заметим, что, какова бы ни была область G_1 такая, что $\bar{G}_1 \subset G$, ее можно покрыть конечным числом прямоугольных параллелепипедов, принадлежащих к G. Поэтому, на основании леммы 2.8, $f \in L_2(G_1)$ и, следовательно, $f \in W_2^{(1)}(G_1)$.

Вследствие предположенной гладкости поверхности γ существует $\delta > 0$ такое, что все нормали к γ на расстоянии δ не пересекаются между собой. Обозначим через V (n-мерную) область, состоящую из точек, отстоящих от γ на расстоянии (по нормали), не превышающем δ.

Если Q — произвольная точка γ, то сферой достаточно малого радиуса с центром в точке Q можно вырезать из γ площадку σ такую, что отрезки всех нормалей длиной 2δ (с серединой в точке γ) образуют область $V_Q \subset V$, в которой возможно ввести локальные координаты, как в п. 2.2.

Область V можно покрыть конечным числом областей V_Q. Применяя к каждой из них лемму 2.8, легко получим, что $\psi \in L_2(\gamma)$ и

$$\|f\|_{L_2(V)} < c_1(\|\psi\|_{L_2(\gamma)} + \sqrt{D_G[f]}). \tag{3}$$

Определим поверхность $\Lambda_\delta \subset G$, отстоящую от Λ по нормали на расстояние δ, где δ настолько мало, что в области $G^{(\delta)}$, ограниченной поверхностями Λ и Λ_δ, возможно ввести локальные координаты (как в п.2.2).

Далее, рассечем пространство R_n сеткой при помощи $n-1$-мерных гиперплоскостей, параллельных осям координат, на n-мерные кубики Δ

* См. формулу (9.13) работы ([14]).

настолько малые, что можно указать связную область $G_1 = \sum_1^N \Delta_k$, состоящую из кубиков Δ_k сетки, так что $\Delta_1 \subset V$ и область G_1 содержит в себе Λ_δ.

Очевидно, при $k = 1$ из (3) следует:

$$\|f\|_{L_2(\Delta_k)} < c_2 \left(\|\psi\|_{L_2(\gamma)} + \sqrt{D_G[f]} \right). \tag{4}$$

Но это неравенство (быть может, при большей константе c_2) будет, очевидно, выполняться и для всякого $k = 1, \ldots, N$, если принять во внимание неравенства (2), (3) п.2.8 и то обстоятельство, что G_1 — связная область (от одного кубика к соседнему можно переходить через общую грань). Следовательно, из (3) и (4) будет вытекать, что

$$\|f\|_{L_2(G_1)} < c_3 \left(\|\psi\|_{L_2(\gamma)} + \sqrt{D_G[f]} \right). \tag{5}$$

Таким образом, $f \in W_2^{(1)}(G_1)$ и на основании неравенства (4) п.2.4 имеет смысл функция

$$f|_{\Lambda_\delta} = \chi = L_2(\Lambda_\delta),$$

причем

$$\|\chi\|_{L_2(\Lambda_\delta)} < c_4 \left(\|f\|_{L_2(G_1)} + \sqrt{D[f]} < \text{в силу } (5) < c_5 \left(\|\psi\|_{L_2(\gamma)} + \sqrt{D[f]} \right). \right. \tag{6}$$

Далее, в окрестности произвольной точки $Q \in \Lambda$ мы можем значения функции f в области $G^{(\delta)}$ почти для всех $x_1, \ldots, x_{n-1}$ записать в локальных координатах в виде

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, h) = \chi(x_1, \ldots, x_{n-1}) + \int_\delta^h f'_h(x_1, \ldots, x_{n-1}; u)\, du, \quad 0 \leqslant h \leqslant \delta,$$

откуда, написав неравенство, аналогичное неравенству (7) п.2.8, и приняв во внимание, что конечное число отмеченных выше окрестностей покрывает $G^{(\delta)}$, легко получим, на основании (6), что

$$\|f\|_{L_2(G^{(\delta)})} < c_6 \left(\|\psi\|_{L_2(\gamma)} + \sqrt{D[f]} \right). \tag{7}$$

Так как всегда можно считать, что $G_1 + G^{(\delta)} \supset G$, то из (5) и (7) следует (2).

2.9.1. Лемма 2.9 остается верной, если граница односвязной области G состоит не только из окружающей ее поверхности Λ класса C_2, но еще и из другой поверхности Λ_1 (лежащей внутри Λ). При этом Λ_1 может иметь край. Важно только, чтобы Λ_1 можно было продолжить (через край) так, чтобы получить поверхность Λ^* класса C_2, гомеоморфную шаровой поверхности.

В самом деле, построим в G два продолжения Λ^* и Λ^{**} так, чтобы Λ^* содержала γ внутри себя, а Λ^{**}, наоборот, имела γ вне себя. Пусть G_1 есть область, ограниченная Λ^*, и G_2 — область, ограниченная Λ^{**} и Λ. На основании 2.9, справедливо неравенство (2), в левой части которого можно вместо G поставить G_1 или G_2, но тогда и $G = G_1 + G_2$.

§ 3. Класс $\mathfrak{M}$

3. Будем по-прежнему рассматривать область $G \subset R$, ограниченную (ограниченной) поверхностью Λ класса C_2.

Зададим на Λ три функции: $a(P)$, $b(P)$ и $\varkappa(P)$ $(P \in \Lambda)$. Функции a и

b будем предполагать имеющими непрерывные частные производные (по координатам, через которые эти функции могут быть выражены при помощи равенств вида (1) п.2.2.). Кроме того, пусть $a \neq 0$ на Λ. Что касается функции $\varkappa$, то мы предполагаем, что она принадлежит классу $\widetilde{H}_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\Lambda)$.

Введем в рассмотрение поверхность γ, которую будем считать представляющий собою $(n-1)$-мерный прямоугольный параллелепипед, находящийся вне *Λ. Не ограничивая общности, будем считать, что γ определяется неравенствами:

$$\gamma = \{0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i = 1, \ldots, n-1\}.$$

Определение 1. Функцию f, заданную на R, будем считать принадлежащей классу $\mathfrak{M}$, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) всюду в R, исключая Λ, функция f имеет обобщенные частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ и при этом

$$D[f] = D_R[f] = \int_R \sum_1^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 dR < \infty; \tag{1}$$

2) имеет место равенство:

$$af_+ - bf_- = \varkappa \text{ на } \Lambda, \tag{2}$$

где f_+, f_- — предельные значения f на Λ соответственно изнутри и извне Λ;

3) $$\int_\gamma f d\gamma = 0. \tag{3}$$

Определение 2. Функция f принадлежит классу $\mathfrak{M}_0$, если $f \in \mathfrak{M}$ при $\varkappa(P) \equiv 0$ на Λ.

ЛЕММА 1. *Класс $\mathfrak{M}$ не пуст.*

Эта лемма доказывается при меньших ограничениях на $a(P)$, чем это было предположено выше. Именно, предполагается, что функции $a(P)$ и $b(P)$ одновременно не равны нулю.

Доказательство. Зададим произвольную точку $Q \in \Lambda$ и шар V_Q с центром в Q настолько малый, что внутри него имеют смысл локальные координаты $(x_1, \ldots, x_{n-1};\ h)$ и что он вырезает из Λ кусок σ, на котором $a(P) \neq 0$ или $b(P) \neq 0$. Из того, что $\varkappa(P) \in \widetilde{H}_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\Lambda)$, следует существование функции $f \in W_2^{(1)}(R)$, так что $f|_\Lambda = \varkappa$. Таким образом, принимая во внимание сказанное в п.2.2, получим:

$$D_{V_Q}[f] = \int_{V_\sigma} \left\{\sum_1^{n-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)^2\right\} dV_Q < \infty.$$

Очевидно также, что для одной из функций

$$\frac{f(x_1, \ldots, x_{n-1}; h)}{a(x_1, \ldots, x_{n-1})} = \frac{f}{a} \quad \text{или} \quad \frac{f(x_1, \ldots, x_{n-1}; h)}{b(x_1, \ldots, x_{n-1})} = \frac{f}{b}$$

---

* Выводы, полученные в этой работе, остаются верными, если $b \neq 0$ и параллелепипед γ находятся не вне, а внутри области, ограниченной поверхностью Λ.

также будет иметь место:

$$D_{V_Q}\left[\frac{f}{a}\right] < \infty \text{ или } D_{V_Q}\left[\frac{f}{b}\right] < \infty,$$

в зависимости от того, будет ли на V_Q $a \neq 0$ или $b \neq 0$.

Функцию $\frac{f}{a}$ в первом случае или $\frac{f}{b}$ во втором случае можно продолжить за пределы V_Q на R так, что продолженная функция, которую мы обозначим через ψ, будет принадлежать классу $W_2^{(1)}(R)$ (см. п.2.2) и $\psi|_\gamma = 0$.

Очевидно

$$\psi|_\sigma = \begin{cases} \frac{\varkappa}{a} & \text{в случае } a \neq 0, \\ \frac{\varkappa}{b} & \text{в случае } b \neq 0. \end{cases}$$

Определим на R функцию $f_Q(x_1, \ldots, x_n)$ при помощи равенства

$$1)\ f_Q = \begin{cases} 0 & \text{вне } \Lambda, \\ \psi & \text{внутри } \Lambda, \end{cases}$$

или

$$2)\ f_Q = \begin{cases} -\psi & \text{вне } \Lambda, \\ 0 & \text{внутри } \Lambda. \end{cases}$$

Функция f_Q будет, очевидно, удовлетворять свойствам 1) и 3) определения 1 и частично свойству 2), именно:

$$af_{Q+} - bf_{Q-} = \varkappa \text{ на } \sigma = \sigma_Q.$$

Так как наше рассуждение имеет место для любой точки $Q \in \Lambda$, то, применяя лемму Бореля и процесс склеивания *, подобно тому как это делалось в § 6.1 нашей работы (7), мы можем построить на R функцию f, удовлетворяющую всем трем свойствам определения 1, т. е. принадлежащую классу $\mathfrak{M}$.

§ 4. Формулировки основных результатов

4.1. ТЕОРЕМА. *Среди функций f класса $\mathfrak{M}$ существует, и притом единственная, функция u, для которой осуществляется минимум вариационной задачи*

$$\min_{f \in \mathfrak{M}} D[f] = D[u] \qquad (D[f] = D_R[f]);$$

при этом функция u — гармоническая всюду, кроме Λ.

4.2. Следующие утверждения эквивалентны:

а) функция u удовлетворяет условиям теоремы 4.1;

б) функция $u \in \mathfrak{M}$ и для нее справедливо равенство:

$$D[u, f] = D_R[u, f] = \int_R \sum_1^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} dR = 0 \tag{1}$$

для всех $f \in \mathfrak{M}_0$;

в) функция u принадлежит $\mathfrak{M}$, гармоническая на $R - \Lambda$ и для всех

* Идея этого процесса исходит от Хестенса и Уитнея.

$\varphi \in \widetilde{H}_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\Lambda)$ или для всех непрерывно дифференцируемых на Λ функций

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\Lambda} \left\{ b \frac{\partial u}{\partial n}(Q;\ \delta) - a \frac{\partial u}{\partial n}(Q;\ -\delta) \right\} \varphi(Q)\, d\Lambda = 0 \tag{2}$$

и

$$\int_{\sigma_\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right)^2 d\sigma_\rho = o(\rho^{1-n}) \qquad (\rho \to \infty). \tag{3}$$

Здесь $u(Q;\ \delta)$ — значение функции u в точке $P = (Q,\ \delta)$, которая находится на нормали в $Q \in \Lambda$ на расстоянии $|\delta|$ от Q с соответствующим знаком, и $\frac{\partial u}{\partial n}(Q;\ \delta)$ $(|\delta| \leqslant \delta_0)$ обозначает производную от u в точке $(Q;\ \delta)$ по направлению внешней нормали к поверхности Λ_δ, состоящей из точек $(Q;\ \delta)$ с заданным δ.

При $n = 2$ формула (3) есть следствие того, что гармоническая функция $u \in \mathfrak{M}$.

Вместо условия (3) можно взять другие эквивалентные условия [см. условия 3) п. 6.1.2].

г) При $n = 2$ функция u, гармоническая на $R - \Lambda$, принадлежит к $\mathfrak{M}$ и для любой сопряженной к ней функции V почти для всех s (s — длина дуги Λ) существуют предельные значения V_+ и V_- на Λ, удовлетворяющие равенствам:

$$\int_0^l \mu(s)\, ds = 0, \tag{4}$$

$$\nu(s) + \int_0^s \mu(t)\, dt + \lambda_0 \equiv 0, \tag{5}$$

где

$$\mu(s) = V_- a' - V_+ b', \qquad \nu(s) = V_- a - V_+ b \tag{6}$$

и λ_0 — зависящая от V постоянная.

4.2.1. Если $a \equiv 1$, $b \equiv 0$, $\varkappa \in \widetilde{H}_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\Lambda)$, то, очевидно, функция u, о которой идет речь в теореме 4.1, тождественно равна нулю вне Λ, и теорема 4.1 дает решение вариационной задачи, соответствующей внутренней задаче Дирихле:

$$\min_{f|_\Lambda = \varkappa} D_G[f] = D_G[u].$$

Пусть, далее, u — функция, гармоническая внутри области G, ограниченной Λ, $u|_\Lambda = \varkappa$ и $u \equiv 0$ вне Λ. Тогда в рассматриваемом случае интегралы, стоящие в левых частях формул (2) и (3) п. 4, 2, равны нулю и u тривиальным образом удовлетворяет условию в), а значит, и условию а). Таким образом, функция u единственна.

Если $a \equiv 0$, $b = 1$, $\varkappa \in \widetilde{H}_2^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(\Lambda)$, $\gamma \subset G$, то утверждения 4.2 (см. сноску на стр. 608) подобным образом дают обоснование существования и единственности гармонической функции u, решающей внешнюю задачу Дирихле и удовлетворяющей свойству $D[u] < \infty$.

§ 5. Доказательство теоремы 4.1 и эквивалентности утверждений а) и б) п. 4.2

5.1. Неравенство Пуанкаре. Если ω — произвольный шар в R и $f \in W_2^{(1)}(\omega)$, то существует константа c, не зависящая от f, такая, что

$$\| f \|^2_{L_2(\omega)} < c \{ (\int_\omega f d\sigma)^2 + D_\omega [f] \}$$

[см. ([14]), стр. 75].

5.2. ЛЕММА. *Пусть функция $f \in W_2^{(1)}(G)$ и область G содержит $(n-1)$-мерный прямоугольный параллелепипед $\gamma = \{0 \leqslant x_i \leqslant 1;\ i = 1, \ldots, n-1\}$, причем*

$$f|_\gamma = \psi, \quad \int_\gamma \psi d\gamma = 0. \tag{1}$$

Тогда существует константа $c > 0$ такая, что

$$\| \psi \|_{L_2(\gamma)} < c \sqrt{D[f]}. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть функция f удовлетворяет условиям леммы. Тогда, в силу неравенства (3) п. 2.4,

$$\psi \in H_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\gamma;\ M) \text{ и } M < c_1 \sqrt{D[f]}. \tag{3}$$

Продолжим функцию ψ за γ на параллелепипед $-1 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ четным образом относительно каждой координаты и затем периодически, с периодом 2, — на все подпространство R_{n-1}. На основании теоремы В. К. Дзядыка ([3]), такое продолжение приводит к функции f, принадлежащей классу $H_2^{\left(\frac{1}{2}\right)} * (c_2 M)$ периодических периода 2 функций по каждой из переменных $(x_1, \ldots, x_{n-1})$. При этом, вследствие (1),

$$\int_{-1}^{+1} \ldots \int_{-1}^{+1} f dx_1 \ldots dx_{n-1} = 0$$

и, следовательно [см. ([13])], существует константа c_3 такая, что

$$\| \psi \|_{L_2(\gamma)} \leqslant c_3 M \leqslant \text{в силу (3)} \leqslant c_4 \sqrt{D[f]}.$$

5.3. ЛЕММА (основная). *Если $\omega \subset R$ — произвольный n-мерный шар, то существует константа c_ω такая, что для всех $f \in \mathfrak{M}_0$*

$$\| f \|_{L_2(\omega)} < c_\omega \sqrt{D[f]}. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathfrak{M}_0$ и S — шаровая поверхность, внутри которой находятся шар ω и поверхности Λ и γ.

Обозначим через G_1 область, ограниченную поверхностями (класса C_2) Λ и S.

На основании леммы 2.9,

$$\| f \|_{L_2(G_1)} < c_1 (\| \psi \|_{L_2(\gamma)} + \sqrt{D[f]}),$$

где c_1 — константа, и так как для функции ψ выполняется равенство (1) п. 5.2, то, в силу леммы 5.2,

$$\| f \|_{L_2(G_1)} < c_2 \sqrt{D[f]}. \tag{2}$$

Кроме того, на основании (2) и 2.4 (4)

$$\|f_-\|_{L_2(\Lambda)} < c_3 \sqrt{D[f]}. \tag{3}$$

Но из того, что $f \in \mathfrak{M}_0$, следует:

$$f_+ = \frac{b}{a} f_-,$$

и так как a и b непрерывны и $a \neq 0$ на Λ, то и

$$\|f_+\|_{L_2(\Lambda)} < c_4 \sqrt{D[f]}. \tag{4}$$

На основании леммы 2.9, где в качестве γ берем границу Λ области G, получаем:

$$\|f\|_{L_2(G)} < c_5 (\|f_+\|_{L_2(\Lambda)} + \sqrt{D[f]}) < \text{в силу (4)} < c_6 \sqrt{D[f]}. \tag{5}$$

Из (2) и (5) следует (1), так как $\omega \subset G + \Lambda + G_1$.

5.4. Доказательство теоремы 4.1. Пусть

$$\inf_{f \in \mathfrak{M}} D[f] = d$$

и

$$\lim_{f_n \in \mathfrak{M}} D[f_n] = d \quad (n \to \infty),$$

При помощи обычных рассуждений [см. ([14]), стр. 98 или ([10]), стр. 264] получаем:

$$D[f_n - f_m] \to 0 \quad (n, m \to \infty),$$

и так как $f_n, f_m \in \mathfrak{M}_0$, то, по лемме 5.3, для всякого шара $\omega \subset R$ имеем:

$$\|f_n - f_m\|^2_{L_2(\omega)} < c_\omega D[f_n - f_m] \to 0 \quad (n, m \to \infty).$$

Таким образом, существует функция u с интегрируемым квадратом на любом $\omega \subset R$ и с $D_\omega[u] < \infty$, так что [см. ([7]), лемма 4 или ([8]), лемма 1.2 или ([5]), стр. 76]

$$\|f_n - u\|_{L_2(\omega)} \to 0,$$

$$D_\omega[f_n - u] \to 0 \quad (n \to \infty)$$

(но v, конечно, может не иметь производных при переходе через Λ).

Для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что для всех $n, m > N$

$$\varepsilon > D[f_n - f_m] \geqslant D_\omega[f_n - f_m]$$

и, следовательно,

$$\varepsilon \geqslant D_\omega[f_n - u].$$

В силу произвольности ω, получаем:

$$\varepsilon \geqslant D[f_n - u].$$

Таким образом, функция u удовлетворяет свойству 1) класса $\mathfrak{M}$ и

$$D[u] = d.$$

Можно утверждать (см. п. 2.6.) существование на Λ предельных функций u_- и u_+, которые для какого-либо шара ω, содержащего в себе Λ [см. неравенство (4) п. 2.4], удовлетворяют условиям:

$$\left.\begin{array}{l} \|f_{n_-} - u_-\|_{L_2(\Lambda)} \\ \|f_{n_+} - u_+\|_{L_2(\Lambda)} \end{array}\right\} < c_\omega (\|f_n - u\|_{L_2(\omega)} + \sqrt{D_\omega[f_n - u]}) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Поэтому из того, что для f_n выполняется свойство 2) класса $\mathfrak{M}$, следует, что оно выполняется и для u, т. е.

$$au_- - bu_+ = \varkappa \text{ на } \Lambda.$$

Из подобных соображений, на основании неравенства

$$\| f_n - u \|_{L_2(\gamma)} < c\,(\| f_n - u \|_{L_2(\sigma)} + \sqrt{D_\sigma [f_n - u]}) \to 0, \quad n \to \infty,$$

где $\sigma \supset \gamma$, следует выполнение для u свойства 3):

$$\int_\gamma u d\gamma = 0.$$

Таким образом, $u \in \mathfrak{M}$.

Функция, для которой достигается минимум в классе $\mathfrak{M}$, единственна, так как если бы, кроме u, была еще другая функция u_1, то для любого шара ω мы бы имели:

$$0 \leqslant \| u_1 - u \|^2_{L_2(\omega)} \leqslant c_\omega D [u_1 - u] = -4D \left[\frac{u_1 + u_2}{2}\right] +$$
$$+ 2D [u_1] + 2D [u_2] \leqslant -4\lambda + 2d + 2d \leqslant 0,$$

так как $\lambda \geqslant d$, и, следовательно,

$$u_1 \equiv u_2.$$

Функция u — гармоническая вне Λ, так как если бы она не была гармонической на каком-либо шаре ω, расположенном вне Λ, мы могли бы заменить ее другой функцией V, совпадающей с ней вне и на поверхности Λ_ω шара ω и гармонической внутри ω. Затем в случае необходимости (это может оказаться нужным, если кусок γ пересекает ω), мы прибавим к V_1 константу c так, чтобы функция $V = V_1 + c$ имела среднее значение по γ, равное нулю. В результате получилось бы, что $V \in \mathfrak{M}$ и $D[V] < D[u] = d$, что невозможно. Теорема 4.1 доказана.

5.5. Свойства а) и б) п. 4.2. эквивалентны. Действительно, если функция удовлетворяет условию а) и $f \in \mathfrak{M}_0$, то для любого вещественного λ

$$D[u + \lambda f] = D[u] + 2D[u, f] + \lambda^2 D[f] \geqslant D[u],$$

откуда следует равенство (1) п. 4. 1, т. е. условие б).

Наоборот, если u обладает свойством б) и $F \in \mathfrak{M}$, $F = u + f$, то $f \in \mathfrak{M}_0$ и

$$D[F] = D[u] + D[f] \geqslant D[u].$$

т. е. для u выполняется свойство а).

Это рассуждение хорошо известно и приведено для полноты *.

§ 6. Оценка некоторых интегралов для гармонической функции на бесконечности и вблизи граничной поверхности

6.1. Введем в рассмотрение единичную сферу σ пространства R с центром в начале координат. Каждая точка $P \in R$, не совпадающая с началом координат, определяется однозначно парой (ρ, Q), где ρ — рас-

* Впрочем, это рассуждение, так, как оно проведено, показывает, что нет необходимости оперировать с функциями (вариациями) f (с $D[f] < \infty$), равными нулю на некоторой полосе, прилегающей к границе Λ области, а затем замыкать класс этих функций, как это обычно делают.

стояние P до начала и Q — точка пересечения луча OP с σ. Функция f, определенная на R, может быть записана в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(\rho;\ Q).$$

Пусть Ω есть область, состоящая из всех точек R, находящихся вне сферы σ.

6.1.1. ЛЕММА. *Пусть f — функция, имеющая в области Ω обобщенные первые производные и*

$$D_\Omega[f] < \infty. \tag{1}$$

Тогда если видоизменить f на множестве n-мерной меры нуль так, чтобы после этого она почти для всех $Q \in \sigma$ была абсолютно непрерывной по ρ на любом конечном отрезке $1 \leqslant \rho \leqslant b$ $(1 < b < \infty)$ (что всегда возможно), то

$$\int_{\sigma_\rho} f^2 d\sigma_\rho < \begin{cases} \sqrt{c\rho \ln \rho}, & n = 2, \\ \sqrt{c\rho^{n-1}}, & n > 2, \end{cases} \tag{2}$$

где c — положительная константа, не зависящая от ρ, и σ_ρ — сфера радиуса ρ с центром в начале.

Доказательство. Будем считать, что функция $f(\rho;\ Q)$ уже видоизменена на множестве меры нуль, как сказано в условии леммы. Тогда для любого $\rho > 1$ почти для всех $Q \in \sigma$

$$f(\rho,\ Q) = f(1;\ Q) + \int_1^\rho f'_\rho(u;\ Q)\, d\sigma,$$

где $f(1,\ Q)$ имеет интегрируемый квадрат на σ:

$$\int_\sigma f(1;\ Q)^2\, d\sigma = B^2 < \infty.$$

Отсюда следует:

$$\sqrt{\int_{\sigma_\rho} f^2 d\sigma_\rho} = \sqrt{\int_\sigma f^2(\rho;\ Q)\, \rho^{n-1} d\sigma} \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\sqrt{\int_\sigma f^2(1;\ Q)\, \rho^{n-1} d\sigma} + \sqrt{\int_\sigma \rho^{n-1}\left(\int_1^\rho f'_\rho(u;\ Q)\, du\right)^2 d\sigma}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\rho^{\frac{1-n}{2}}\left\{B + \int_1^\rho \left(\int_\sigma f'^2_\rho\, d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} du\right\} = 2\rho^{\frac{n-1}{2}}\left\{B + \right.$$

$$\left. + \int_1^\rho u^{\frac{1-n}{2}}\left(\int_\sigma f'_\rho(u;\ Q)^2 u^{n-1} d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\right\} du = 2\rho^{\frac{n-1}{2}}\{B + \int_1^\rho u^{\frac{1-n}{2}} \sqrt{\lambda(u)}\, du\}, \tag{3}$$

где

$$\lambda(u) = \int_{\sigma} f'_{\rho}(u;\ Q)\, u^{n-1}\, d\sigma = \int_{\sigma_\rho} f'_{\rho}\, d\sigma_\rho$$

есть, на основании (1), определенная почти для всех u оси $1 \leqslant u < \infty$ и суммируя на этой оси положительная функция. Для нее, таким образом, имеет место равенство:

$$\int_1^\infty \lambda(u)\, du = A < \infty,$$

и, следовательно, в силу неравенства Шварца,

$$\int_1^\rho u^{\frac{1-n}{2}} \sqrt{\lambda(u)}\, du \leqslant \sqrt{A}\left(\int_1^\rho u^{1-n}\, du\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \begin{cases} \sqrt{A \ln \rho}, & n = 2, \\ \sqrt{A}, & n > 2. \end{cases}$$

Это обстоятельство влечет за собой формулу (2), если принять во внимание формулу (3).

6.1.2. ЛЕММА. *Пусть $u(\rho;\ Q)$ есть функция, гармоническая на Ω и удовлетворяющая условию $D_\Omega\ [u] < \infty$, что влечет*

$$K = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 d\Omega < \infty. \tag{1}$$

Тогда:

1) *имеет место равенство:*

$$\int_{\sigma_\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 d\sigma_\rho = O(\rho^{1-n}) \qquad (\rho \geqslant 2), \tag{2}$$

которое при $n > 2$, вообще говоря, в смысле порядка не может быть улучшено;

2) *при $n = 2$ это неравенство на самом деле точнее:*

$$\int_{\sigma_\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 d\sigma_\rho = O(\rho^{-3}) \qquad (\rho \geqslant 2) \tag{3}$$

и всегда выполняется равенство

$$\int_{\sigma_\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho}\, d\sigma_\rho = 0; \tag{4}$$

3) *при $n > 2$ для того чтобы имело место равенство*

$$\int_{\sigma_\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 d\sigma_\rho = o(\rho^{1-n}) \qquad (\rho \to \infty), \tag{5}$$

необходимо и достаточно, чтобы для функции $u(1;\ Q) = g(Q)$ выполнялось одно из условий:

$$\int_{\sigma} g(Q)\, d\sigma = 0, \tag{6$_1$}$$

$$\lim_{\rho \to \infty} \int_{\sigma_\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho}\, d\sigma_\rho = 0, \tag{6$_2$}$$

$$\int_{\sigma_\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho}\, d\sigma_\rho = 0 \tag{6$_3$}$$

для какого-либо $\rho > 1$ *или для всех* $\rho \geqslant 1$, *и тогда правая часть равенства* (2) *есть* $O(\rho^{-n-1})$.

Доказательство. Удовлетворяющую условию леммы гармоническую вне единичной сферы σ функцию $u(\rho; Q)$ можно записать в виде

$$u(\rho; Q) = A + \frac{1}{\rho^{n-2}} \sum_{0}^{\infty} \rho^{-\nu} \varphi_\nu(Q) \quad (Q \in \sigma,\ 1 \leqslant \rho < \infty), \tag{7}$$

где $\varphi_\nu(Q)$ $(\nu = 1,2,\ldots)$ — определенные на σ функции, представляющие собой некоторые линейные комбинации из полиномов Лежандра различных порядков*, и A — константа.

Для дальнейшего будут существенными только следующие свойства функций φ_ν $(\nu = 0,1,2, \ldots)$:

1) φ_ν — непрерывные на σ функции,

2) $\int_\sigma \varphi_\nu \varphi_\mu d\sigma = 0 \quad (\nu \neq \mu)$,

3) $\varphi_0(Q) = \text{const}$,

поэтому

$$\int_\sigma \varphi_\nu \, d\sigma = 0 \quad (\nu = 1,2,\ldots) \tag{8}$$

и

$$\int_\sigma u(1;\ Q)\, d\sigma = \int_\sigma \varphi_0 d\sigma = \varphi_0 \sigma. \tag{9}$$

Следует учесть, что ряд (7) записан несколько необычно, в нем не выделены коэффициенты Фурье функции $u(1; Q)$ и потому функции φ фактически зависят от u.

Заметим, что в силу (7) и ортогональности функций φ_ν на σ имеет место равенство:

$$\int_{\sigma_\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 d\sigma_\rho = \int_\sigma \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 \rho^{n-1} d\sigma = \sum_{0}^{\infty} (\nu + n - 2)^2 \rho^{-2\nu-n+1} a_\nu^2 =$$

$$= \frac{1}{\rho^{n-1}} \sum_{0}^{\infty} (\nu + n - 2)^2 \rho^{-2\nu} a_\nu^2, \tag{10}$$

где

$$a_\nu = \int_\sigma \varphi_\nu (Q)^2 \, d\sigma. \tag{11}$$

---

* Равенство (7) можно получить из равенства

$$u(P) = u(\rho;\ Q) = \sum_{0}^{\infty} \rho^k \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \psi_\nu (\cos \gamma)\, u(1, Q')\, d\sigma = \sum_{0}^{\infty} \rho^\nu \varphi_\nu (Q), \tag{*}$$

приведенного в томе II Куранта — Гильберта, гл. IV, § 2, для гармонической внутри шара, ограниченного сферой σ, функции. Здесь $|\sigma|$ — площадь поверхности σ и γ — угол между радиус-векторами точек P (или Q) и Q' (точки интегрирования по σ). Соответствующее равенство для гармонической вне σ функции получим (см. там же, гл. IV, § 1), если в правой части (*) заменим ρ на ρ^{-1} и умножим ее на ρ^{2-n}.

С другой стороны,

$$K = \int_0^1 \int_{\sigma_\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 d\sigma_\rho d\rho = \sum_0^\infty{}' \frac{(\nu + n - 2)^2}{2\nu + n - 2} a_\nu^2 < c \sum_0^\infty (\nu + 1) a_\nu^2, \tag{12}$$

где $\sum'$ означает, что при $n = 2$ член, соответствующий $\nu = 0$, надо опустить, и c — положительная, не зависящая от ν константа.

Заметим, что если $\rho \geqslant 2$ и $n > 2$, то

$$\rho^{-2\nu} < 2^{-2\nu} < \frac{c}{2\nu + n - 2},$$

где c — не зависящая от $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ константа. Поэтому

$$\sum_0^\infty (\nu + n - 2)^2 \rho^{-2\nu} a_\nu^2 < c \sum_0^\infty \frac{(\nu + n - 2)^2}{2\nu + n - 2} a_\nu^2 < cK,$$

откуда, вследствие (10) и (12), получаем:

$$\int_{\sigma_\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 d\sigma_\rho < \frac{cK}{\rho^{n-1}},$$

где константа c не зависит от $\rho \geqslant 2$. Этим доказано утверждение 1) леммы при $n > 2$.

Если $n = 2$, то в ряде (10) член, соответствующий значению $\nu = 0$, равен нулю. В этом случае для $\rho \geqslant 2$ имеет место неравенство:

$$\int_{\sigma_\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 d\sigma_\rho = \frac{1}{\rho^3} \sum_1^\infty \nu^2 \rho^{-2\nu+2} a_\nu^2 < \frac{c}{\rho^3} \sum_1^\infty \frac{\nu}{2} a_\nu^2 = \frac{cK}{\rho^3},$$

т. е. доказано утверждение 2) леммы.

Пусть теперь $n > 2$. Из рассмотрения ряда (10) видно, что равенство (5) справедливо, тогда и только тогда, когда в ряде (10) коэффициент $a_0 = 0$. Но это обстоятельство, в силу (9), эквивалентно выполнению или равенства (6_1), или (6_2), или (6_3) для какого-либо $\rho \geqslant 1$ или для всех $\rho \geqslant 1$. Этим доказано утверждение 3) леммы.

Примечание. В случае $n > 2$ примером гармонической вне единичной сферы функции, удовлетворяющей условию 1) и не удовлетворяющей условию 3), является функция $u = \rho^{2-n}$.

6.1.3. ЛЕММА. *Если функция f удовлетворяет условию леммы* 6.1.1, *а u — гармоническая на Ω функция, для которой*

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 d\Omega < \infty, \tag{1}$$

$$\int_{\sigma_\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 d\sigma_\rho = o(\rho^{1-n}), \tag{2}$$

то

$$\int_{\sigma_\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} f \, d\sigma_\rho = \begin{cases} O\left(\frac{\sqrt{\ln \rho}}{\rho}\right), & n = 2 \\ O(\rho^{-1}), & n > 2 \end{cases} \quad (\rho \geqslant 1). \tag{3}$$

Доказательство. Заметим, что на основании леммы 6.1.2 при $n = 2$ условие (2) есть следствие условия (1), причем в правую часть

условия (2) в этом случае можно написать $O(\rho^{3})$. Далее, на основании той же леммы, из (1) и (2) следует, что правая часть (2) есть на самом деле $O(\rho^{-n-1})$. Поэтому, принимая во внимание лемму 6.1.1, будем иметь:

$$\left|\int\limits_{\sigma_\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} f\, d\sigma_\rho\right| \leqslant \sqrt{\int\limits_{\sigma_\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 d\sigma_\rho}\sqrt{\int\limits_{\sigma_\rho} f^2 d\sigma_\rho} <$$

$$< O\left(\rho^{-\frac{n+1}{2}}\right)\cdot\begin{cases}\sqrt{c\rho \ln \rho}, & n=2,\\ \sqrt{c\rho^{n-1}}, & n>2.\end{cases}$$

6.1.4. ЛЕММА. *Пусть* $\Delta = \{a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i=1, \ldots, n-1\}$ *есть некоторый прямоугольный* $(n-1)$*-мерный параллелепипед и в* R_n *определен кусок* $\sigma = \sigma_\Delta$ *поверхности при помощи равенства*:

$$x_n = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}), \quad (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \Delta,$$

где функция φ *имеет непрерывные частные производные второго порядка. Пусть, далее,* $V_{\sigma\delta}$ *есть n-мерная область, прилегающая к* σ *с одной стороны, состоящая из точек, которые можно корректно определить* (как в п. 2.2 *) *при помощи координат* $(x_1, \ldots, x_{n-1};\ h)$, *где* $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \Delta$ *и* $0 \leqslant h \leqslant \delta$.

Аналогично определяются $\sigma' = \sigma_{\Delta'} \subset \sigma$ *и* $V_{\sigma'\delta'} \subset V_{\sigma\delta}$, $\delta' = \dfrac{\delta}{2}$, *где*

$$\Delta' = \left\{a_i + \frac{\delta}{2} \leqslant x_i \leqslant b_i - \frac{\delta}{2},\ i=1, \ldots, n-1\right\}.$$

Тогда существует положительное настолько малое число γ, *что если из произвольной точки* $Q = (x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)};\ h_0) \in V_{\sigma'\delta'}$ *описать шар* ω_{h_0} *радиуса* γh_0, *то он будет полностью принадлежать к* $V_{\sigma\delta}$ *и координаты* $(x_1, \ldots, x_{n-1};\ h)$ *любой точки* ω_{h_0} *будут удовлетворять неравенствам*:

$$|x_i - x_i^{(0)}| \leqslant h_0, \quad |h - h_0| \leqslant h_0. \tag{1}$$

Доказательство. Обозначим декартовы координаты произвольной точки $P \in V_{\sigma\delta}$ через $P = (u_1, \ldots, u_n)$. Они связаны с координатами $(x_1, \ldots, x_{n-1};\ h)$ при помощи преобразований:

$$u_i = x_i + h\alpha_i \quad (i = 1, \ldots, n-1), \quad u_n = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) + h\alpha_n,$$

где

$$\alpha_i = \alpha_i(x_1, \ldots, x_{n-1}) \tag{2}$$

суть косинусы углов, образуемых нормалью к σ, которая проходит через P. При условиях, наложенных на φ, преобразования (2) один раз непрерывно дифференцируемы и в пределах $0 \leqslant h \leqslant \delta$ взаимно однозначно обратимы с якобианом, ограниченным сверху и снизу положительными константами.

Пусть

$$\begin{aligned} x_i &= \psi_i(u_1, \ldots, u_n) \quad (i=1, \ldots, n-1),\\ h &= \psi_n(u_1, \ldots, u_n) \quad (u_1, \ldots, u_n) \in V_{\sigma\delta}, \end{aligned} \tag{3}$$

* Координата h может иметь и любой другой геометрический смысл. Важно только, чтобы формулы (3) п. 6.1.4 давали взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое преобразование с якобианом, ограниченным сверху и снизу.

суть обратные преобразования по отношению к (2), и пусть

$$\left|\frac{\partial \psi_i}{\partial u_j}\right| \leqslant M, \quad (u_1, \ldots, u_n) \in V_{\sigma\delta}. \tag{4}$$

Возьмем произвольную точку

$$Q = (x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)};\ h_0) = (u_1^{(0)}, \ldots, u_n^{(0)}) \in V_{\sigma'\delta'}$$

и опишем вокруг нее шар ω_{h_0} радиуса γh_0. Координаты $(x_1, \ldots, x_{n-1};\ h) = (u_1, \ldots, u_n)$ произвольной точки $P \in \omega_{h_0}$ будут, очевидно, удовлетворять неравенствам:

$$|x_i - x_i^{(0)}| = |\psi_i(u_1, \ldots, u_n) - \psi_i(u_1^{(0)}, \ldots, u_n^{(0)})| \leqslant$$

$$\leqslant K \sum_1^n |u_i - u_i^{(0)}| \leqslant nM\gamma h_0 \quad (i = 1, \ldots, n-1),$$

$$|h - h_0| = |\psi_n - \psi_n^{(0)}| \leqslant nM\gamma h_0.$$

Если принять во внимание, что $(x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}) \in \Delta'$ и $0 \leqslant h_0 \leqslant \frac{\delta}{2}$, то для того чтобы $P \in V_{\sigma\delta}$, достаточно, чтобы

$$nM\gamma \leqslant 1.$$

6.15. Далее будем считать, что положение произвольной точки $P \in G$ вблизи поверхности Λ определяется парой $P = (Q;\ h)$, где Q есть точка Λ такая, что исходящая из нее нормаль проходит через P, и h — положительное число, выражающее расстояние от P до Q. Если Λ есть дважды непрерывно дифференцируемая поверхность, то это соглашение при достаточно малых h корректно (см. п. 2.2); h может иметь и другой геометрический смысл (см. сноску на стр. 618).

ЛЕММА. *Пусть $u(P)$ есть непрерывная функция, определенная в (открытой) области G, ограниченной дважды непрерывно дифференцируемой (ограниченной) поверхностью S. При этом пусть выполняются следующие условия:*

1) $$\int_G u^2 dG = M^2 < \infty; \tag{1}$$

2) *существует константа K такая, что если S — шаровая поверхность с центром в произвольной точке $P \in G$, полностью принадлежащая к G, то*

$$|u(P)| \leqslant \frac{K}{|S|} \int_S |u|\, ds, \tag{2}$$

где $|S|$ обозначает величину площади S (в частности, если u — гармоническая на G, то $K = 1$). Тогда существует константа C_G, зависящая только от G, такая, что при достаточно малом δ выполняется неравенство:

$$\int_\Lambda u^2(Q;\ h)\, d\Lambda < C_G K^2 M^2 h^{-1}, \quad 0 < h < \delta, \tag{3}$$

где интегрирование производится по $Q \in \Lambda$.

Доказательство. Зададим произвольную точку $A \in \Lambda$. Можно указать некоторую часть σ поверхности Λ, содержащую строго внутри

себя точку A и удовлетворяющую (при соответствующей перенумерации координат x_i) всем условиям предыдущей леммы. Определим, как в этой лемме, число $\delta > 0$ и области $V_{\sigma'\delta'} \subset V_{\sigma\delta} \subset G$ $\left(\delta' = \frac{\delta}{2}\right)$.

Пусть теперь $P = (Q;\ h_0)$ — произвольная точка $V_{\sigma'\delta'}$. Тогда $Q \in \sigma'$ и $0 \leqslant h_0 \leqslant \frac{\delta}{2}$. На основании предыдущей леммы, шар ω_{h_0} радиуса γh_0 с центром в этой точке полностью принадлежит к $V_{\sigma\delta}$ и на нем, таким образом, определена функция u, для которой, в силу (2), имеет место неравенство:

$$|u(P)|\, r^{n-1} \leqslant \frac{K}{\varkappa} \int\limits_{s_r} |u|\, ds_r \quad (0 \leqslant r \leqslant \gamma h_0),$$

где $\varkappa$ — площадь поверхности n-мерного шара радиуса единица и s_r — шаровая поверхность радиуса r с центром в точке P.

Проинтегрируем левую и правую части этого неравенства по r на интервале $(0, \gamma h_0)$ и применим к правой части неравенство Буняковского:

$$\frac{\gamma^n h_0^n}{n} |u(P)| \leqslant \frac{K}{\varkappa} \int\limits_0^{\gamma h_0} \int\limits_{s_r} |u|\, ds_r\, dr = \frac{K}{\varkappa} \int\limits_{\omega_{h_0}} |u|\, d\omega_{h_0} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 K h_0^{\frac{n}{2}} \sqrt{\int\limits_{\omega_{h_0}} u^2 d\omega_{h_0}}\,, \tag{4}$$

где c_1 — константа, зависящая только от n.

Введем при оценке интеграла, стоящего в правой части неравенства (4), координаты $(x_1, \ldots, x_{n-1};\ h)$, считая, что точка $P = (x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)};\ h_0)$. Как мы знаем (см. п. 2.2), якобиан перехода к этим координатам от декартовых для достаточно малых h ограничен сверху положительной константой, которую мы обозначим через c_2. Учитывая неравенства (1) предыдущей леммы для координат $(x_1, \ldots, x_{n-1};\ h)$ точек шара ω_{h_0}, будем иметь:

$$\int\limits_{\omega_{h_0}} u^2 d\omega_{h_0} \leqslant c_2 \int\limits_{x_1^{(0)} - h_0}^{x_1^{(0)} + h_0} \ldots \int\limits_{x_{n-1}^{(0)} - h_0}^{x_{n-1}^{(0)} + h_0} \int\limits_0^{2h_0} u^2 dx_1 \ldots dx_{n-1}\, dh =$$

$$= c_2 \int\limits_{-h_0}^{h_0} \ldots \int\limits_{-h_0}^{h_0} \int\limits_0^{2h_0} u^2 (x_1^{(0)} + x_1, \ldots, x_{n-1}^{(0)} + x_{n-1};\ h)\, dx_1 \ldots dx_{n-1}\, dh. \tag{5}$$

Заменим интеграл в правой части неравенства (4) интегралом, стоящим в правой части неравенства (5), возведем в квадрат левую и правую части (4) и проинтегрируем по $Q \in \sigma'$, где $P = (Q;\ h_0)$. При этом учтем, что кусок σ (соответственно σ') определяется уравнением $x_n = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$, где $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \Delta$ (соответственно $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \Delta'$), так что элемент поверхности σ можно записать в виде:

$$d\sigma = \sqrt{1 + \sum_1^{n-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i^{(0)}}\right)^2}\, dx_1^{(0)} \ldots dx_{n-1}^{(0)},$$

откуда

$$d\Lambda = d\sigma \leqslant c_3\, dx_1^{(0)} \ldots dx_{n-1}^{(0)} \quad \text{для} \quad (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \Delta.$$

Таким образом, имеем:

$$\int\limits_{\sigma'} u^2(Q;\,h_0)\,d\Lambda \leqslant c_4K^2h_0^{-n} \leqslant \int\limits_{a_1+\frac{\delta}{2}}^{b_1-\frac{\delta}{2}} \cdots$$

$$\cdots \int\limits_{a_{n-1}+\frac{\delta}{2}}^{b_{n-1}-\frac{\delta}{2}} \left(\int\limits_{-h_0}^{h_0} \cdots \int\limits_{-h_0}^{h_0}\int\limits_{0}^{2h_0} u^2(x_1^{(0)}+x_1,\,\ldots,\,x_{n-1}^{(0)}+x_{n-1};\,h)\,dx_1\ldots dx_{n-1}\,dh\right)\cdot$$

$$\cdot\, dx_1^{(0)}\ldots dx_{n-1}^{(0)}.$$

Заменим порядок интегрирования x_i и $x_i^{(0)}$ и учтем, что $h_0 < \frac{\delta}{2}$. Тогда получим:

$$\int\limits_{\sigma'} u^2(Q;\,h_0)\,d\Lambda \leqslant$$

$$\leqslant c_4K^2h_0^{-n}(2h_0)^{n-1}\int\limits_{a_1}^{b_1} \cdots \int\limits_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}\int\limits_{0}^{2h_0} u^2(x_1,\,\ldots,\,x_{n-1};\,h)\,dx_1\ldots dx_{n-1}\,dh \leqslant$$

$$\leqslant c_5K^2h_0^{-1}\int\limits_{V_{\sigma\delta}} u^2\,dG, \tag{6}$$

где последнее неравенство имеет место в силу того, что якобиан перехода от координат $(x_1,\,\ldots,\,x_{n-1},\,h)$ к декартовым ограничен на $V_{\sigma\delta}$.

Таким образом доказано, что любую точку $A \in \Lambda$ можно окружить кусками $\sigma' \subset \sigma \subset \Lambda$ так, что при некоторой константе c_5, зависящей только от σ' и σ, выполняется неравенство (6) для всех u, удовлетворяющих условиям леммы. Но, согласно лемме Бореля, Λ можно покрыть конечным числом таких кусков. Поэтому

$$\int\limits_{\Lambda} u^2(Q;\,h_0)\,d\Lambda \leqslant \sum_{\sigma'}\int\limits_{\sigma'} u^2(Q;\,h)\,d\Lambda < c_GK^2h_0^{-1}\int\limits_{G} u^2dG \quad (h_0 < \delta_0),$$

если δ_0 достаточно мало, и лемма доказана.

6.1.6. ЛЕММА. *Для функции* u, *удовлетворяющей условию леммы* 6.1.5, *выполняется следующее в известном смысле более сильное, чем соотношение* (3) п. 6.1.5, *равенство*:

$$\int\limits_{\Lambda} u^2(Q;\,h)\,d\Lambda = o(h^{-1}) \quad (h>0, \quad h\to 0). \tag{1}$$

В самом деле, в неравенстве (6) п. 6.1.5 константа c_5 не зависит от h_0 и δ, где $0 \leqslant 2h_0 < \delta$. Если положить $\delta = 3h_0$, то

$$\int\limits_{\Lambda_{\sigma\delta}} u^2dG = o(h_0) \quad (h_0\to 0)$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{\sigma'} u^2(Q;\,h_0)\,d\Lambda = O(h_0^{-1}) \quad (h_0\to 0).$$

Переход от σ' к Λ при помощи леммы Бореля сохраняет это свойство, т. е. приводит к равенству (1).

§ 7. Доказательство эквивалентности свойств б) и в) п. 4.2

7.1. Введем в рассмотрение поверхности $\Lambda_{+\delta}$ и $\Lambda_{-\delta}$, состоящие из точек, отстоящих на расстоянии $\delta > 0$ по нормалям от Λ соответственно с положительной (внутренней к замкнутой поверхности Λ) и отрицательной стороны Λ.

Если $\delta > 0$ достаточно мало, то поверхности $\Lambda_{+\delta}$ и $\Lambda_{-\delta}$ определяются однозначно (см. п. 2.2). При этом в слое, ограниченном этими поверхностями, положение любой точки однозначно определяется парой $P = (Q; \delta)$, где $Q \in \Lambda$ и есть (единственная) точка, из которой выходит нормаль к Λ, проходящая через P, а δ — расстояние с соответствующим знаком от P до Q. Функцию Φ, определенную в указанном слое, можно рассматривать как функцию $\Phi(Q, \delta)$ от пары (Q, δ) и, в частности, если $D_G[\Phi] < \infty$, где G — область, ограниченная поверхностью, то

$$\int_{\Lambda\delta} \Phi^2 d\Lambda_\delta = \int_{\Lambda} \Phi^2(Q, \delta)\lambda(Q, \delta)\, d\Lambda,$$

так как замена

$$d\Lambda_\delta = \lambda(Q, \delta)\, d\Lambda \qquad (1)$$

связана при условиях, наложенных на гладкость Λ, с непрерывно дифференцируемым преобразованием, имеющим якобиан $\lambda(Q, \delta)$, ограниченный сверху и снизу положительными константами.

Заметим, что, очевидно,

$$\lim_{\delta\to 0} \lambda(Q, \delta) = 1 \qquad (2)$$

равномерно относительно $Q \in \Lambda$.

7.2. ЛЕММА. *Пусть u — гармоническая функция на $R - \Lambda$ и f — функция, имеющая на $R - \Lambda$ обобщенные производные. Пусть, кроме того,*

$$D[u] < \infty, \quad \int_{\sigma_\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 d\sigma_\rho = o(\rho^{1-n}), \quad D[f] < \infty, \quad \rho \to \infty, \qquad (1)$$

где σ_ρ — шаровая поверхность радиуса ρ с центром в начале координат. Тогда

$$D[u, f] = D_R[u, f] = \lim_{\delta\to 0} \int_{\Lambda} \left[\frac{\partial u}{\partial n}(Q; \delta) f_+(Q) - \frac{\partial u}{\partial n}(Q; -\delta) f_-(Q)\right] d\Lambda, \qquad (2)$$

где f_+, f_- — предельные значения f на Λ соответственно изнутри и извне и $\frac{\partial u}{\partial n}(Q; \delta)$, $\frac{\partial u}{\partial n}(Q; -\delta)$ — производные по внешней нормали соответственно к Λ_δ, $\Lambda_{-\delta}$.

Доказательство. Воспользуемся формулой Грина

$$D_G[u, f] = \int_G \sum_1^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} dG = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} f\, d\Gamma - \int_G f \Delta u\, dG = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} f\, d\Gamma,$$

которая справедлива, если $D_G[f] < \infty$, u — функция, гармоническая на области, содержащей в себе область G и ее границу Γ (непрерывно дифференцируемую). Здесь n обозначает направление внешней нормали к Γ.

Обозначим через G_δ область, ограниченную поверхностью Λ_δ (расположенной внутри Λ_δ), и через $G_{\delta\rho}$ — область, ограниченную поверхностями $\Lambda_{-\delta}$ и σ_ρ. Тогда

$$D[u, f] = \lim_{\delta\to 0} D_{G_\delta}[u, f] + \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \rho\to\infty}} D_{G_{\delta\rho}}[u, f] =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\left[\int\limits_{\Lambda_\delta} \frac{\partial u}{\partial n} f\, d\Lambda_\delta - \int\limits_{\Lambda_{-\delta}} \frac{\partial u}{\partial n} f\, d\Lambda_{-\delta}\right] + \lim_{\rho\to\infty}\int\limits_{\sigma_\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} f\, d\sigma_\rho, \qquad (3)$$

где n — направление внешней нормали к Δ_δ и $\Lambda_{-\delta}$.

Функции u и f удовлетворяют условиям леммы 6.1.3, поэтому

$$\lim_{\rho\to\infty}\int\limits_{\sigma_\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} f\, d\sigma_\rho = 0.$$

С другой стороны, вводя в рассмотрение предельные значения $f_+(Q)$ и $f_-(Q)$ (см. п. 2.6), где $Q \in \Lambda$, и произведя замену по формулам (1) п. 7.1, получим:

$$\lim_{\delta\to 0}\left[\int\limits_{\Lambda_\delta} \frac{\partial u}{\partial n} f\, d\Lambda_\delta - \int\limits_{\Lambda_{-\delta}} \frac{\partial u}{\partial n} f\, d\Lambda_{-\delta}\right] = \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{\Lambda} \frac{\partial u}{\partial n}(Q, \delta)\,[f(Q;\delta) - f_+(Q)]\,\lambda(Q;\delta)\,d\Lambda -$$

$$- \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{\Lambda} \frac{\partial u}{\partial n}(Q; -\delta)\,[f(Q; -\delta) - f_-(Q)]\,\lambda(Q; -\delta)\,d\Lambda +$$

$$+ \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{\Lambda}\left[\frac{\partial u}{\partial n}(Q;\delta) f_+(Q) - \frac{\partial u}{\partial n}(Q; -\delta) f_-(Q)\right] d\Lambda +$$

$$+ \lim_{\delta\to 0}\int \frac{\partial u}{\partial n}(Q;\delta) f_+(Q)\,[\lambda(Q;\delta) - 1]\,d\Lambda -$$

$$- \lim_{\delta\to 0}\int \frac{\partial u}{\partial n}(Q; -\delta) f_-(Q)\,[\lambda(Q; -\delta) - 1]\,d\Lambda = \lim_{\delta\to 0} I_{1\delta} + \ldots + \lim_{\delta\to 0} I_{5\delta}.$$

Начнем с оценки $I_{1\delta}$. Так как $\frac{\partial u}{\partial n}$ есть некоторая линейная комбинация с ограниченными коэффициентами из частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, представляющих собой гармонические на $R - \Lambda$ функции, то из условия $D[u] < \infty$, на основании леммы 6.1.6, * получаем:

$$\mu(\delta) = \int\limits_{\Lambda} \frac{\partial u}{\partial n}(Q;\delta)^2\, d\Lambda \leqslant o(\delta^{-1}) \quad (\delta\to 0). \qquad (4)$$

---

* Можно обойтись без леммы 6.1.6. Из условия $D[u] < \infty$ следует, что при достаточно малом δ_0 имеем $\int\limits_0^{\delta_0} \Phi(\delta)\,d\delta < \infty$, где $\Phi(\delta) = \int\limits_{\Lambda_\delta} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 dQ$. Следовательно, существует убывающая к нулю последовательность чисел δ_k, для которой $\Phi(\delta_k) < \frac{c}{\delta_k(\ln \delta_k)} < o(\delta_k)$ $(\delta_k \to 0,\ c > 0)$. В наших рассуждениях достаточно считать, что δ стремится к нулю не непрерывно, а дискретно.

Кроме того [см. формулу (5) п. 2.8],

$$\int_{\Lambda} [f(Q;\delta) - f_+(Q)]^2 \, d\Lambda = O(\delta), \quad \delta \to 0.$$

Следовательно, положив

$$M \geqslant |\lambda(Q;\delta)|, \quad Q \in \Lambda, \quad 0 < \delta \leqslant \delta_0,$$

будем иметь:

$$|I_{1\delta}| \leqslant M \sqrt{\int_{\Lambda} \frac{\partial u}{\partial n}(Q;\delta)^2 \, d\Lambda} \sqrt{\int_{\Lambda} [f(Q;\delta) - f_+(Q)]^2 \, d\Lambda} \to 0, \quad \delta \to 0. \quad (5)$$

Аналогично доказывается, что

$$|I_{2\delta}| \to 0 \quad (\delta \to 0). \quad (6)$$

Далее, в силу равенства (2) п. 7.1 и того обстоятельства, что функция $\lambda(Q;\delta)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка, имеет место оценка:

$$|\lambda(Q;\delta) - 1| \leqslant c_2 \delta.$$

Поэтому, принимая во внимание неравенство (4), получим:

$$|I_{4\delta}| \leqslant c_2 \delta \sqrt{\frac{c_1}{\delta}} \sqrt{\int_{\Lambda} f_+^2 \, d\Lambda} \to 0 \quad (\delta \to 0).$$

Аналогично оценивается $I_{5\delta}$.

Этим доказано равенство:

$$\lim_{\delta \to 0} \left[\int_{\Lambda_\delta} \frac{\partial u}{\partial n} f \, d\Lambda_\delta - \int_{\Lambda_{-\delta}} \frac{\partial u}{\partial n} f \, d\Lambda_{-\delta} \right] =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} I_{3\delta} = \lim_{\delta \to 0} \int_{\Lambda} \left[\frac{\partial u}{\partial n}(Q;\delta) f_+(Q) - \frac{\partial u}{\partial n}(Q;-\delta) f_-(Q) \right] d\Lambda$$

в предположении, что предел справа (или слева) существует *.

Но пределы $D_{G_\delta}[u, f]$ и $D_{G_{\delta\rho}}[u, f]$ существуют и, следовательно, существует

$$\lim_{\delta \to 0} I_{3\delta} = D[u, f],$$

что доказывает лемму.

7.2.1. Следствие. *Если, кроме условий, наложенных в лемме* 7.2, *функция* $f \in \mathfrak{M}_0$, *то*

$$D[u, f] = \lim_{\delta \to 0} \int_{\Lambda} \left[b \frac{\partial u}{\partial n}(Q;\delta) - a \frac{\partial u}{\partial n}(Q;-\delta) \right] \varphi(Q) \, dQ, \quad (1)$$

где

$$\varphi = \frac{f_-}{a}, \quad f_+ = b\varphi. \quad (2)$$

7.2.2. Замечание. Так как, по условию, a есть непрерывно дифференцируемая на Λ и не равная нулю функция, то из того, что $f_- \in \widetilde{H}_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\Lambda)$, следует, что

$$\varphi = \frac{f_-}{a} \in \widetilde{H}_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\Lambda).$$

---

* Отметим, что равенство (6) (в предположении, что один из пределов существует) сохраняется также, если заменить Λ на какую-либо часть $\Lambda' \subset \Lambda$ и соответственно Λ_δ, $\Lambda_{-\delta}$, — на Λ'_δ, $\Lambda'_{-\delta}$; при том нетрудно видеть, что Λ' может быть переменной областью, зависящей от δ.

Наоборот, если $\varphi \in \widetilde{H}_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\Lambda)$, то можно построить функцию $f \in \mathfrak{M}_0$ такую, что $f_- = a\varphi$ и $f_+ = b\varphi$. Таким образом, предел интеграла, стоящего в правой части равенства (1) п. 7.2.1, существует для всех $\varphi \in \widetilde{H}_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\Lambda)$.

7.3. Доказательство эквивалентности свойств б) и в) п. 4.2. Пусть задана функция, удовлетворяющая условию б). Имеем: $u \in \mathfrak{M}$ и для любой $f \in \mathfrak{M}_0$

$$D[u, f] = 0.$$

В качестве $f \in \mathfrak{M}_0$ возьмем любую такую функцию, но обращающуюся в нуль вне некоторой сферы σ_ρ, содержащей внутри себя Λ; тогда, на основании п. п. 7.2.1 и 7.2.2,

$$\lim_{\delta\to 0}\int_\Lambda \left[b\frac{\partial u}{\partial n}(Q;\delta) - a\frac{\partial u}{\partial n}(Q;-\delta)\right]\varphi(Q)\,dQ = 0 \qquad (1)$$

для всех $\varphi \in \widetilde{H}_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\Lambda)$, а следовательно, для всех непрерывно дифференцируемых на Λ функций φ.

С другой стороны, мы можем определить функцию $f_0 \in \mathfrak{M}_0$, тождественно равную нулю внутри шара с центром в начале, содержащего в себе Λ и γ, и тождественно равную единице вне другого большего, концентрического с ним шара. Для такой функции, на основании равенства (3) п. 7.2, имеем:

$$0 = D[u; f_0] = \lim_{\rho\to\infty}\int_{\sigma_\rho}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma_\rho. \qquad (2)$$

Вследствие утверждения 3) леммы 6.1.2, заключаем, что для функции u выполняется равенство:

$$\int_{\sigma_\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 d\sigma_\rho = o(\rho^{1-n}) \quad (\rho\to\infty) \qquad (3)$$

и, следовательно, функция u удовлетворяет условию в).

Пусть теперь функция u удовлетворяет условию в), т. е. $u \in \mathfrak{M}$ и имеют место равенства (1) (пока для $\varphi \in \widetilde{H}_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\Lambda)$) и (3); пусть, кроме того, $f \in \mathfrak{M}_0$. Тогда, в силу леммы 7.2, имеет место равенство (2) п. 7.2. Но правая часть этого равенства равна нулю, так как ее можно заменить (на основании 7.2.1) выражением вида (1), где функция $\varphi \in \widetilde{H}_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\Lambda)$, а следовательно, и левая часть равна нулю.

Остается доказать, что в утверждении в) достаточно считать, что равенство (1) п. 4.2 выполняется только для функций φ класса C_1, определенных на Λ, чтобы из условия в) следовало условие б).

7.3.1. В самом деле, зададим произвольную функцию $f \in \mathfrak{M}_0$, имеющую (вплоть до Λ) непрерывные частные производные на $R - \Lambda$. Для нее, по лемме 7.2, справедливо равенство (2) п. 7.2. Правая его часть равна нулю, так как f_+ и f_-, а следовательно (по 7.2.1), и φ имеют на Λ непрерывные производные. Таким образом, $D[u, f] = 0$ для

всех $f \in \mathfrak{M}_0$, имеющих на $R - \Lambda$ непрерывные частные производные; но тогда $D[u, f] = 0$ для всех $f \in \mathfrak{M}_0$.

§ 8. Доказательство эквивалентности свойств в) и г) п. 4.2 ($n = 2$)

8.1. Пусть $n = 2$ и функция u удовлетворяет условию в), т. е. она гармоническая на плоскости (x, y), исключая замкнутый контур Λ, $u \in \mathfrak{M}$ и

$$\lim_{\delta \to 0} \int_0^l \left[b \frac{\partial u}{\partial n}(s, \delta) - a \frac{\partial u}{\partial n}(s, -\delta) \right] \varphi(s)\, ds = 0 \tag{1}$$

для всех $\varphi \in \widetilde{H}_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\Lambda)$, где ds — элемент дуги Λ и l — длина Λ.

Обозначим через $V = V(x, y)$ какую-либо гармоническую функцию, сопряженную к u.

Если $\varphi(s)$ есть функция периода l, имеющая производную с интегрируемым квадратом на периоде, т. е. если $\varphi \in W_2^{(1)*}(\Lambda)$, то, в силу условий Коши—Римана,

$$\left[b \frac{\partial u}{\partial n}(s, \delta) - a \frac{\partial u}{\partial n}(s, -\delta) \right] \varphi(s)\, ds = \int_0^l \left[a \frac{\partial V}{\partial s}(s, -\delta) - b \frac{\partial V}{\partial s}(s, -\delta) \right] \varphi(s)\, ds =$$

$$= \int_0^l [V(s, -\delta)(a\varphi)' - V(s, \delta)(b\varphi)']\, ds = 0 \quad (\delta > 0). \tag{2}$$

На основании того, что

$$D[V] = D[u] < \infty, \tag{3}$$

имеет место существование пределов

$$V_+ = \lim_{\delta \to 0} V(s, \delta), \quad V_- = \lim_{\delta \to 0} V(s, -\delta) \quad (\delta > 0)$$

почти всюду. Кроме того, $V(s, \delta)$ и $V(s, -\delta)$ стремятся соответственно к V_+ и V_- в смысле среднего квадратического на $[0, l]$. Поэтому из (1) и (2) следует равенство:

$$\int_0^l [V_-(a\varphi)' - V_+(b\varphi)']\, ds = 0 \tag{4}$$

для всех $\varphi \in W_2^{(1)*}(\Lambda)$.

Если принять во внимание, что произвольную функцию $\varphi \in W_2^{(1)*}(\Lambda)$ можно записать в виде

$$\varphi(s) = A + \int_0^s \varphi'(t)\, dt,$$

где A — произвольная постоянная и $\varphi'(t)$ — произвольная функция с интегрируемым квадратом на периоде, удовлетворяющая дополнительному

условию

$$\int_0^l \varphi'(t)\,dt = 0, \tag{5}$$

то левую часть равенства (4) можно записать в виде:

$$\int_0^l [V_-(a\varphi)' - V_+(b\varphi')]\,ds =$$

$$= A\int_0^l \mu(s)\,ds + \int_0^l [\nu(s) + \int_s^l \mu(t)\,dt + \lambda]\,\varphi'(s)\,ds, \tag{6}$$

где

$$\mu(s) = V_-a' - V_+b',$$
$$\nu(s) = V_-a - V_+b$$

и λ — произвольная постоянная. Но тогда из (4) следует, что

$$\int_0^l \mu(s)\,ds = 0 \tag{7}$$

и, кроме того, можно выбрать постоянную $\lambda = \lambda_0$ так, что

$$\nu(s) + \int_s^l \mu(t)\,dt + \lambda_0 \equiv 0. \tag{8}$$

Этим доказано, что при $n = 2$ из свойства в) следует свойство г) (так как равенства (7) и (8) эквивалентны равенствам (4) и (5) п. 4.2).

Пусть теперь при $n = 2$ выполняется условие г). Из того, что $u \in \mathfrak{M}$, следует соотношение (3) и потому $V(s, \delta)$ и $V(s, -\delta)$ стремятся соответственно к V_+ и V_- в смысле среднего квадратического на периоде. Из (7), (8) и (6), где λ_0 — некоторая константа, вытекает справедливость равенства (4) для всех $\varphi \in W_2^{(1)*}(\Lambda)$ и, таким образом, для всех φ, имеющих на Λ непрерывную производную.

8.2. Следствие. *Существует и притом единственная определенная на плоскости, за исключением Λ, аналитическая функция*

$$f(z) = u + iv, \tag{1}$$

обладающая свойствами:

α) $$D[f] = \int_R \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 dxdy = D[u] < \infty,$$

β) $$au_+ - bu_- = \varkappa \text{ на } \Lambda,$$

γ) $$aV_- - bV_+ - \int_0^s [V_-(t)\,a'(t) - V_+(t)\,b'(t)]\,dt = \rho,$$

δ) $$\int_0^l [a'V_- - b'V_+]\,dt = 0,$$

ω) $$\int_\gamma f\,ds = 0,$$

где ρ — заданная постоянная.

В самом деле, мы знаем, что существует гармоническая функция u, обладающая свойством а) (п. 4.2), следовательно, свойствами α) и β),

где V — какая-либо сопряженная функция к u. При этом для u выполняется равенство

$$\int_{\gamma} u\,ds = 0.$$

Из эквивалентности свойств а) и г) следует, что для функции V выполняются равенства (7) и (8) п. 8.1 при некоторой постоянной λ_0. Прибавим к V константу λ_1 только для области, внешней к Λ, так, чтобы выполнялось условие:

$$\int_{\gamma} (V + \lambda_1)\,ds = 0.$$

и, таким образом, условие ω). Число λ_1 мы уже определили однозначно теперь прибавим к V_- константу λ_2 так, чтобы для функций

$$V^*_- = V_- + \lambda_2 \text{ и } V^*_+ = V_+ + \lambda_1$$

выполнялось условие γ), что приводит к равенству

$$\lambda_2 a(0) - \lambda_1 b(0) = \rho + \lambda_0,$$

которое однозначно определяет λ_2 так как, по условию, $a(0) \neq 0$. Для новой сопряженной функции V^*, увеличенной внутри и вне Λ соответственно на λ_2 и λ_1, будут, очевидно, выполняться условия γ), δ) и ω). Таким образом, подчиняющаяся требованиям следствия аналитическая функция $f(z)$ существует. Она единственна, потому что существует единственная функция, удовлетворяющая условию а), и, в силу эквивалентности, условию г). Но изменить в г) константу λ_0 так, чтобы имело место условие γ) при данном ρ, можно, как мы видели, только единственным образом — нужно прибавить к V_+ и V_- соответствующие константы λ_1 и λ_2.

8.3. Из 8.2, как следствие, вытекает решение краевой задачи Сохоцкого [см. ([6]), гл. 2, § 37 и ([16]), гл. 2, § 2], которую мы сформулируем следующим образом:

Требуется найти функцию $f(z)$, аналитическую на $R - \Lambda$, такую, что

$$D[f] = \int_R \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 dR < \infty, \qquad (1)$$

и удовлетворяющую на Λ граничному условию

$$f_+ - f_- = \varkappa, \qquad (2)$$

где предельные значения f_+ и f_- функции f понимаются почти всюду*. Кроме того, функция f должна иметь порядок -1 на бесконечности.

Покажем, как существование и единственность решения этой задачи следует из 8.2 в предположении, что заданная на Λ функция $\varkappa = \varkappa(s)$,

* Заметим, что из условия (1) следует, что функция $f(z)$ представима в областях внутренней и внешней по отношению к Λ в виде интегралов Коши с плотностью, соответственно равной f_+ и f_- (значения f_δ и $f_{-\delta}$ функции f на кривых Λ_δ и $\Lambda_{-\delta}$ сходятся соответственно к f_+ и f_- в смысле среднего квадратического). Этим замечанием устанавливается связь между постановкой задачи Сохоцкого и приведенной выше [см. ([16]), гл. 2, § 2].

где s — длина дуги Г, вообще говоря, комплексна и принадлежит классу $\widetilde{H}_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\Lambda)$.

Положим $\varkappa(s) = \varkappa_1(s) + i\varkappa_2(s)$, где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — действительные функции. Согласно 8.2, существуют функции

$$f_1(z) = u_1 + iv_1, \quad f_2(z) = u_2 + iv_2,$$

аналитические на $R - \Lambda$ и удовлетворяющие условиям:

$$D[f_1] = \int\limits_R \left|\frac{\partial f_1}{\partial z}\right|^2 dR < \infty, \quad D[f_2] < \infty,$$

$$f_{1+} - f_{1-} = \varkappa_1, \quad f_{2+} - f_{2-} = \varkappa_2$$

(в 8.2 надо положить $a \equiv b \equiv 1$, $\rho = 0$ и заменить $\varkappa$ в случае f_1 на $\varkappa_1$, а в случае f_2 — на $\varkappa_2$).

Функция $f^* = f_1 + if_2$ будет обладать свойствами:

$$D[f^*] < \infty, \quad f^*_+ - f^*_- = \varkappa.$$

Первое из них говорит, что разложение f^* в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид

$$f^*(z) = \sum_0^\infty \frac{a_k}{z^k}.$$

Функция

$$f(z) = f^*(z) - a_0,$$

очевидно, удовлетворяет всем требованиям поставленной задачи. Она есть единственная функция, удовлетворяющая этой задаче, так как если бы существовали две такие функции, то их разность $F(z)$ была бы тождественно не равной нулю аналитической на $R - \Lambda$ функцией, такой, что $D[F] < \infty$ и $F_+ - F_- = 0$ на Λ. При некоторой константе C функция $F_1 = F + C$ будет удовлетворять условиям α), β), γ), ω) п. 8.2, где надо положить $a \equiv b \equiv 1$, но это противоречит единственности подчиняющейся следствию 8.2 функции, так как тождественно равная нулю функция уже удовлетворяет условиям α) — ω).

Поступило
12. XII. 1957

ЛИТЕРАТУРА

1 Бабич Б. М., К вопросу о распространении функций, Успехи матем. наук, VIII, 2 (54) (1953), 111—113.
2 Бабич Б. М. и Слободецкий Л. Н., Об ограниченности интеграла Дирихле, Доклады Ак. наук СССР, 106, № 4, (1956), 604—606.
3 Дзядык В. К., О продолжении функций, удовлетворяющих условию Липшица в метрике L_p, Матем. сборн., 40 (82) : 2 (1956), 243—268.
4 Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, ГТТИ, 1933
5 Михлин С. Г., Проблема минимума квадратичного функционала, ГИТТЛ, 1952.
6 Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, Москва, 1946.

[7] Никольский С. М., Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных, Труды Матем. ин-та им. Стеклова, Ак. наук СССР, 38 (1951), 244—278.

[8] Никольский С. М., Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях, Матем. сборн., 33 (75): 2 (1953), 261—326.

[9] Никольский С. М., К вопросу о решении полигармонического уравнения вариационным методом, Доклады Ак. наук СССР, 83, № 3 (1953), 409—411.

[10] Никольский С. М., К задаче Дирихле для круга и полупространства, Матем. сборн., 35 (77) : 2 (1954), 247—266.

[11] Никольский С. М., О продолжении функций многих переменных с сохранением дифференциальных свойств, Матем. сборн., 40 (82) : 6 (1956), 243—268.

[12] Никольский С. М., Граничные свойства функций, определенных на области с угловыми точками. I, Матем. сборн., 40 (82) : 3 (1956), 303—318.

[13] Никольский С. М., Об одном неравенстве для периодических функций, Успехи матем. наук, XI, вып. 1 (67) (1956), 219—222.

[14] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа к математической физике, Изд-во ЛГУ, 1950.

[15] Ульянов П. Л., О некоторых эквивалентных условиях сходимости рядов и интегралов, Успехи матем. наук, 8, вып. 6 (58) (1953), 33—141.

[16] Хведелидзе Б. В., Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения, Труды Тбилисского матем. ин-та, XXIII (1956), 3—158.

[17] Hilbert D., Über das Dirichletsche Prinzip, Gesammelte Abhandlungen, Bd. 3 (1935), 15—37; Math. Annalen, Bd. 59 (1904), 161—186.

[18] Freud G. und Králik D., Über die Anwendbarkeit des Dirichletschen Prinzips für den Kreis, Acta Mathematica Ac. sciantiarum Hungaricae, VII (1957), 411—418.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 631—640

К. И. БАБЕНКО

О НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* М. А. Лаврентьевым)

В работе изучается приближение многочленами функций класса $B^{(r)}$ и находится величина наилучшего приближения для этого класса.

Рассмотрим класс $B^{(r)}\,(r=1, 2, \ldots)$ функций

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \tag{1}$$

аналитических в круге $|z|<1$ и удовлетворяющих условию

$$|f^{(r)}(z)|\leqslant 1, \quad |z|<1.$$

Для класса $B^{(r)}$ до сих пор остается открытым ряд вопросов приближения функций класса многочленами, несмотря на то, что соответствующие вопросы для гармонических функций решены давно.

Обозначим, как принято, через $W^{(r)}\,(r=1, 2, \ldots)$ класс непрерывных периодических (периода 2π) функций

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx), \tag{2}$$

имеющих производную $f^{(r)}(x)$, удовлетворяющую условию

$$|f^{(r)}(x)|\leqslant 1.$$

Обозначим через $r_n(x, f)$ остаток ряда (2) в точке x и положим

$$r_n(f)=\max_x |r_n(x; f)|,$$

$$r_n(W^{(r)})=\sup_{f\in W^{(r)}} r_n(f).$$

А. Н. Колмогоров [1] показал, что для любого натурального r

$$r_n(W^{(r)})=\frac{4}{\pi^2}\frac{\log(n+1)}{(n+1)^r}+O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right) \quad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Если $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами порядка $n-1$, то, как установлено в работе Фавара [2],

$$\sup_{f\in W^{(r)}} E_n(f)=\frac{K_r}{n^r}, \quad n=1, 2, \ldots,$$

и, как установлено в работе Н. Ахиезера и М. Крейна ([3]),

$$\sup E_n(\widetilde{f}) = \frac{\widetilde{K}_r}{n^r}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\widetilde{f}(x)$ — функция, сопряженная к функции $f(x)$, а K_r, $\widetilde{K}_r$ вычисляются по известному правилу.

Для класса $B^{(r)}$ аналог теоремы А. Н. Колмогорова установлен лишь недавно в работе С. Б. Стечкина ([4]).

Вопрос о наилучших приближениях функций класса $B^{(r)}$ до сих пор не был решен.

В настоящей работе мы найдем величину наилучшего приближения в классе $B^{(r)}$ и укажем простое доказательство теорем С. Б. Стечкина

§ 1. Пусть $S_n(z; f)$ — n-я сумма ряда (1), а $\sigma_n(z, f)$ — сумма Фейера Положим

$$r_n(z; f) = f(z) - S_n(z; f).$$

Основной результат работы ([4]) заключается в том, что

$$r_n(z; f) = -\frac{z^r S_{n-r}(z; f^{(r)})}{(n+1)^r} + O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right), \quad n = r, r+1, \ldots, \tag{3}$$

равномерно в круге $|z| \leqslant 1$ и равномерно относительно всего класса $B^{(r)}$. Из соотношения (3) при помощи известных теорем Э. Ландау и Г. Бора следует, что при $n \geqslant r$

$$\sup_{f \in B^{(r)}} \max_{|z| \leqslant 1} |r_n(z; f)| = \frac{1}{\pi} \frac{\log(n+1)}{(n+1)^2} + O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right).$$

Метод С. Б. Стечкина, при помощи которого получено соотношение (3), основан на тонких теоремах о числовых рядах. Однако, если воспользоваться формулой Коши, можно существенно упростить доказательство соотношения (3).

Так как

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k \geqslant r} k(k-1)\ldots(k-r+1) c_k z^{k-r},$$

то при $n \geqslant r$ и $|z| \leqslant \rho < 1$

$$r_n(z; f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = \rho} \zeta^r f^{(r)}(\zeta) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k}{k(k-1)\ldots(k-r+1)} \frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{4}$$

Во всем дальнейшем изложении мы положим

$$\alpha_k = \frac{1}{k(k-1)\ldots(k-r+1)}, \quad k = r, r+1, \ldots.$$

В силу аналитичности $f(z)$, имеем:

$$r_n(z; f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = \rho} \zeta^r f^{(r)}(\zeta) \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \left[\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k + \overline{\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k}\right] \frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{5}$$

откуда, положив $z = |z| e^{i\varphi}$, $\zeta = \rho e^{i\theta}$, находим:

$$r_n(z; f) = \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta| = \rho} \rho^r e^{ir\theta} f^{(r)}(\rho e^{i\theta}) \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^k \cos k(\varphi - \theta)\, d\theta.$$

Для того чтобы получить соотношение (3), достаточно к сумме, стоящей под знаком интеграла, дважды применить преобразование Абеля. Для удобства введем обозначения:

$$D_n(\rho, \theta) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \rho^k \cos k\theta,$$

$$K_n(\rho, \theta) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(\rho, \theta).$$

После преобразования найдем:

$$\sum_{l=n+1}^{\infty} \alpha_l \rho^l \cos l\theta = -\alpha_{n+1} D_n(\rho, \theta) - (n+1)\Delta\alpha_{n+1} K_n(\rho, \theta) + \\ + \sum_{l=n+1}^{\infty} (l+1)\Delta^2\alpha_l K_l(\rho, \theta).$$

Подставим полученное выражение под интеграл и разобьем интеграл на сумму трех интегралов, согласно последнему выражению. Интегралы от первых двух слагаемых вычисляются сразу и соответственно дают:

$$-\alpha_{n+1} S_n(z; z^r f^{(r)}(z)),$$

$$-(n+1)\Delta\alpha^{n+1} \sigma_n(z; z^r f^{(r)}(z)).$$

Поэтому

$$r_n(z; f) = -\alpha_{n+1} z^r S_{n-1}(z; f^{(r)}(z)) - (n+1)\Delta\alpha_{n+1}\sigma_n(z; z^r f^{(r)}(z)) + \\ + \sum_{l=n+1}^{\infty} (l+1)\Delta^2\alpha_l \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \rho^r e^{ir\theta} f^{(r)}(\rho e^{i\theta}) K_l\left(\frac{|z|}{\rho}, \varphi - \theta\right) d\theta.$$

Отсюда выводим:

$$\max_{|z| \leqslant \rho} |r_n(z; f) + \alpha_{n+1} z^r S_{n-r}(z; f^{(r)}(z))| \leqslant \\ \leqslant (n+1)\Delta\alpha_{n+1} \max_{|z| \leqslant \rho} |\sigma_n(z; z^r f^{(r)}(z))| + \\ + \sum_{l=n+1}^{\infty} (l+1)\Delta^2\alpha_l \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K_l(1, \varphi - \theta)\, d\theta.$$

Но для $f \in B^{(r)}$

$$\max_{|z| \leqslant \rho} |\sigma_n(z; z^r f^{(r)}(z))| \leqslant 1, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и, стало быть,

$$\max_{|z| \leqslant \rho} |r_n(z; f) + \alpha_{n+1} z^r S_{n-r}(z; f^{(r)})| \leqslant \\ \leqslant (n+1)\Delta\alpha_{n+1} + \sum_{l=n+1}^{\infty} (l+1)\Delta^2\alpha_l = \alpha_{n+2} + (2n+3)\Delta\alpha_{n+1},$$

что и доказывает соотношение (3), так как ρ — любое количество < 1.

§ 2. Перейдем к основному вопросу нашей работы — к наилучшим приближениям функций класса $B^{(r)}$.

Наилучшее приближение функции $f(z)$ в круге $|z| \leqslant \rho \leqslant 1$ многочленами степени $n-1$ мы обозначим через $E_n(\rho; f)$, $E_n(1; f) = E_n(f)$.

Пусть $p_{n-1}(z)$ — многочлен степени $n-1$, $n \geqslant r$,

$$p_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k.$$

Если у многочлена $p_{n-1}(z)$ первые r коэффициентов совпадают с соответствующими коэффициентами ряда (1), то, на основании формулы (4), имеем:

$$f(z) - p_{n-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=\rho} \zeta^r f^{(r)}(\zeta) \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k + \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \right\} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Используя аналитичность функции $f(z)$, последнюю формулу можно преобразовать к виду:

$$f(z) - p_{n-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|<1} \zeta^r f^{(r)}(\zeta) \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k + \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n + \right.$$

$$\left. + \sum_{-\infty}^{-1} \xi_k \overline{\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{|k|}} \right\} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

где ξ_k $(k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n-1)$ — произвольные комплексные числа, удовлетворяющие только тому условию, чтобы ряд

$$\sum_{-\infty}^{-1} \xi_k \overline{\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k}$$

абсолютно сходился. Поэтому

$$|f(z) - p_{n-1}(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|<1} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \left(\frac{z}{\rho}\right)^k + \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k + \right.$$

$$\left. + \sum_{-\infty}^{-1} \xi_k \overline{\left(\frac{z}{\rho}\right)^{|k|}} \right| \cdot \left| \frac{d\zeta}{\zeta} \right|.$$

Отсюда получаем:

$$E_n(|z|, f) \leqslant \frac{1}{2\pi} \inf_{\xi_k} \int\limits_{|\zeta|<1} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k + \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k + \right.$$

$$\left. + \sum_{-\infty}^{-1} \xi_k \overline{\left(\frac{z}{\rho}\right)^{|k|}} \right| \cdot \left| \frac{d\zeta}{\zeta} \right|.$$

Положив

$$\frac{|z|}{|\zeta|} = \rho < 1,$$

мы можем последний интеграл переписать в следующем виде:

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{-n+1}^{\infty} \rho^{|k|} \xi_k e^{ik\theta} + \sum_{k=n}^{\infty} \rho^k \alpha_k e^{-ik\theta} \right| d\theta = \int_0^{2\pi} |\Phi(e^{-i\theta})| \, d\theta.$$

Заметим, что если отыскивать минимум этого интеграла по обычным правилам дифференциального исчисления, то из необходимых условий экстремума легко найти, что для экстремальной функции $\Phi_0(e^{-i\theta})$ должны выполняться следующие условия:

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sgn} \Phi_0(e^{-i\theta}) e^{-ik\theta} \, d\theta = 0, \quad k = -n+1, \ -n+2, \ldots, 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

где $\operatorname{sgn} \Phi_0(e^{-i\theta})$ определяется из равенства:

$$\Phi_0(e^{-i\theta}) = |\Phi_0(e^{-i\theta})| \operatorname{sgn} \Phi_0(e^{-i\theta}).$$

Простейшее решение системы (6) таково, что

$$\operatorname{sgn} \Phi_0(e^{-i\theta}) = e^{-in\theta}. \tag{7}$$

Мы покажем, что именно это решение реализуется в данной задаче. Для этого нам достаточно подобрать величины ξ_k таким образом, чтобы

$$\sum_{k=-n+1}^{\infty} \rho^{|k|} \xi_k e^{+ik\theta} + \sum_{k=n}^{\infty} \rho^k \alpha_k e^{-ik\theta} = e^{-in\theta} \varphi(\theta), \quad \varphi(\theta) > 0.$$

С этой целью мы введем два следующих интерполяционных многочлена.

Пусть $g(\theta)$ — непрерывная периодическая с периодом 2π функция. Положим

$$\theta_\nu = \frac{2\nu - 1}{2n}\pi, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \quad \vartheta_\nu = \frac{\nu\pi}{n}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$p_{n-1}(\theta; g) = \sum_{\nu=1}^{n} g(\theta_\nu) \frac{\cos n\theta}{\cos\theta - \cos\theta_\nu} (-1)^{\nu-1} \frac{\sin\theta_\nu}{n},$$

$$q_{n-1}(\theta; g) = \sum_{\nu=1}^{n-1} g(\vartheta_\nu) \frac{\sin n\theta}{\cos\theta - \cos\vartheta_\nu} (-1)^{\nu-1} \frac{\sin\vartheta_\nu}{n}.$$

По определению, p_{n-1} и q_{n-1} — тригонометрические полиномы степени $\leqslant n-1$.

Докажем несколько простых лемм.

ЛЕММА 1. *Пусть* $g(\theta) = \cos[(2s+1)n + j]\theta$, *s — целое натуральное,* $j = 1, 2, \ldots, 2n-1$. *Тогда*

$$g(\theta) - p_{n-1}(\theta; g) = 2\cos n\theta \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \cos[2(s-k)n + j]\theta.$$

Доказательство. Так как $g(\theta_\nu) = (-1)^{s-1} \cos\theta_\nu (j-n)$, то

$$g(\theta) - p_{n-1}(\theta; g) = g(\theta) + (-1)^s \sum_{\nu=1}^{n} \cos\theta_\nu (j-n) \times$$

$$\times \frac{\cos n\theta}{\cos\theta - \cos\theta_\nu} (-1)^{\nu-1} \frac{\sin\theta_\nu}{n} = g(\theta) + (-1)^s \cos(j-n)\theta.$$

Таким образом,

$$g(\theta)-p_{n-1}(\theta;\ g)=\cos[(2s+1)n+j]\theta+(-1)^s\cos(j-n)\theta=$$

$$=2\cos n\theta\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\cos[2(s-k)n+j]\theta.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Если* $g(\theta)=\cos(2s+1)n\theta$, *то*

$$g(\theta)-p_{n-1}(\theta;\ g)=2\cos n\theta\sum_{k=0}^{s}{}'(-1)^k\cos 2(s-k)n\theta,$$

где штрих обозначает, что слагаемое $(-1)^s\cos 0\theta$ *берется с коэффициентом* $\frac{1}{2}$.

Доказательство. Так как $g(\theta_\nu)=0$, то

$$g(\theta)-p_{n-1}(\theta;\ g)=g(\theta)=\cos(2s+1)n\theta=$$

$$=2\cos n\theta\sum_{k=0}^{s}{}'(-1)^k\cos 2(s-k)n\theta.$$

Лемма доказана.

Аналогично доказываются и следующие две леммы.

ЛЕММА 3. *Пусть* $g(\theta)=\sin[(2s+1)n-j]\theta$, s — *натуральное*, $j=1, 2, \ldots, 2n-1$. *Тогда*

$$g(\theta)-q_{n-1}(\theta;g)=2\sin n\theta\sum_{k=0}^{s}\cos[2(s-k)n+j]\theta.$$

ЛЕММА 4. *Если* $g(\theta)=\sin(2s+1)n\theta$, *то*

$$g(\theta)-q_{n-1}(\theta;\ g)=2\sin n\theta\sum_{k=0}^{s}{}'\cos 2(s-k)n\theta.$$

Пусть теперь

$$g(\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}{}'\beta_k\cos k\theta.$$

Рассмотрим интерполяционный многочлен $p_{n-1}(\theta;\ g)$. В силу лемм 1 и 2, мы найдем:

$$g(\theta)-p_{n-1}(\theta;\ g)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k[\cos k\theta-p_{n-1}(\theta;\ \cos k\theta)]=$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{2n-1}\beta_{(2s+1)n+j}\{\cos[(2s+1)n+j]\theta-$$

$$-p_{n-1}(\theta;\cos[(2s+1)n+j]\theta)\}=$$

$$=2\cos n\theta\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{2n-1}\beta_{(2s+1)n+j}\sum_{k=0}^{s}{}'(-1)^k\cos[2(s-k)n+j]\theta.$$

Меняя порядок суммирования, получим *:

$$g(\theta)-p_{n-1}(\theta;\, g)=2\cos n\theta \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \cos \nu\theta \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \beta_{\nu+(2k+1)n}. \tag{8}$$

Штрих у знака суммы означает, что первое слагаемое берется с коэффициентом $\frac{1}{2}$.

Если взять

$$h(\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^* \sin k\theta$$

и проделать аналогичные вычисления с применением лемм 3 и 4, то получим формулу, подобную формуле (8):

$$h(\theta)-q_{n-1}(\theta;\, g)=2\sin n\theta \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \cos \nu\theta \sum_{k=0}^{\infty}\beta^*_{\nu+(2k+1)n}. \tag{9}$$

Возвратимся к вопросу о нижней грани интеграла. Выше мы имели:

$$\Phi(e^{-i\theta})=\sum_{-n+1}^{n-1}\rho^{|k|}\xi_k e^{+ik\theta}+\sum_{k=n}^{\infty}\rho^k(\alpha_k e^{-ik\theta}+\xi_k e^{ik\theta}).$$

Величины ξ_k $(k=n, n+1, \ldots)$ будем считать действительными. Тогда

$$\sum_{k=n}^{\infty}\rho^k(\alpha_k e^{-ik\theta}+\xi_k e^{ik\theta})=\sum_{k=n}^{\infty}\rho^k(\alpha_k+\xi_k)\cos k\theta-$$

$$-i\sum_{k=n}^{\infty}\rho^k(\alpha_k-\xi_k)\sin k\theta=\sum_{k=n}^{\infty}\beta_k\cos k\theta-i\sum_{k=n}^{\infty}\beta_k^*\sin k\theta.$$

Коэффициенты ξ_k выберем из условий:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\beta_{\nu+(2k+1)n}=\sum_{k=0}^{\infty}\beta^*_{\nu+(2k+1)n}, \quad \nu=0, 1, 2, \ldots,$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\beta_{\nu+2kn}=\sum_{k=0}^{\infty}\beta^*_{\nu+2kn}, \quad \nu=n, n+1, \ldots, \tag{10}$$

Если подставить в эти уравнения вместо величин β_k и β_k^* их выражения через величины $\rho^k\alpha_k$ и $\rho^k\xi_k$, то мы получим, что система (10) равносильна системе:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\rho^{\nu+2kn}(\alpha_{\nu+2kn}+\xi_{\nu+2kn})=\sum_{k=0}^{\infty}\rho^{\nu+2kn}(\alpha_{\nu+2kn}-\xi_{\nu+2kn}),$$

где $\nu=n, n+1, \ldots$. Приведя подобные члены, мы можем эту систему

* Формулы (8) и (9) известны. Их можно найти в работе Б. Надя ([5]).

преобразовать к виду:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho^{\nu+(4k+2)n} \alpha_{\nu+(4k+2)n} = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{\nu+4kn} \xi_{\nu+4kn}, \quad \nu = n, n+1, \ldots .$$

Отсюда видно, что достаточно взять $\rho^{\nu} \xi_{\nu} = \rho^{\nu+2n} \alpha_{\nu+2n}$, чтобы удовлетворить системе (10).

Подставив найденные значения ξ_{ν}, мы получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \beta_{\nu+(2k+1)n} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^{*}_{\nu+(2k+1)n} = \rho^{\nu+n} \alpha_{\nu+n}. \tag{11}$$

Используя формулы (8), (9) и (11) и выбирая соответствующим образом величины ξ_k, $k = -n+1, -n+2, \ldots, n-1$, найдем:

$$\Phi_0(e^{-i\theta}) = 2e^{-in\theta} \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \rho^{\nu+n} \alpha_{\nu+n} \cos \nu\theta.$$

Но, по определению,

$$\alpha_k = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 (1-t)^{r-1} t^{k-2}\, dt, \quad k \geqslant r.$$

Поэтому

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \rho^{\nu+n} \alpha_{\nu+n} \cos \nu\theta = \frac{1}{(r-1)!} \rho^n \int_0^1 (1-t)^{r-1} t^{n-2} \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' (t\rho)^{\nu} \cos \nu\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{\rho^r}{(r-1)!} \int_0^1 (1-t)^{r-1} t^{n-r} \frac{1-t^2\rho^2}{1-2t\rho\cos\theta + t^2\rho^2}\, dt > 0.$$

Следовательно, построенная функция будет удовлетворять условию

$$\operatorname{sgn} \Phi_0(e^{-i\theta}) = e^{-in\theta},$$

т. е. будет экстремальной. Теперь легко найти величину нижней грани интеграла. Для произвольной функции $\Phi(e^{-i\theta})$ имеем:

$$\int_0^{2\pi} |\Phi(e^{-i\theta})|\, d\theta \geqslant \left| \int_0^{2\pi} e^{in\theta} \Phi(e^{-i\theta})\, d\theta \right| = 2\pi\rho^n \alpha_n.$$

Для построенной функции $\Phi_0(e^{-i\theta})$ имеем:

$$\int_0^{2\pi} |\Phi_0(e^{-i\theta})|\, d\theta = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} \Phi_0(e^{-i\theta})\, d\theta = 2\pi\rho^n \alpha_n.$$

Из вышеизложенного следует, что имеет место

ЛЕММА 5 *.

$$\frac{1}{2\pi} \inf_{\xi_k} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=-n+1}^{\infty} \rho^{|k|} \xi_k e^{ik\theta} + \sum_{k=n}^{\infty} \rho^k \alpha_k e^{-ik\theta} \right| d\theta = \rho^n \alpha_n.$$

---

* Из доказательства леммы 5 видно, что утверждение леммы имеет место для произвольной выпуклой последовательности α_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Из леммы 5, в силу произвольности $|\zeta|$, вытекает

ЛЕММА 6. *Если* $f(z) \in B^{(r)}$, $n \geqslant r$, *то*

$$E_n(|z|; f) \leqslant \frac{|z|^n}{n(n-1)\ldots(n-r+1)}. \tag{12}$$

Покажем, что в классе $B^{(r)}$ существует функция, для которой в соотношении (12) реализуется знак равенства.

Пусть

$$f_0(z) = \frac{z^n}{n(n-1)\ldots(n-r+1)}.$$

Тогда $f_0^{(r)}(z) = z^{n-r}$ и $f_0(z) \in B^{(r)}$.

Рассмотрим

$$f_0(z) - P_{n-1}(z) = \frac{|z|^n}{n(n-1)\ldots(n-r+1)}\left[\left(\frac{z}{|z|}\right)^n - Q_{n-1}\left(\frac{z}{|z|}\right)\right] =$$

$$= \frac{|z|^n}{n(n-1)\ldots(n-r+1)}[\zeta^n - Q_{n-1}(\zeta)], \quad |\zeta| = 1.$$

По известной теореме,

$$\max_{|\zeta|=1} |\zeta^n - Q_{n-1}(\zeta)| \geqslant 1,$$

и знак равенства имеет место, если только $Q_{n-1}(\zeta) \equiv 0$. Поэтому

$$E_n(|z|, f_0) = \frac{|z|^n}{n(n-1)\ldots(n-r+1)}. \tag{13}$$

Из леммы 6 и равенства (13) вытекает

ТЕОРЕМА 1. *Если* $f(z) \in B^{(r)}$, *то при* $n \geqslant r$

$$\sup_{f \in B^{(r)}} E_n(|z|; f) = \frac{|z|^n}{n(n-1)\ldots(n-r+1)}.$$

Полагая $|z| = 1$, получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Если* $f(z) \in B^{(r)}$, *то при* $n \geqslant r$

$$\sup_{f \in B^{(r)}} E_n(f) = \frac{1}{n(n-1)\ldots(n-r+1)}.$$

Замечание. Если рассмотреть класс аналитических в круге $|z| < 1$ функций, удовлетворяющих условию

$$|Rf^{(r)}(z)| \leqslant 1, \quad |z| < 1,$$

то из предыдущих результатов легко получится величина наилучшего приближения в рассматриваемом классе. А именно, имеет место следующее соотношение:

$$\sup_f E_n(|z|; f) =$$

$$= \frac{4|z|^n}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s+1)(2s+1)n[(2s+1)n-1]\ldots[(2s+1)n-r+1]}, \qquad n \geqslant r.$$

В заключение автор выражает благодарность С. Б. Стечкину за ценную консультацию.

Поступило
12.XII.1957

ЛИТЕРАТУРА

[1] Колмогоров А. Н., Zur Grossenordnung des Restgliedes Fourierscher Reihen differenzierbarer Funktionen, Ann. of Math., vol. 36 (1935), 521—526.

[2] Favard J., Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynomes trigonométriques, Bull. Sc. Math., LXI (1937), 243—256.

[3] Ахиезер Н. и Крейн М., О наилучшем приближении периодических функций, Доклады Ак. наук СССР, 15, № 2 (1937), 107—112.

[4] Стечкин С. Б., Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 17 (1953), 461—472.

[5] Nagy B., Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, I Periodischen Fall, Berichte der math. phys. Kl. Acad. der Wiss. zu Leipzig, 90 (1938).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 641—666

И. П. ЛАПЧИК

О МНОЖЕСТВЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТОЧЕК РЯДОВ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧЛЕНАМИ

(*Представлено академиком* **П. С. Александровым**)

В работе доказано, что если ряд с комплексными членами сходится при некотором порядке членов, то множество предельных точек частичных сумм этого ряда замкнуто и связно.

Доказано также, что если областью сходимости условно сходящегося ряда с комплексными членами является плоскость и если P — замкнутое множество точек плоскости, то члены условно сходящегося ряда можно переставить так, что у полученного ряда множество предельных точек есть множество P.

Введение

Рассмотрим условно сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \tag{A}$$

с комплексными членами. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} Pz_n \tag{B}$$

получается из ряда (А) в результате перестановки членов этого ряда. Будем говорить, что точка комплексной плоскости, являющаяся аффиксом комплексного числа z, принадлежит области сходимости ряда (А) (или, иначе, области сходимости множества Г, образованного из членов ряда (А)), если либо сумма ряда (А) равна z, либо члены ряда (А) можно переставить так, чтобы сумма полученного ряда была равна z. В 1913 году Штайниц ([1]) доказал, что у условно сходящегося ряда с комплексными членами областью сходимости может быть либо прямая, либо плоскость. Мы будем рассматривать вопрос о том, каким может быть множество предельных точек частичных сумм ряда (В). Ранее этим вопросом занимался Хадвигер ([3]).

Мы докажем, что предельные точки частичных сумм ряда (В) всегда образуют замкнутое связное * множество. При этом если областью схо-

* Замкнутое множество F будем называть связным, если две любые точки A и B множества F либо можно соединить конечной ε-цепью по точкам множества F ($\varepsilon > 0$ произвольно), либо для любых $k > 0$ и $\varepsilon > 0$ точку A (соответственно B) можно соединить конечной ε-цепью с некоторой точкой множества F, лежащей вне круга радиуса k с центром в A (соответственно в B).

димости условно сходящегося ряда (A) является прямая l, то множество предельных точек частичных сумм ряда (B) есть либо точка на прямой l, либо отрезок прямой l (конечный или бесконечный).

Хадвигер доказал, что если область сходимости ряда (A) — прямая l и если на прямой l дано замкнутое связное множество E (т. е. точка или отрезок), то члены ряда (A) можно переставить так, что у ряда, полученного в результате этой перестановки, множество предельных точек есть множество E.

Мы докажем, что если область сходимости ряда (A) — плоскость, то, какое бы замкнутое связное множество F на плоскости мы ни взяли, члены ряда (A) можно переставить так, что у полученного ряда множество предельных точек есть множество F. Хадвигер доказал последнюю теорему лишь для случая, когда множество F выпукло. Но теорема Хадвигера доказана для n-мерного случая. У нас же теорема доказана лишь для двумерного случая. Вопрос о том, верна ли последняя теорема для n-мерного случая, в настоящей работе не рассматривается.

§ 1. Теорема о множестве предельных точек условно сходящегося ряда с комплексными членами

ТЕОРЕМА 1. *Если ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \tag{A}$$

с комплексными членами сходится при некотором порядке членов, то множество F предельных точек частичных сумм ряда (A) *есть замкнутое связное множество* *.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся некоторые определения и две леммы. Возьмем ряд (A). Поместим начало вектора z_1 в начало координат. Начало вектора z_2 поместим в конец вектора z_1, начало вектора z_3 — в конец вектора z_2 и т. д. Мы получим ломаную L, состоящую из счетного числа звеньев. Конечное число следующих друг за другом звеньев ломаной L будем называть отрезком ломаной L.

ЛЕММА 1. *Пусть B и C — две предельные точки ряда* (A), *F — множество всех предельных точек этого ряда, $l_1, l_2, \ldots, l_\nu, \ldots$ — семейство ломаных, в совокупности лежащих в ограниченной части плоскости. Концы*

* А. С. Кронрод доказал теорему: пусть область сходимости условно сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ содержит прямую l, и пусть при некоторой перестановке членов данного ряда получается ряд, имеющий предельную точку вне прямой l. Тогда область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ есть плоскость [см. работу (4)]. Из этой теоремы и из теоремы 1 вытекает следствие: если область сходимости условно сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ — прямая l, то множество предельных точек частичных сумм ряда, полученного из ряда (A) в результате перестановки его членов, есть либо точка на прямой l, либо отрезок прямой l (конечный или бесконечный).

этих ломаных обозначим соответственно через $A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots$ *и* $B_1, B_2, \ldots, B_\nu, \ldots$. *При этом пусть*

$$\rho(B, B_\nu) < \frac{\varepsilon}{2^\nu}, \tag{1}$$

$$\rho(C, C_\nu) < \frac{\varepsilon}{2^\nu}, \tag{2}$$

а звенья ломаной l_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *состоят из отрезка ломаной* L. *Кроме того, пусть номера членов ряда* (A), *вошедших в ломаную* $l_{\nu+1}$, *больше номеров членов ряда* (A), *вошедших в ломаную* l_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *точки* B *и* C *можно соединить конечной* ε*-цепью по точкам множества* F.

Доказательство. Последовательность ломаных $l_1, l_2, \ldots$ есть последовательность континуумов (т. е. замкнутых связных множеств), к которой применима известная теорема теории множеств [см., например, ([2]), стр. 39]. В силу этой теоремы, множество l — верхний предел последовательности континуумов $l_1, l_2, \ldots$, — есть континуум *. Очевидно, что континуум l лежит в ограниченной части плоскости. Предположим, что точка $D \in l$. Докажем, что она является предельной для частичных сумм ряда (A). Для этого покажем, что если $\varepsilon > 0$ произвольно, то в ε-окрестности точки D найдется частичная сумма ряда (A) сколь угодно большого номера.

Возьмем натуральное число N настолько большим, чтобы для всех натуральных $\nu \geqslant N$ каждое звено ломаной l_ν было меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Так как точка $D \in l$, то, по определению верхнего предела последовательности множеств, найдется ломаная l_ν, $\nu > N$, такая, что на ней лежит точка D_1, удовлетворяющая неравенству:

$$\rho(D, D_1) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

В силу выбора N, точка C_1 принадлежит вектору — члену ряда (A), абсолютная величина которого меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому существует такая частичная сумма ряда (A) (пусть на плоскости она изображается точкой D_2), что

$$\rho(D_1, D_2) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Но тогда из неравенств (3) и (4) следует, что

$$\rho(D, D_2) < \rho(D, D_1) + \rho(D_1, D_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Так как N можно взять сколь угодно большим, то номер частичной суммы, изображаемой точкой D_2, может быть также сколь угодно большим. Таким образом доказано, что каждая точка континуума l есть предельная точка для последовательности частичных сумм ряда (A). В силу неравенств (1) и (2), точки B и C принадлежат l, а так как l — континуум, лежащий в ограниченной части плоскости, то для любого $\varepsilon > 0$ точки B и C можно соединить ε-цепью по точкам множества l. Но каж-

* Точка принадлежит верхнему пределу последовательности множеств, если в сколь угодно малой окрестности этой точки содержатся точки бесчисленного числа множеств последовательности [см. ([2])].

дая точка множества l принадлежит множеству F. Следовательно, точки B и C можно соединить ε-цепью по точкам множества F, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 2. *Пусть ряд* (A) *сходится при некотором порядке членов, и пусть частичные суммы этого ряда лежат в ограниченной части плоскости. Обозначим через F множество предельных точек частичных сумм ряда* (A), *а через B и C — две точки множества F. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ точки B и C можно соединить конечной ε-цепью по точкам множества F.*

Доказательство. Обозначим черз N_k точку на плоскости, изображающую частичную сумму $\sum_{n=1}^{n_k} z_n$ ряда (A). Последовательность натуральных чисел n_k для $k = 1, 2, \ldots$ выберем так, чтобы удовлетворялись следующие три условия:

1) $n_{k+1} > n_k$ для $k = 1, 2, \ldots$;

2) n_{2k-1} для $k = 1, 2, \ldots$ таково, что

$$\rho(N_{2k-1}, B) < \frac{\varepsilon}{2^{2k-1}};$$

3) n_{2k} для $k = 1, 2, \ldots$ таково, что

$$\rho(N_{2k}, C) < \frac{\varepsilon}{2^{2k}}.$$

Обозначим через l_k отрезок ломаной L, состоящий из звеньев z_{n_k+1}, $z_{n_k+2}, \ldots, z_{n_{k+1}}$, и рассмотрим последовательность ломаных $l_1, l_2, \ldots$. В силу выбора n_k для $k = 1, 2, \ldots$, последовательность $l_1, l_2, \ldots$ удовлетворяет всем условиям леммы 1. Поэтому, по лемме 1, для любого $\varepsilon > 0$ точки B и C можно соединить конечной ε-цепью по точкам множества F, что и требовалось доказать.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Замкнутость множества F, о котором идет речь в теореме 1, следует из того, что множество предельных точек любой последовательности замкнуто. Докажем, что множество F связно. Пусть B и D — две точки, принадлежащие F. Предположим, что существует такое $\varepsilon > 0$, что точки B и D нельзя соединить конечной ε-цепью по точкам множества F. Тогда из леммы 2 следует, что частичные суммы ряда (A) не лежат в ограниченной части плоскости.

Пусть $k > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$ произвольны. Проведем окружность радиуса $k + \varepsilon_0$ с центром в точке B. Замкнутый круг, ограниченный этой окружностью, обозначим через Г. Так как частичные суммы ряда (A) не лежат в ограниченной части плоскости и так как точка B — предельная для частичных сумм ряда (A), то существует бесконечное число векторов — членов ряда (A), начало которых находится в круге Г, а концы — вне этого круга (векторы — члены ряда (A) — считаем расположенными на плоскости в том порядке, в каком они расположены в ломаной L). Обозначим через N_k точку на плоскости, в которую попала частичная сумма $\sum_{n=1}^{n_k} z_n$ ряда (A). Выберем последовательность натуральных чисел n_k ($k = 1, 2, \ldots$) так, чтобы удовлетворялись следующие условия:

1) $n_{k+1} > n_k$ для $k = 1, 2, \ldots$;

2) все частичные суммы ряда (А), начиная с номера n_{2k-1} и кончая номером n_{2k} для $k=1, 2, \ldots$, лежат в круге Г;

3) n_{2k-1} для $k=1, 2, \ldots$ таково, что

$$\rho(N_{2k-1}, B)<\frac{\varepsilon_0}{2^k};$$

4) n_{2k} для $k=1, 2, \ldots$ таково, что

$$\rho(N_{2k}, \Gamma')<\frac{\varepsilon_0}{2^k},$$

где Γ' — окружность круга Г.

Проведем окружность с центром в точке B радиуса K. Эта окружность и окружность Γ' образуют кольцо. В него попадут все точки последовательности N_{2k}, $k=1, 2, \ldots$, и, значит, в этом кольце должна быть предельная точка последовательности N_{2k}. Обозначим эту предельную точку через C. Ясно, что точка C лежит вне круга K. Через l_k обозначим отрезок ломаной L, состоящий из векторов

$$z_{n_{2k-1}+1}, \; z_{n_{2k-1}+2}, \ldots, z_{n_{2k}}.$$

Рассмотрим последовательность ломаных $l_1, l_2, \ldots$. В силу выбора последовательности $n_1, n_2, \ldots$, некоторая подпоследовательность, выбранная из последовательности $l_1, l_2, \ldots$, удовлетворяет условиям леммы 1. Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ найдется конечная ε-цепь, соединяющая точки B и C по точкам множества F.

Таким образом доказано, что если точки B и D множества F нельзя соединить ε-цепью по точкам множества F, то, какой бы круг с центром в точке B (аналогично, с центром в точке D) мы ни взяли, с помощью конечной ε-цепи из точки B по точкам множества F можно выйти из круга K. То же самое можно сказать о точке D. Отсюда следует связность множества F.

§ 2. Теорема о некоторой перестановке членов ряда, область сходимости которого — плоскость

ТЕОРЕМА 2. *Если область сходимости условно сходящегося ряда*

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k \tag{I}$$

— плоскость и если P — замкнутое связное множество точек плоскости, то члены ряда (I) *можно переставить так, что у полученного ряда множество предельных точек есть множество P.*

Прежде чем перейти к доказательству этой теоремы, введем некоторые определения и докажем несколько лемм*.

Определение. Пусть l — прямая, L и M — точки на ней. Пусть c и d — прямые, параллельные l и лежащие по разные стороны от нее так, что

$$\rho(c, l)=\rho(l, d)=\varepsilon.$$

Пусть L_1 и M_1 — точки на прямой l, расположенные таким образом, что

$$\rho(L, L_1)=\varepsilon, \quad \rho(M, M_1)=\varepsilon,$$

и отрезок LM содержится в отрезке L_1M_1 (см. рис. 1). Через точки L_1

* Ряд определений и теорем, принадлежащих Штайницу, дан в приложении (§ 3).

и M_1 проведем прямые, перпендикулярные l. Отрезки этих прямых вместе с отрезками прямых c и d образуют прямоугольник. Обозначим его через $ABCD$, где точки A и B лежат на прямой, проведенной через точку M_1. Через точку M проведем прямую перпендикулярно l. Пусть R и S — точки пересечения этой прямой с прямыми c и d. Поместим в точку L вектор длины, меньшей ε, с ним сложим еще вектор и т. д. Предположим, что

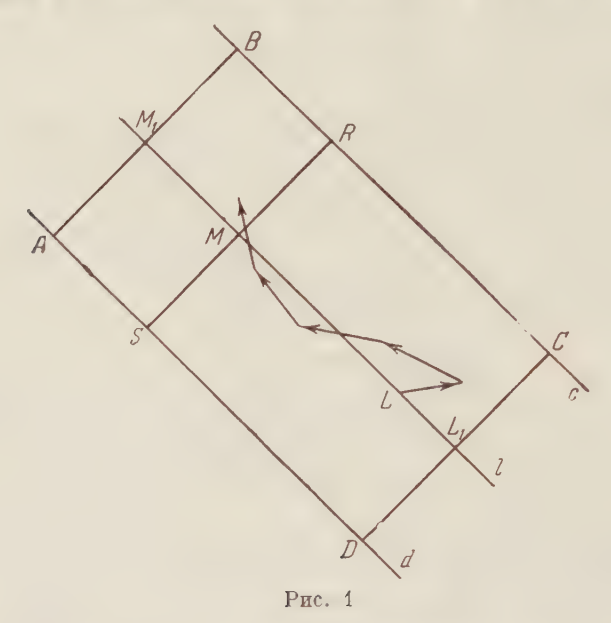


Рис. 1

сложив таким образом конечное число векторов, каждый из которых меньше ε, мы добьемся того, что конец последнего из взятых векторов будет лежать в прямоугольнике с вершинами A, B, R, S. Предположим, далее, что все точки всех взятых векторов лежат в прямоугольнике $ABCD$. Движение вдоль ломаной линии, составленной из построенных векторов, из точки L по направлению к точке M будем называть *движением вдоль отрезка ML с точностью до ε*.

Доказательство теоремы 2 будет основываться на следующей лемме.

ЛЕММА 3. *Если область сходимости ряда* (I) *есть плоскость, то всегда найдутся взаимно перпендикулярные прямые a и b, по любому конечному отрезку которых можно двигаться (в обоих направлениях) с точностью до ε при помощи векторов — членов ряда* (I), *если даже из ряда* (I) *выброшено любое конечное число членов. При этом ε может быть сколь угодно малым положительным числом.*

Для доказательства леммы 3 нам понадобятся еще три леммы.

ЛЕММА 4. *Пусть α — главное* направление ряда* (I) *и a — прямая, параллельная этому направлению. Пусть M и N — две точки на прямой a такие, что направление от точки M к точке N совпадает с направлением α. Тогда с помощью векторов — членов ряда* (I) *можно двигаться***

* См. приложение (§ 3).

** Здесь и в дальнейшем, когда мы говорим: «можно двигаться с помощью векторов — членов ряда», предполагается, что из ряда, быть может, предварительно выброшено любое конечное число членов.

вдоль отрезка MN с точностью до ε, каково бы ни было положительное число ε. При этом все векторы, использованные при движении, образуют острый угол с вектором MN.

Доказательство. Пусть N_1 — точка на прямой a, находящаяся от точки N на расстоянии ε по ту сторону, где нет точки M (см. рис. 2). Проведем прямую c параллельно a так, чтобы она отстояла от прямой a на расстояние ε. Через точку N_1 проведем прямую перпендикулярно

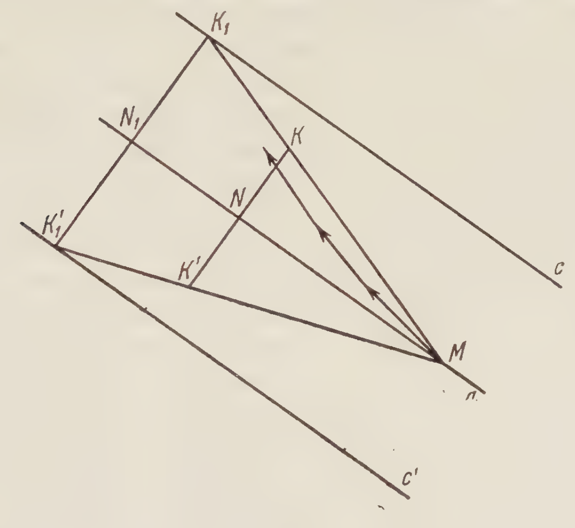


Рис. 2

прямой a. Пусть K_1 — точка пересечения проведенной прямой с прямой c. Соединим прямой точки K_1 и M. Через точку N проведем прямую перпендикулярно прямой a. Пусть K — точка пересечения этой прямой с отрезком K_1M. Аналогичное построение проведем по другую сторону от прямой a, обозначая точки, симметричные точкам K_1 и K относительно прямой a, соответственно через K_1' и K'. Будем называть ряд, составленный из векторов — членов ряда (I), направления которых заключены в угле KMN (соответственно, в угле $K'MN$) рядом (1) [соответственно, рядом (1′)]*. По определению главных направлений, по крайней мере один из рядов (1) и (1′) не сходится абсолютно. Предположим, что не сходится абсолютно ряд (1). Тогда из ряда (1) можно взять столько векторов-членов, что если начало одного из взятых векторов поместить в точку M, а остальные векторы сложить с ним, то последний из взятых векторов пересечет отрезок NK. При этом мы будем брать из ряда (1) только такие векторы, каждый из которых меньше ε. Это возможно, так как члены ряда (1) стремятся к нулю с ростом их номера. Легко видеть, что таким образом мы осуществим движение вдоль отрезка MN с точностью до ε.

ЛЕММА 5. *Пусть направление α — главное направление ряда* (I). *Обозначим через* (F) *ряд, составленный из тех членов ряда* (I), *направления*

---

* Углы предполагаются замкнутыми, т. е. точка на стороне угла принадлежит углу.

которых лежат в угле, образованном направлениями α и β, причем направление β перпендикулярно направлению α. Пусть направление β является направлением расходимости для множества членов ряда (F).*

Возьмем на прямой b, параллельной направлению β, точки R и S так, чтобы направление от точки R к точке S совпадало с направлением β. Пусть положительное число ε произвольно. Тогда при помощи векторов — членов ряда (I) можно двигаться вдоль отрезка RS с точностью до ε.

Доказательство. Пусть положительное число ε произвольно, а c и d — прямые, параллельные прямой b и отстоящие от нее на расстояние ε (см. рис. 3); при этом прямые c и d лежат по разные стороны от прямой b. Возьмем из ряда (F) столько векторов-членов, каждый из которых меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, чтобы сумма проекций этих членов на прямую b была больше, чем $\rho(R, S)$, но меньше, чем $\rho(R, S)+\varepsilon$. Это возможно сделать, так как направление β является направлением расходимости для множества членов ряда (F). Начало одного из взятых таким образом векторов — членов ряда (F) — поместим в точку R, а остальные сложим с ним.

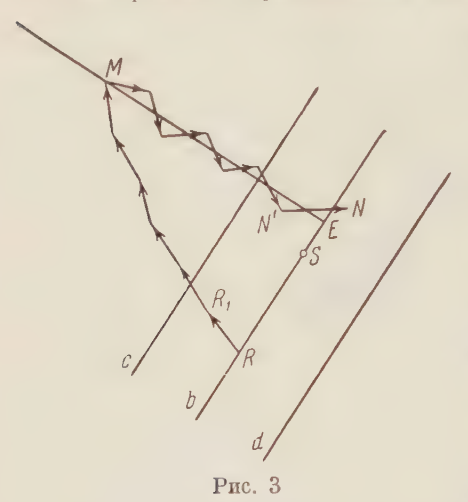


Рис. 3

Обозначим через M конец последнего слагаемого вектора. Векторы, идущие от точки R к точке M, будем называть векторами первого рода. Если точка M лежит на прямой b, то лемма уже доказана, так как направления векторов — членов ряда (F) — лежат в угле, образованном направлениями α и β, и, следовательно, все рассматриваемые векторы должны лежать на прямой b. Если же точка $M \bar{\in} b$, то она лежит по ту сторону от прямой b, куда направлен вектор α. Проведем в этом случае через точку M прямую e перпендикулярно к прямой b до пересечения с прямой b в точке E. Из построения следует, что $\rho(E, S)<\varepsilon$.

Пусть

$$\varepsilon_1=\min[\rho(E, S), \varepsilon-\rho(E, S)].$$

Направление от точки M к точке E по прямой e совпадает с направлением $-\alpha$. С помощью векторов — членов ряда (I) — будем двигаться вдоль отрезка ME с точностью до ε_1. Возможность такого движения вытекает из леммы 4 (§ 2), причем все векторы, использованные при этом движении, образуют острый угол с направлением ME. Конец последнего из взятых векторов обозначим через N. При этом мы предположим, что в нашем движении использовано минимальное число векторов. Тогда начало N' вектора с концом в точке N будет лежать по ту же сторону от прямой b, где лежит точка M. Из построения следует, что проекция точки M на прямую b лежит вне отрезка RS, а точка N лежит или на прямой b,

* См. приложение (§ 3).

или с той же стороны от прямой b, как и направление $-\alpha$. Это следует из определения движения с точностью до ε_1.

Векторы, идущие от точки M к точке N, будем называть векторами второго рода. Число векторов первого и второго рода конечно. Поэтому если первый из взятых векторов оставить на месте, а остальные сложить с ним, поменяв порядок слагаемых, то в результате конец вектора суммы этих векторов попадает снова в точку N. Мы будем менять порядок векторов следующим образом. К первому вектору первого рода (обозначим конец его через R_1), лежащему, по построению, с той же стороны от прямой b, что и точка M, прибавим столько векторов второго рода (векторы прибавляем в порядке их следования от точки M к точке N), чтобы последний из взятых векторов имел общую точку с прямой b, а предыдущие векторы такой точки не имели (принимая во внимание положение точки N, легко видеть, что такой вектор всегда найдется). К полученной сумме, аффикс которой мы обозначим через Q_1, прибавляем столько векторов первого рода (векторы прибавляем в порядке их следования от точки R к точке M), чтобы последний из взятых векторов или

а$_0$) имел общую точку с прямой b, или

б$_0$) имел конец в точке N.

Докажем, что всегда найдется вектор, который удовлетворяет или условию а$_0$), или условию б$_0$).

Предположим, что не выполняется условие а$_0$). Тогда все оставшиеся векторы первого рода, будучи последовательно прибавлены к точке Q_1, образуют ломаную линию, лежащую по ту сторону от прямой b, где нет точки M. Обозначим через A конец этой ломаной линии. Рассмотрим два случая.

Случай 1). В предыдущем построении использованы не все векторы второго рода.

Случай 2) В предыдущем построении использованы все векторы второго рода.

Рассмотрим случай 1). Мы предположили, что утверждение а$_0$) не выполняется. Но тогда, прибавив к вектору с концом в точке A еще не использованные векторы второго рода, мы видим, что начало N' последнего вектора второго рода окажется по ту сторону от прямой b, где лежит точка N, а конец — в точке N. С другой стороны, в силу сказанного выше, точки N и N' не могут лежать по одну сторону от прямой b. Таким образом, мы приходим к противоречию, т. е. случай 1) невозможен.

Рассмотрим случай 2). В этом случае, так как использованы все векторы первого и второго рода, точка A совпадает с точкой N.

Итак, если не выполняется условие а$_0$), то выполняется условие б$_0$). В зависимости от этого конечная точка нашего движения либо совпадает с точкой N, либо находится по ту сторону от прямой b, где нет точки N.

В последнем случае найдется вектор первого рода (обозначим его конец через R_2), имеющий общую точку с прямой b (причем предыдущие векторы первого рода, идущие из точки Q_1, общих точек с прямой b не имеют). Заметим, что векторы первого рода мы складываем в порядке их следования из точки R к точке M. Из точки R_2 при помощи оставшихся векторов второго рода движемся (подобно тому, как двига-

лись из точки R_1) до тех пор, пока последний из взятых векторов не будет иметь общей точки с прямой b (легко видеть, что такое движение возможно). При этом мы предполагаем, что предыдущие векторы второго рода, идущие из точки R_2, не имеют с прямой b общей точки. Конечную точку этого движения обозначим через Q_2.

Из точки Q_2 (если еще не все векторы использованы) при помощи векторов первого рода движемся (подобно тому, как двигались из точки Q_1) до тех пор, пока последний из использованных векторов с концом в точке R_3 либо

а$_0$) не будет иметь общей точки с прямой b, либо

б$_0$) не будет иметь конец в точке N, и т. д., пока не будут использованы все векторы первого и второго рода.

Из построения видно, что при описанном движении из точки R в точку N все взятые векторы будут лежать в полосе между прямыми c и d, а так как сумма проекций на прямую b всех векторов, использованных при движении из точки R в точку N, меньше, чем

$$\rho(R,\ S)+\rho(S,\ E)+\varepsilon_1\leqslant\rho(R,\ S)+\rho(S,\ E)+[\varepsilon-\rho(E,\ S)]=\rho(R,\ S)+\varepsilon,$$

то любая точка проекции любого из взятых векторов на прямую b будет отстоять от какой-нибудь точки отрезка RS не дальше, чем на ε. Принимая во внимание положение точки N, мы видим, что удовлетворяются все условия, входящие в определение движения с точностью до ε (см. определение в начале § 2), т. е. полученное движение есть движение вдоль отрезка RS с точностью до ε. Следовательно, лемма 5 доказана.

ЛЕММА 6. *Для множества* Γ *членов ряда, область сходимости которого есть плоскость, каждое направление на плоскости является направлением расходимости.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть ξ — направление сходимости множества Γ, т. е. множество $\vec{\Gamma}_*\vec{\xi}$* проекций Γ_* на ось ξ ограничено сверху некоторым положительным числом k. Отложим на луче ξ от начала координат отрезок OK длиной k. Через точку K проведем прямую, перпендикулярную лучу ξ. По ту сторону от прямой, куда направлен луч ξ, не могло бы лежать, при нашем предположении, ни одной частичной суммы любого ряда, составленного из множества Γ (так как множество $\vec{\Gamma}_*\vec{\xi}$ ограничено сверху числом k). Поэтому областью сходимости множества Γ не могла бы быть вся плоскость. Но это противоречит условию. Следовательно, предположение, что множество $\vec{\Gamma}_*\vec{\xi}$ ограничено сверху, неверно.

Перейдем теперь к доказательству леммы 3, которая, как мы уже указывали, является основной для доказательства теоремы 2.

Доказательство леммы 3. Из леммы 6 следует, что для ряда (I) все направления на плоскости являются направлениями расходимости, а из теорем (S_1) и (S_2) Штайница (см. § 3, приложение) вытекает, что это возможно лишь тогда, когда

I. среди главных направлений есть пара противоположных α и $-\alpha$,

* См. § 3, приложение.

а направления, перпендикулярные к главным, являются направлениями расходимости;

II. среди главных направлений есть три таких, которые не лежат в угле, меньшем или равном π *.

Покажем, что в обоих указанных случаях найдутся две взаимно перпендикулярные прямые a и b, о которых идет речь в лемме 3.

Случай I. Пусть прямая a параллельна направлению α, а прямая b перпендикулярна прямой a. Так как α и $-\alpha$ — главные направления, то из леммы 4 вытекает возможность движения с точностью до ε с помощью векторов — членов ряда (I) вдоль любого отрезка прямой a в обе стороны. Чтобы показать возможность такого же движения в случае I вдоль отрезков прямой b, разобьем случай I на два:

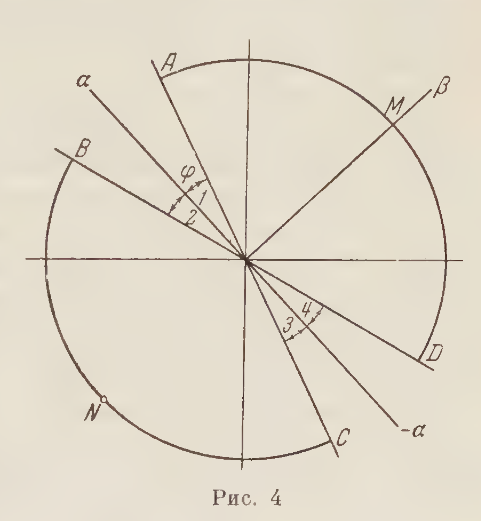


Рис. 4

Iа. Ряд (I), кроме двух противоположных главных направлений, других главных направлений не имеет.

Iб. Ряд (I), кроме двух противоположных главных направлений, имеет еще главные направления.

Рассмотрим случай Iа. Пусть φ — острый угол. Под углом φ к направлению α проведем прямые, проходящие через начало координат. Пусть A, B, C, D — точки пересечения этих прямых с единичной окружностью с центром O в начале координат (см. рис. 4). Рассмотрим систему лучей M, выходящих из начала координат и заключенных в тупых углах AOD и BOC (граничные лучи включаем в нашу систему). Систему лучей будем называть замкнутой, если замкнута система соответствующих направлений **. Ясно, что дуги единичной окружности AMD и BNC представляют собой в точности систему направлений лучей системы M. Так как дуги AMD и BNC — замкнутые множества, то M — замкнутая система лучей. В случае Iа она не содержит ни одного главного направления ряда (I), следовательно, по теореме (S_3) Штайница ***, сумма абсолютных значений всех тех чисел из Γ, соответствующие векторы которых имеют направление одного из лучей системы M, конечна. Так как область сходимости ряда (I) — плоскость, то, по лемме 6, любое направление на плоскости есть направление расходимости ряда (I).

---

* Предположим противное. Пусть для ряда (I) не выполняются ни случай I, ни случай II. Тогда, в силу теорем (S_1) и (S_2) Штайница, существуют направления, которые не являются направлениями расходимости ряда (I), что, в силу леммы 6, невозможно.

** Направлением луча t, выходящего из начала координат, будем называть точку пересечения этого луча с единичной окружностью, центр которой лежит в начале координат.

*** См. приложение (§ 3).

Пусть направление β перпендикулярно направлению α. Множества $\vec{\Gamma}_* \cdot \vec{\beta}$ и $\vec{\Gamma}_* \cdot (-\vec{\beta})$ не ограничены сверху в силу леммы 6. Из теоремы (S_3) Штайница и из того, что множество Γ имеет только два главных направления, следует, что неограниченность сверху множеств $\vec{\Gamma}_* \cdot \vec{\beta}$ и $\vec{\Gamma}_* (-\vec{\beta})$ может получиться лишь за счет тех $\gamma \in \Gamma$, которые лежат в углах AOB и COD (см. рис. 4).

Будем называть острый угол, образованный лучом α и вектором OA, углом 1. Точно так же будем называть, соответственно, углами 2, 3 и 4 углы, образованные лучом α и вектором OB, лучом $-\alpha$ и вектором OC и лучом $-\alpha$ и вектором OD.

Назовем любой ряд, составленный из абсолютных величин тех значений γ множества Γ, которые попали внутрь угла 1, рядом (1). Ряды (2), (3) и (4) определяем аналогично для углов 2, 3 и 4.

Так как из приведенных рассуждений ясно, что множество $\vec{\Gamma}_* \cdot \vec{\beta}$ не ограничено сверху, то либо направление β есть направление расходимости для множества тех членов ряда (1), направления которых расположены в угле 1, либо подобным свойством обладает ряд (4); либо и ряд (1) и ряд (4) обладают этим свойством.

Далее, так как оба множества $\vec{\Gamma}_* \cdot \vec{\beta}$ и $\vec{\Gamma}_* (-\vec{\beta})$ не ограничены сверху, то из приведенных рассуждений ясно, что в случае Iа члены множества Γ в углах 1—4 могут располагаться следующим образом:

Случай 1. В двух рядом лежащих углах, например углах 1 и 2, соответствующие ряды расходятся, в двух других рядом лежащих углах соответствующие ряды сходятся.

Случай 2. В двух вертикальных углах соответствующие ряды расходятся (например, в углах 1 и 3).

Других случаев быть не может. И в случае 1 и в случае 2 из леммы 5 вытекает возможность движения с точностью до ε вдоль любого отрезка прямой b (в любом направлении) с помощью векторов-членов ряда (I).

Рассмотрим случай Iб. Возьмем из главных направлений два противоположных: α и $-\alpha$ и еще одно какое-нибудь третье главное направление. Чтобы доказать лемму 3 для случая Iб, нам нужно показать возможность движения вдоль прямой b в обоих направлениях с точностью до ε. Но возможность такого движения вытекает из леммы 5, так как оба направления β и $-\beta$ являются направлениями расходимости.

Случай II. Возмем три главных направления, не лежащих в угле π. Пусть x, y, z — углы, меньшие π, между взятыми направлениями. Тогда

$$x + y + z = 2\pi.$$

Так как в рассматриваемом случае ни один из углов x, y, z не равен π, то для того чтобы выполнялось равенство

$$x + y + z = 2\pi,$$

необходимо, чтобы по крайней мере два из взятых углов были больше $\frac{\pi}{2}$. Пусть γ — главное направление, к которому прилегают эти два угла, α и β — два других главных направления (см. рис. 5). Пусть прямая a

параллельна направлению γ, а прямая b перпендикулярна прямой a. Тогда возможность движения с точностью до ε вдоль любого отрезка прямой b в обе стороны вытекает из леммы 5. Возможность же движения с точностью до ε вдоль любого отрезка прямой a в направлении γ вытекает из леммы 4.

Остается рассмотреть случай движения с точностью до ε по отрезку прямой a в направлении $-\gamma$. Пусть нужно двигаться от точки M к точке N (направление от M к N совпадает с направлением $-\gamma$). Пусть γ_1 и γ_2 — два произвольных направления. Обозначим меньший из углов, образованных этими направлениями, через $(\gamma_1, \widehat{\ } \gamma_2)$.

Положим

$$\varphi = \min\left[(\beta, \widehat{-} \gamma), (\alpha, \widehat{-} \gamma), \frac{\pi}{2} - (\beta, \widehat{-} \gamma), \frac{\pi}{2} - (\alpha, \widehat{-} \gamma)\right]$$

и рассмотрим острый угол, образованный лучами, выходящими из начала координат по разные стороны от направления α (соответственно β) под углом φ к этому направлению. Обозначим этот угол через A (соответственно через B) (см. рис. 5). В силу определения главных направлений, ряд, составленный из тех членов ряда (I), направления которых находятся в угле A (соответственно в B), не сходится абсолютно. Этот последний ряд мы будем называть рядом (A) (соответственно рядом (B)). Так как ряд (I) сходится условно, то, начиная с некоторого номера, каждый член ряда (A) (соответственно (B)), будет по абсолютной величине меньше ε, где ε — положительное число, которое мы фиксируем в начале доказательства леммы 3. Мы будем брать члены из рядов (A) и (B), начиная с тех номеров, для которых эти члены по абсолютной величине меньше ε, и при этом в следующем порядке. В точку M прямой a помещаем член u_n ряда (B); к нему прибавляем столько идущих подряд членов ряда (A), чтобы последний из взятых векторов пересек прямую a. К полученной сумме прибавляем столько членов ряда (B), чтобы последний из взятых векторов пересек прямую a и т. д. Так как ряды (A) и (B) расходятся, то мы подойдем к точке N так, что проекция последнего взятого вектора на прямую a будет включать точку N. При этом концы всех взятых векторов будут отстоять от прямой a на расстояние, меньшее ε. Следовательно, мы получаем движение от точки M к точке N с точностью до ε. Таким образом, лемма 3 полностью доказана.

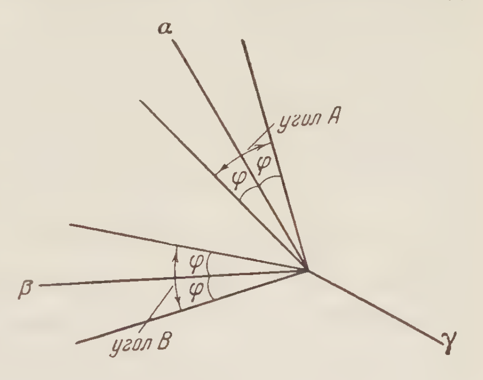


Рис. 5

Для доказательства теоремы 2 понадобятся еще две леммы.

ЛЕММА 7*. *Пусть ABC — ломаная, состоящая из двух звеньев AB и BC. При этом отрезок AB параллелен прямой a, а отрезок BC парал-*

* В лемме 7 предполагается, что область сходимости ряда (I) есть плоскость, а a и b — две взаимно перпендикулярные прямые, которые упоминаются в формулировке леммы 3.

лелен прямой b. Пусть ε *— произвольное положительное число. Тогда при помощи векторов — членов ряда* (I) *из точки A к точке C можно двигаться так, что:*

1) *для точки C найдется вектор ряда* (I), *который является последним из использованных при данном движении и конец которого отстоит от нее меньше, чем на* ε;

2) *любая точка любого вектора, использованного при указанном движении, отстоит от ломаной ABC не более, чем на* ε.

Доказательство. С точностью до $\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}$ будем двигаться вдоль отрезка AB при помощи векторов — членов ряда (I). Это возможно в силу леммы 3. Пусть B_1 — конечная точка этого движения. При таком движении (по его определению) мы не отойдем от отрезка AB дальше, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$. Из точки B_1 проведем прямую параллельно отрезку BC до пересечения в точке C_1 с прямой, проходящей через точку C перпендикулярно отрезку BC. При помощи векторов — членов ряда (I) будем двигаться с точностью до $\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}$ вдоль отрезка B_1C_1. Пусть C_2 — конечная точка этого движения. Так как конец любого вектора, используемого при этом движении, отстоит от отрезка B_1C_1 не дальше, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$, а любая точка отрезка B_1C_1 отстоит от отрезка BC не дальше, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$, то конец любого вектора, используемого при движении из точки B_1 в точку C_2 отстоит от отрезка BC не дальше, чем на ε. Отсюда следует, что при нашем движении из точки A в точку C_2 второе условие леммы 7 выполняется. Докажем, что выполняется и первое условие. В самом деле, при движении вдоль отрезка B_1C_1 с точностью до $\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}$ конечная точка этого движения будет находиться по ту сторону от прямой, проходящей через точку C перпендикулярно отрезку BC, где нет точки B. Поэтому точка C будет ближайшей точкой отрезка BC к точке C_2. Следовательно,

$$\rho(BC, C_2) = \rho(C, C_2).$$

Но так как условие 2) леммы 7, как мы доказали, выполняется, то

$$\rho(C, C_2) < \varepsilon.$$

Итак, лемма 7 доказана.

Движение, которое мы в лемме 7 проделали с помощью векторов, идущих из точки A в точку C_2, будем называть *движением вдоль ломаной ABC с точностью до* ε.

ЛЕММА 8. *Пусть F — пересечение замкнутого связного множества P и квадрата ABCD, отрезок AB параллелен прямой a, отрезок BC параллелен прямой b* *, ε *— произвольное положительное число, R — такая точка на плоскости, что* $\rho(R, F) < \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$. *Тогда при помощи конечного числа членов ряда* (I) *можно двигаться из точки R так, что:*

* Определение прямых a и b дано в формулировке леммы 3. По-прежнему предполагается, что область сходимости ряда (I) есть плоскость.

1) *конечная точка движения отстоит от F на расстояние, меньшее* ε;

2) *любая точка любого вектора, использованного при этом движении, отстоит либо от множества P, либо от сторон квадрата $ABCD$ не дальше, чем на* ε;

3) *для любой точки z из множества F на расстоянии, не превосходящем ε, найдется конец одного из векторов, использованных при этом движении.*

Доказательство. Множество F замкнуто как пересечение двух замкнутых множеств. Кроме того, оно ограничено. Построим вокруг каждой точки множества F круг с центром в этой точке радиуса $\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$. Применим к построенной системе кругов теорему Бореля *. Пусть k_1, $k_2, \ldots, k_n$ — конечная система кругов, принадлежащих к данной системе и покрывающих F; $O_1, O_2, \ldots, O_n$ — соответствующие центры указанных кругов. Рассмотрим круги k_{s-1} и k_s, где $2 \leqslant s \leqslant n$. Так как P — замкнутое связное множество, то точки O_{s-1} и O_s либо можно соединить конечной $\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$-цепью по точкам множества P, либо при помощи конечной $\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$-цепи из точки O_s (соответственно из точки O_{s-1}) по точкам множества P можно приблизиться к стороне квадрата $ABCD$ на расстояние, не превосходящее $\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$. Для каждой точки этой цепи построим круг радиуса $\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$ с центром в этой точке. Совокупность построенных кругов для всех пар O_s и O_{s+1}, где $s = 1, 2, \ldots, n-1$, обозначим через $\{K\}$ **. Система $\{K\}$ включает круги $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Так как каждая из построенных $\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$-цепей конечна, то система кругов $\{K\}$ конечна. При этом из построения видно, что соседние круги каждой из построенных $\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$-цепей пересекаются (так как две соседние точки $\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$-цепей отстоят друг от друга на расстояние, меньшее $\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$).

Пусть a и b — две взаимно перпендикулярные прямые, фигурирующие в формулировке леммы. Опишем вокруг каждого круга системы $\{K\}$ квадрат со сторонами, параллельными прямым a и b. Мы получим конечную систему пересекающихся квадратов, сторона каждого из которых равна $\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}$. Обозначим эту систему квадратов через $\{Q\}$. Квадраты системы $\{Q\}$ покрывают множество F. Пусть q — такой квадрат системы $\{Q\}$, что в нем содержится точка множества F, расстояние которой до точ-

---

* Мы применяем теорему Бореля в следующей формулировке: Пусть F — ограниченное замкнутое множество, и пусть $\{L\}$ — система кругов, покрывающих F в том смысле, что каждая точка из F является внутренней по крайней мере для одного из кругов системы $\{L\}$. При этих условиях существует конечное число кругов $k_1, k_2, \ldots, k_n$ $(n \geqslant 1)$, принадлежащих системе $\{L\}$ и покрывающих F.

** Из построения ясно, что круги системы $\{K\}$ имеют одинаковый радиус.

ки R меньше $\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$ (здесь речь идет о той точке R, которая упоминается в формулировке леммы 8, и для которой $\rho(R, q) < \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$).

Рассмотрим квадрат q' системы $\{Q\}$, который пересекается* с квадратом q. Пусть O — вершина квадрата q, принадлежащая q'. Через точку O проведем прямую параллельно прямой a, затем перпендикулярно к проведенной прямой проведем прямую через точку R. Пусть N — точка пересечения этих прямых (см. рис. 6). По лемме 7, вдоль ломаной RNO можно двигаться с точностью до $\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$. Каждая из точек ломаной RNO удалена от квадрата q не дальше, чем точка R. Но

$$\rho(R, q) < \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}.$$

Отсюда следует, что

при движении вдоль ломаной RNO с точностью до $\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$ мы не отойдем от квадрата q дальше, чем на

$$\left.\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}} + \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}} = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}.\right\} \quad \text{(II)}$$

При этом конечная точка этого движения R_1 будет отстоять от точки O, а следовательно, и от квадрата q', меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$. Всевозможные взаимные расположения квадратов q и q' даны на рис. 6. Точку R_1 будем называть концом обхода квадрата q. Заметим, что после окончания обхода квадрата q для любой точки квадрата q найдется вектор, используемый при этом обходе (точку R считаем началом обхода квадрата q), конец которого отстоит от рассматриваемой точки квадрата q меньше, чем на ε. Таким вектором будет вектор с концом в точке R_1. В самом деле, любая точка квадрата q отстоит от точки O меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$. Но конечная точка обхода квадрата q, т. е. точка R_1, отстоит от точки O меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$. Отсюда следует, что любая точка квадрата q отстоит от точки R_1 меньше, чем на

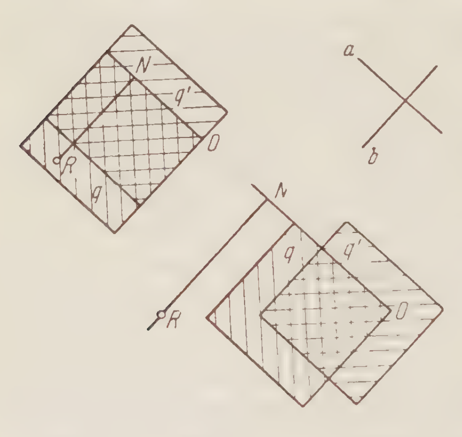


Рис. 6

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}} < \varepsilon.$$

Так как

$$\rho(R_1, q') < \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}},$$

то из точки R_1 мы можем совершать обход квадрата q', двигаясь к лю-

* Квадраты пересекаются, если они имеют общие внутренние точки.

бому из квадратов, пересекающихся с квадратом q', точно таким же образом, как мы двигались, обходя квадрат q, из точки R к квадрату q', т. е. к точке R_1. В дальнейшем, когда мы будем говорить о движении из одного квадрата в другой, мы будем предполагать движение, подобное тому, которое мы совершили, переходя из квадрата q в квадрат q'.

Обозначим через $q_1, q_2, \ldots, q_n$ квадраты системы $\{Q\}$, описанные соответственно вокруг кругов $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Предположим, что для некоторого значения $s = 1, 2, \ldots, n-1$ точки O_s и O_{s+1} можно соединить конечной $\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$-цепью по точкам множества P. Тогда от квадрата q_s $(s = 1, 2, \ldots, n-1)$ к квадрату q_{s+1} можно пройти через конечное число квадратов системы $\{Q\}$. При этом движении мы не будем отходить от стороны квадратов системы $\{Q\}$ дальше, чем на $\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}$ (см. условие (II)).

Так как любая точка стороны квадрата из системы $\{Q\}$ отстоит от точки множества P (например, центра квадрата системы $\{Q\}$) на расстояние, не превосходящее $\frac{\varepsilon}{4}$, т. е. не превосходящее половины диагонали квадрата системы $\{Q\}$, то при указанном движении:

каждая точка векторов, использованных при движении от квадрата q_s к квадрату q_{s+1}, будет отстоять от некоторой точки множества P на расстояние, меньшее $\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}} < \varepsilon$. (III)

Если предложение (III) имеет место для любого $s = 1, 2 \ldots, n-1$, то при указанном движении условие (2) леммы 8 выполняется. Предположим теперь, что при некотором значении s $(1 \leqslant s \leqslant n-1)$ точки O_s и O_{s+1} нельзя соединить конечной $\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$-цепью по точкам множества P. Тогда, как показано в начале доказательства леммы 8, существует конечная $\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$-цепь множества P, соединяющая точку O_s (соответственно O_{s+1}) и некоторую точку M_s (соответственно M_{s+1}) внутри квадрата $ABCD$, отстоящую от сторон квадрата $ABCD$ меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$. (Предположим для определенности, что ближайшая к M_s точка на контуре квадрата $ABCD$ лежит на стороне BC. Тогда $\rho(M_s, BC) < \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$.) При этом, как мы видели, точки этой $\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$-цепи являются центрами кругов из системы $\{K\}$ и, следовательно, служат центрами квадратов системы $\{Q\}$. В частности, точка M_s (соответственно M_{s+1}) будет центром одного из квадратов той же системы. Таким образом, по квадратам системы $\{Q\}$, расположенным вдоль рассматриваемой $\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$-цепи множества P, можно двигаться из квадрата q_s (соответственно q_{s+1}) в квадрат с центром в точке M_s (соответственно M_{s+1}).

При этом обходе каждая точка векторов, использованных при движении, отстоит от некоторой точки множества P на расстояние, меньшее чем $\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}} < \varepsilon$. (IV)

Доказывается это условие так же, как условие (III).

Конечную точку этого движения обозначим через N_s (соответственно N_{s+1}). Пусть Q_s — ближайшая или одна из ближайших к N_s точка квадрата системы $\{Q\}$ с центром в точке M_s. Обозначим через R_s ближайшую к M_s точку контура квадрата $ABCD$. Тогда, в силу сделанного выше предположения, точка R_s лежит на стороне BC. Расстояние от точки N_s до стороны BC (см. рис. 7) меньше длины ломаной $N_sQ_sM_sR_s$, где

$$|M_sR_s| < \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}, \quad |N_sQ_s| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}$$

(см. условие (II)),

$$|Q_sM_s| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

(половина длины диагонали квадрата системы $\{Q\}$ равна $\frac{\varepsilon}{4}$).

Итак,

$$\rho(N_s, BC) < \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4\sqrt{2}} + \frac{\varepsilon}{4}. \tag{V}$$

а) Предположим, что

$$\rho(M_{s+1}, AB + BC + CD) < \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}. \tag{VI}$$

Тогда точки N_s и M_{s+1} соединим ломаной N_sNM_{s+1} (см. рис. 7), состоящей из двух звеньев, параллельных сторонам BC и CD и отстоящих от сторон квадрата $ABCD$ не дальше, чем на расстояние

$$r = \max[\rho(N_s, BC), \rho(M_{s+1}, AB + BC + CD)] \tag{VII}$$

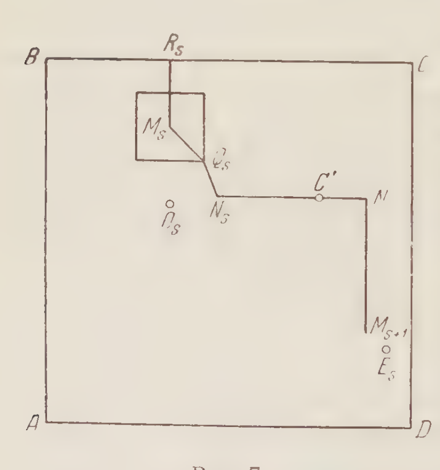


Рис. 7

(ломаная N_sNM_{s+1} может выродиться в отрезок прямой). Будем двигаться с помощью векторов — членов ряда (I) из точки N_s вдоль ломаной N_sNM_{s+1} с точностью до $\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$. Заметим, что при этом движении мы не отойдем от стороны квадрата $ABCD$ дальше, чем на расстояние, равное $r + \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$, а эта последняя величина меньше ε, так как, в силу условия (V),

$$\rho(N_s, BC) < \frac{3\varepsilon}{4\sqrt{2}} + \frac{\varepsilon}{4}$$

и, следовательно, на основании условий (VI) и (VII),

$$r < \frac{3\varepsilon}{4\sqrt{2}} + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Таким образом, при движении вдоль ломаной N_sNM_{s+1} любая точка любого вектора, использованного при этом движении, отстоит от сторон квадрата $ABCD$ не дальше, чем на ε. Заметим, что конечная точка E_s при нашем движении вдоль ломаной N_sNM_{s+1} с точностью до $\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$

будет отстоять от точки M_{s+1} — центра одного из квадратов системы $\{Q\}$ — на расстояние, меньшее $\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$.

b) Предположим теперь, что

$$\rho(M_{s+1}, AB+BC+CD) \geqslant \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}. \qquad \text{(VIII)}$$

Так как точка M_{s+1} отстоит от контура квадрата $ABCD$ меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$, то в этом случае

$$\rho(M_{s+1}, AD) < \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}. \qquad \text{(IX)}$$

Из точки N_s проведем прямую параллельно отрезку BC до пересечения с прямой, на которой лежит отрезок CD. Пусть K есть точка пересечения этих двух прямых.

Из точки M_{s+1} проведем прямую параллельно отрезку BC до пересечения со стороной CD в точке L. Будем двигаться вдоль ломаной N_sKL с точностью до $\frac{\varepsilon}{8\sqrt{2}}$. Пусть L_1 — конечная точка этого движения. Тогда

$$\rho(L, L_1) < \frac{\varepsilon}{8\sqrt{2}}. \qquad \text{(X)}$$

Из точки L_1 проведем прямую параллельно отрезку BC от пересечения в точке M'_{s+1} с прямой, проходящей через точку M_{s+1} параллельно CD. С точностью до $\frac{\varepsilon}{8\sqrt{2}}$ будем двигаться вдоль отрезка $L_1M'_{s+1}$. Так как

$$\rho(M_{s+1}, M'_{s+1}) \leqslant \rho(L, L_1) < \frac{\varepsilon}{8\sqrt{2}},$$

то конечная точка этого движения E_s отстоит от точки M_{s+1} на расстояние, не превосходящее

$$\frac{\varepsilon}{8\sqrt{2}} + \rho(M_{s+1}, M'_{s+1}) \leqslant \frac{\varepsilon}{8\sqrt{2}} + \frac{\varepsilon}{8\sqrt{2}} = \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}.$$

Принимая во внимание условия (V), (IX) и (X), а также учитывая, что движение вдоль ломаной N_sKL и вдоль прямой $L_1M'_{s+1}$ совершалось с точностью до $\frac{\varepsilon}{8\sqrt{2}}$, получим, что

любая точка любого вектора, использованного при движении из точки N_s в точку E_s, отстоит от сторон квадрата $ABCD$ не дальше, чем на

$$\frac{3}{4}\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8\sqrt{2}} + \frac{\varepsilon}{8\sqrt{2}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon. \qquad \text{(XI)}$$

Из точки E_s (как в случае a), так и в случае b)) с помощью векторов — членов ряда (I), меньших $\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$, будем двигаться, совершая обход тех квадратов системы $\{Q\}$, которые расположены вдоль $\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$-цепи, соединяющей точку M_{s+1} и Q_{s+1} до тех пор, пока не закончим обход квадрата q_{s+1}.

При этом обходе каждая точка векторов, использованных при движении, отстоит от некоторой точки множества P на расстояние, меньшее чем $\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}<\varepsilon$. (XII)

Доказывается это условие так же, как условия (III) и (IV).

Заметим, что если для некоторого значения s точки O_s и O_{s+1} $(s=1, 2, \ldots, n-1)$ можно соединить конечной $\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$-цепью по точкам множества P, то от квадрата q_s к квадрату q_{s+1} мы будем двигаться способом, описанным выше (см. стр. 33); если же для данного значения s точки O_s и O_{s+1} нельзя соединить конечной $\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$-цепью, то от квадрата q_s к квадрату q_{s+1} мы будем двигаться только что описанными способами [случаи a) и b)]. Но из этого следует, что, начав движение из точки R (о которой идет речь в формулировке леммы 8), можно обойти квадраты $q_1, q_2, \ldots, q_n$ с помощью векторов — членов ряда (I), меньших $\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$ (переходя от квадрата q_s к квадрату q_{s+1} описанными выше способами). Закончим обход на квадрате q_n и обозначим конечную точку этого обхода через W. При этом, как следует из условий (III), (IV), (XI) и (XII), будет удовлетворяться условие 2) леммы 8. Докажем, что будет удовлетворяться и условие 3) этой леммы. В самом деле, так как любая точка множества F находится в одном из квадратов $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и так как после обхода квадрата q системы $\{Q\}$ любая точка квадрата q отстоит от конечной точки обхода квадрата q меньше, чем на ε (это доказано выше), то условие 3) леммы 8 доказано. Точка W — конечная точка обхода квадрата q_n. Но в квадрате q_n есть точки множества F. Поэтому, как доказано выше,

$$\rho(W, F)<\varepsilon.$$

Следовательно, условие 1) леммы 8 доказано, и доказательство этой леммы завершено.

Обход ограниченного замкнутого множества F, являющегося частью связного множества, который мы применили в этой лемме, будем называть *обходом множества F с точностью до ε с началом обхода в точке R*.

Доказательство теоремы 2. Построим квадрат $A_1B_1C_1D_1$ с центром в начале координат и со сторонами, параллельными прямым a и b *, так, чтобы пересечение этого квадрата со множеством P было непусто. Обозначим это пересечение через P_1. Множество P_1 замкнуто как пересечение двух замкнутых множеств. Построим квадрат $A_2B_2C_2D_2$ с центром в начале координат и со сторонами, параллельными прямым a и b и равными $\rho(A_1, B_1)+1$. Пересечение квадрата $A_2B_2C_2D_2$ со множеством P обозначим через P_2 и т. д. Вообще, квадрат $A_nB_nC_nD_n$ для $n=2, 3, \ldots$ будем строить с центром в начале координат и со сторонами, параллельными прямым a и b, так, что

$$\rho(A_n, B_n)=\rho(A_1, B_1)+(n-1).$$

* Определение прямых a и b дано в формулировке леммы 3.

Пересечение же квадрата $A_nB_nC_nD_n$ со множеством P обозначим через P_n.

Пусть N — точка множества P_1. Из точки N проведем прямую параллельно прямой a до пересечения в точке R с прямой, параллельной прямой b и проходящей через начало координат. По лемме 7, вдоль ломаной ORN можно двигаться с точностью до $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ с помощью конечного числа членов, взятых из ряда (I). Обозначим через N_1 конечную точку движения вдоль ломаной ORN. Сейчас и в дальнейшем, когда мы будем говорить, что «движемся с помощью векторов — членов ряда (I)» или, просто, «движемся», мы будем иметь в виду, что берем каждый член ряда (I) один раз, т. е. если, например, некоторый член ряда (I) мы один раз использовали при движении вдоль ломаной ORN, то при дальнейшем движении из точки N_1 мы уже брать его не будем. При этом на каждом шаге процесса мы будем совершать обходы так, чтобы не пропустить ни одного члена ряда (I).

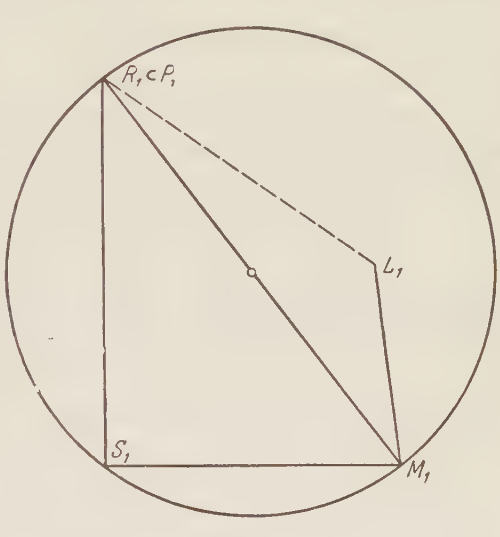


Рис. 8

Построим ряд (I′), который получается из ряда (I) перестановкой его членов. Вектор, выходящий из начала координат, будем считать первым членом ряда (I′); вектор, сложенный с ним, — вторым членом ряда (I′) и т. д. Так как вдоль ломаной ORN мы двигались с точностью до $\frac{1}{4\sqrt{2}}$, то

$$\rho(N, N') < \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

Положив в лемме 8

$$R = N_1, \quad F = P_1,$$

обойдем из точки N_1 множество P_1 с точностью до 1. Пусть точка L_1 — конечная точка этого обхода. Так как обход множества P_1 производился с точностью до 1, то

$$\rho(L_1, P_1) < 1.$$

Пусть R_1 — такая точка, принадлежащая P_1, что

$$\rho(L_1, R_1) < 1$$

(см. рис. 8). К сумме, полученной после обхода множества P_1, прибавим максимальный из членов ряда (I) из числа еще не использованных. Обозначим его через l_1. Точку, в которую попадает конец вектора l_1, обозначим через M_1.

Расстояние любой точки вектора l_1 до точки R_1 меньше $\rho(R_1, L_1) + |l_1| < 1 + |l_1|$. (XIII)

Построим на отрезке R_1M_1 как на гипотенузе прямоугольный треугольник, один из катетов которого параллелен прямой a. Обозначим через S_1 точку пересечения катетов этого треугольника и предположим, что катет M_1S_1 параллелен прямой a (треугольник может выродиться в отрезок R_1M_1; в этом случае положим $S_1=R_1$). Тогда отрезок R_1S_1 будет параллелен прямой b. Опишем вокруг треугольника $R_1M_1S_1$ окружность. Из построения видно, что любая точка ломаной $R_1S_1M_1$ удалена от точки R_1 не дальше, чем на расстояние, равное диаметру R_1M_1 описанного круга, который, как следует из условия (XIII), меньше, чем $1+|l_1|$. Будем двигаться вдоль ломаной $M_1S_1R_1$ с точностью до $\frac{1}{8\sqrt{2}}$. Тогда из предыдущих рассуждений следует, что

расстояние от точки R_1 до любой точки любого вектора, использованного при движении из точки M_1 в точку R_1, меньше, чем

$$|R_1M_1|+\frac{1}{8\sqrt{2}}<|l_1|+1+\frac{1}{8\sqrt{2}}<|l_1|+2 \qquad \text{(XIV)}$$

(справедливость первой части неравенства условия (XIV) вытекает из условия (XIII)). Пусть N_2 — конечная точка этого движения. Тогда

$$\rho(N_2, R_1)<\frac{1}{8\sqrt{2}}.$$

Так как $R_1\in P_1\subset P_2$, то

$$\rho(N_2, P_2)<\frac{1}{8\sqrt{2}}=\frac{1}{2^3\sqrt{2}}. \qquad \text{(XV)}$$

Но тогда из точки N_2, как следует из леммы 8 $\left(\text{в которой берем } \frac{1}{2} \text{ вместо } \varepsilon\right)$, можно делать обход множества P_2 с точностью до $\frac{1}{2}$. Пусть L_2 — конечная точка этого обхода. Предположим, что мы уже определили обход множества P_n с точностью до $\frac{1}{2^{n-1}}$, где n — некоторое натуральное число. Пусть L_n — конечная точка этого обхода. Определим обход множества P_{n+1} с точностью до $\frac{1}{2^n}$, точку L_{n+1} и движение от точки L_n к точке L_{n+1} с помощью векторов — членов ряда (I). Для этого будем поступать следующим образом. Так как обход множества P_n совершался с точностью до $\frac{1}{2^{n-1}}$, то найдется точка $R_n\subset P_n$ такая, что

$$\rho(R_n, L_n)<\frac{1}{2^{n-1}}.$$

В точку L_n помещаем максимальный член ряда (I) из числа еще не использованных. Обозначим его через l_n (см. рис. 8, где индекс 1 при буквах заменен индексом n). Точку, в которую попадет конец вектора l_n, обозначим через M_n. От точки M_n к точке $R_n\in P_n\subset P_{n+1}$ будем двигаться подобно тому, как мы двигались из точки M_1 к точке R_1. Разница будет только в том, что движение будет совершаться с помощью векторов, меньших $\frac{1}{2^{n+2}\sqrt{2}}$, в то время как движение из точки M_1 в точку R_1 совершалось с помощью векторов, меньших $\frac{1}{2^3\sqrt{2}}$.

Пусть N_{n+1} — конечная точка движения от точки M_n к точке R_n. Тогда будут выполняться следующие условия (они получаются так же, как условия (XIV) и (XV)).

Расстояние от точки R_n до любой точки любого вектора, используемого при движении от точки M_n к точке R_n, меньше, чем

$$\left.\begin{aligned} &|R_nM_n| + \frac{1}{2^{n+2}\sqrt{2}} < |l_n| + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n+2}\sqrt{2}} < \\ &\qquad < |l_n| + 2\frac{1}{2^{n-1}} < |l_n| + \frac{1}{2^{n-2}}; \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XVI)}$$

$$\rho(N_{n+1}, P_{n+1}) < \frac{1}{2^{n+2}\sqrt{2}}. \qquad \text{(XVII)}$$

Из точки N_{n+1} начнем обход множества P_{n+1} с точностью до $\frac{1}{2^n}$ Возможность такого обхода следует из леммы 8 и неравенства (XVII Конечную точку обхода обозначим через L_{n+1}. Тогда

при рассмотренном нами движении от точки L_n к точке L_{n+1} мы не отойдем от точек множества P_{n+1} или от сторон квадрата $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ больше, чем на $|l_n| + \frac{1}{2^{n-2}}$ (XVIII)

(см. определение, данное после доказательства леммы 8, в котором полагаем $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$, а также см. условия (XVI), (XVII) и рис. 8, в котором индекс 1 заменен индексом n). Повторяя этот процесс для любого n, мы получим ряд (I′). Покажем, что ряд (I′), построенный указанным образом, есть ряд, образованный в результате перестановки членов ряда (I). В самом деле, по построению, каждый член ряда (I) входит в ряд (I′) не более одного раза. Покажем, что если член z_n содержится в ряде (I), то он войдет и в ряд (I′). Так как ряд (I) условно сходится, то в нем существует конечное число членов, по модулю больших или равных $|z_n|$. Пусть число таких членов равно k. Тогда из выбора членов l_n ряда (I′) следует, что член z_n будет использован в ряде (I′) до обхода множества P_{k+2}. Следовательно, доказано, что ряд (I′) получается из ряда (I) перестановкой членов.

Докажем, что если точка $z \in P$, то она является предельной точкой для частичных сумм ряда (I′). Для этого возьмем такое натуральное число T_1, чтобы точка z принадлежала квадрату $A_{T_1}B_{T_1}C_{T_1}D_{T_1}$, а следовательно, и множеству P_{T_1}. Тогда при обходе множества P_{T_1} с точностью до $\frac{1}{2^{T_1-1}}$ найдется такая частичная сумма $z^{(T_1)}$ ряда (I′), что

$$|z - z^{(T_1)}| < \frac{1}{2^{T_1-1}}.$$

Так как $P_{T_1} \subset P_{T_1+1} \subset P_{T_1+2} \subset \ldots$, то при обходе множества P_n для $n > T_1$ с точностью до $\frac{1}{2^{n-1}}$ найдется такая частичная сумма $z^{(n)}$ ряда (I′), что

$$|z - z^{(n)}| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Пусть $\eta > 0$ произвольно. Докажем, что в η-окрестности точки z найдется частичная сумма ряда (I') сколь угодно большого номера, например больше T. Возьмем

$$T_2 > \max(T_1, T)$$

настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{2^{T_2-1}} < \eta.$$

Тогда при обходе множества P_{T_2} с точностью до $\frac{1}{2^{T_2-1}}$ найдется частичная сумма $z^{(T_2)}$ ряда (I') такая, что

$$|z - z^{(T_2)}| < \frac{1}{2^{T_2-1}} < \eta,$$

что и требовалось доказать. Следовательно, точка z будет предельной для частичных сумм ряда (I'). Докажем теперь, что если точка $z \overline{\in} P$, то она не является предельной для частичных сумм ряда (I'). Для этого установим сначала, что если точка z не принадлежит замкнутому множеству P, то $\rho(z, P) > 0$. В самом деле, предположим противное, т. е. что $\rho(z, P) = 0$. Тогда в любом круге с центром в точке z нашлась бы точка множества P. Но тогда точка z была бы предельной для множества P, а так как множество P замкнуто, то точка z принадлежала бы множеству P, что невозможно. Следовательно,

$$\rho(z, P) = \sigma > 0.$$

Из построения ряда (I') следует, во-первых, что $|l_n| \geqslant |l_{n+1}|$, и, во-вторых, что обход множества P_n совершается при помощи векторов, меньших $\frac{1}{2^{n-1}}$, а обход множества P_{n+1} совершается при помощи векторов, меньших $\frac{1}{2^n}$. В силу условия (XVIII), отсюда следует, что после обхода множества P_n с точностью до $\frac{1}{2^{n-1}}$, все дальнейшие частичные суммы ряда (I') либо не отойдут от множества P дальше, чем на расстояние, равное $|l_n| + \frac{1}{2^{n-2}}$, либо не будут отходить от контура квадрата $A_kB_kC_kD_k\,(k \geqslant n)$ на расстояние, большее, чем $\frac{1}{2^{k-1}}$.

Возмем произвольную точку $z \overline{\in} P$, и пусть

$$\rho(z, P) = \sigma > 0.$$

Возьмем, далее, натуральное число ν_1 настолько большим, чтобы

для всех $n \geqslant \nu_1$ *выполнялось неравенство* $|l_n| < \frac{\sigma}{4}$. (XIX)

Это возможно, так как ряд (I) условно сходится и, следовательно, в нем существует только конечное число членов, по модулю больших или равных $\frac{\sigma}{4}$. Возьмем натуральное число ν_2 настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{2^{\nu_2-2}} < \frac{\sigma}{4}. \tag{XX}$$

Пусть натуральное число ν_3 настолько велико, что точка z принадлежит квадрату $A_{\nu_3}B_{\nu_3}C_{\nu_3}D_{\nu_3}$ и отстоит от его контура на расстояние, большее чем $\frac{\sigma}{2}$. Положим $\nu = \max(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$. Если $k > \nu$, то, на основании условия (XVIII), при движении от точки L_k к точке L_{k+1} при помощи векторов — членов ряда (I′) мы не отойдем либо от точек множества P, либо от контура квадрата $A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}D_{k+1}$ на расстояние, большее чем $|l_k| + \frac{1}{2^{k-2}}$. Но если

$$k > \nu, \text{ то } k > \nu_1 \text{ и } k > \nu_2.$$

В этом случае, в силу условий (XIX) и (XX), для $k > \nu$ будем иметь:

$$|l_k| + \frac{1}{2^{k-2}} < \frac{1}{2}\sigma.$$

Поэтому если $k > \nu$, то при движении от точки L_k к точке L_{k+1} при помощи векторов — членов ряда (I′) мы не будем отходить либо от точек множества P, либо от сторон квадрата $A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}D_{k+1}$ на расстояние, большее чем $\frac{\sigma}{2}$. Так как $k > \nu_3$, если $k > \nu$, то отсюда, в силу сказанного выше, следует, что все частичные суммы ряда (I′), начиная от частичной суммы с аффиксом $L_{\nu+1}$, будут отстоять от точки z дальше, чем на расстояние $\frac{\sigma}{2}$. Следовательно, в круг с центром в точке z радиуса $\frac{\sigma}{2}$ может попасть лишь конечное число частичных сумм ряда (I′), а тогда рассматриваемая нами точка z не является предельной для ряда (I′). Таким образом, теорема 2 доказана.

§ 3. Приложение

Некоторые определения и теоремы Штайница. Если α и β — комплексные числа, то скалярное произведение векторов, изображающих эти числа, обозначим через $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$. Пусть Γ — счетное множество комплексных чисел. Обозначим через Γ_* множество всевозможных конечных сумм, составленных из членов множества Γ.

Будем говорить, что комплексное *число* ξ *определяет направление* ξ, если $|\xi| = 1$. Если для некоторого числа ξ, определяющего направление, множество $\vec{\Gamma}_* \cdot \vec{\xi}$ не ограничено сверху, то направление ξ называется *направлением расходимости* множества Γ; если же $\vec{\Gamma}_* \cdot \vec{\xi}$ ограничено сверху, то направление ξ называется *направлением сходимости* множества Γ.

Возьмем какое-нибудь направление α. Той же буквой α будем обозначать величину угла, образованного направлением α и положительным направлением оси x. Пусть φ — действительное число такое, что $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Обозначим через $f(\alpha, \varphi)$ сумму абсолютных величин тех значений γ из множества Γ, для которых направления соответствующих векторов попали внутрь угла, заключенного между лучами, имеющими направления $\alpha - \varphi$ и $\alpha + \varphi$ (берем тот угол, внутри которого лежит направление α). Обозначим через $g(\alpha)$ верхнюю грань тех значений φ из отрезка $[0, \pi]$, для которых функция $f(\alpha, \varphi)$ конечна. Те направле-

ния α, для которых $g(\alpha) = 0$, Штайниц называет главными направлениями Γ. Если α — главное направление, а угол φ сколь угодно мал, то сумма абсолютных величин тех значений $\gamma \in \Gamma$, направления которых попали в угол раствора 2φ с биссектрисой α, бесконечна.

Штайницу принадлежат следующие теоремы.

ТЕОРЕМА S_1. *$g(\alpha)$ равно наименьшему из углов, которые направление α образует с главными направлениями.*

ТЕОРЕМА S_2. *Если $g(\alpha) < \frac{\pi}{2}$, то α является направлением расходимости, если же $g(\alpha) > \frac{\pi}{2}$, то α — направление сходимости.*

ТЕОРЕМА S_3. *Если замкнутая система лучей M, выходящих из начала координат, не содержит ни одного главного направления числового множества Γ, то сумма абсолютных значений всех тех чисел из Γ, соответствующие векторы которых имеют направление одного из лучей системы M, конечна.*

Поступило
28 .II. 1957

ЛИТЕРАТУРА

[1] Steinitz E., Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme, J. f. die reine und angew. Math., 143 (1913), 128—175; B. 144 (1914), 1—40.

[2] Korrekjarto B., Vorlesungen über Topologie, Berlin, 1923.

[3] Hadwiger H., Ein Satz über bedingt konvergente Vektorreihen, Math. Zeitschr., 47, Heft 4 (1942), 663—668.

[4] Кронрод А. С., О перестановках членов числовых рядов, Математ. сборн., 18 (60) : 2 (1946), 237—280.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 667—704

О. А. ОЛЕЙНИК, А. С. КАЛАШНИКОВ, ЧЖОУ ЮЙ-ЛИНЬ

ЗАДАЧА КОШИ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

(*Представлено академиком* **С. Л. Соболевым**)

В работе получены решения задачи Коши и основных краевых задач в ограниченных и неограниченных областях для уравнений типа одномерной нестационарной фильтрации; исследованы качественные свойства этих решений.

Введение

В настоящей работе рассматриваются задача Коши, первая и вторая краевые задачи для уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi(t, x, u)}{\partial x^2}, \tag{1}$$

где функция $\varphi(t, x, u)$ определена для значений $u \geqslant 0$, причем $\varphi(t, x, u) > 0$ и $\varphi'_u(t, x, u) > 0$, если $u > 0$; $\varphi(t, x, 0) \equiv \varphi'_u(t, x, 0) \equiv 0$.

В том частном случае, когда функция φ зависит только от u, уравнение (1) является уравнением одномерной нестационарной фильтрации [см. ([1])]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Порядок нелинейного уравнения (1) зависит от значений искомой функции $u(t, x)$: при $u > 0$ это — параболическое уравнение второго порядка, при $u = 0$ оно вырождается в уравнение первого порядка.

Если начальные и граничные условия таковы, что уравнение (1) не вырождается, то задача Коши, первая и вторая краевые задачи для уравнения (1) однозначно разрешимы при некоторых дополнительных предположениях о функции $\varphi(t, x, u)$, а также о начальных и граничных функциях. Это следует из результатов, которые установлены в работах ([2]), ([3]) и ([11]) для квазилинейных уравнений параболического типа. Действительно, при отсутствии вырождения уравнение (1) является квазилинейным параболическим уравнением относительно функции $v = \varphi(t, x, u)$.

В случае, когда заданные начальные и граничные условия влекут за собой вырождение уравнения (1), указанные результаты неприменимы. Для вырождающегося уравнения фильтрации (2) построены [см. ([4]) — ([7])] так называемые автомодельные решения и некоторые другие классы частных решений. Многие из них не имеют всюду предписы-

ваемой уравнением гладкости и потому фактически являются решениями только в некотором обобщенном смысле. Например, в качестве решения допускается функция $u(t, x)$, у которой первые производные по t и по x могут терпеть разрывы, однако производная $\frac{\partial\varphi(u(t, x))}{\partial x}$ непрерывна. Такой подход продиктован физическим смыслом рассматриваемых задач и входящих в них величин.

В работах ([5]), ([6]) была отмечена интересная особенность уравнений вида (2) — конечная скорость распространения возмущений в процессах, описываемых такими уравнениями. Как известно, уравнениям параболического типа соответствует бесконечная скорость распространения возмущений.

В настоящей работе для каждой из рассматриваемых здесь задач вводится определение обобщенного решения и доказываются его единственность и существование; затем устанавливается, что во всех точках, где уравнение (1) не вырождается, обобщенное решение имеет непрерывные производные, входящие в это уравнение, и удовлетворяет ему в обычном смысле.

В § 4 выводятся некоторые свойства обобщенных решений уравнения (1); предложения, аналогичные некоторым теоремам § 4, имеются в работе ([8]).

Излагаемые здесь результаты частично содержатся в работах ([9]), ([10]), а также в гл. 3 работы ([11]).

§ 1. Задача Коши

Рассмотрим для уравнения (1) в полосе $G\{0 \leqslant t \leqslant T, -\infty < x < \infty\}$ задачу Коши с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{1.1}$$

Определение 1. Функцию $u(t, x)$, неотрицательную, непрерывную и ограниченную в полосе G, назовем обобщенным решением задачи Коши (1), (1.1), если существует обобщенная производная $\frac{\partial\varphi(t, x, u(t,x))}{\partial x}$, ограниченная в G, и для любой непрерывно дифференцируемой в G функции $f(t, x)$, равной нулю вне конечной области и при $t = T$, выполняется равенство:

$$\iint\limits_G \left[\frac{\partial f}{\partial t}u - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi(t, x, u)}{\partial x}\right]dt\,dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(0, x)\,u_0(x)\,dx = 0. \tag{1.2}$$

ТЕОРЕМА 1. *Обобщенное решение задачи* (1), (1.1) *единственно, если функция* $\varphi(t, x, u)$ *непрерывна по всем аргументам, а* $\varphi'_u(t, x, u)$ *ограничена при* $(t, x) \in G$ *и ограниченных* u.

Доказательство. Заметим, что равенство (1.2) сохраняет силу для функции $f(t, x)$, которая равна нулю вне конечной области и при $t = T$, непрерывна в G и имеет в G ограниченные обобщенные производные $\frac{\partial f}{\partial t}$ и $\frac{\partial f}{\partial x}$ [см. ([12]), стр. 39—48]. Действительно, по определению обобщенного решения, равенство (1.2) справедливо для средних функ-

ций f_h функции f. Вследствие известных свойств средних функций [см. ([12]), стр. 19—20, 41—42], при $h \to 0$ последовательность $\{f_h\}$ равномерно сходится к f, а последовательности $\left\{\frac{\partial f_h}{\partial t}\right\}$ и $\left\{\frac{\partial f_h}{\partial x}\right\}$ сходятся в среднем соответственно к $\frac{\partial f}{\partial t}$ и $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Напишем равенство (1.2) для f_h и перейдем в нем к пределу при $h \to 0$; мы получим, что (1.2) выполняется и для f.

Предположим, что задача (1), (1.1) имеет два различных обобщенных решения $u_1(t, x)$ и $u_2(t, x)$. Вычитая равенство (1.2) для u_2 из равенства (1.2) для u_1, получим:

$$\iint_G \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}(u_1 - u_2) - \frac{\partial f}{\partial x}\left[\frac{\partial \varphi(t, x, u_1)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi(t, x, u_2)}{\partial x}\right]\right\} dt\, dx = 0. \tag{1.3}$$

Рассмотрим семейство функций $\{\alpha_n(x)\}$ со следующими свойствами: $\alpha_n(x) = 1$ при $|x| \leqslant n-1$; $\alpha_n(x) = 0$ при $|x| \geqslant n$; $0 \leqslant \alpha_n(x) \leqslant 1$ при $n-1 \leqslant |x| \leqslant n$; $\alpha_n'(x)$ ограничены равномерно относительно n. С помощью $\alpha_n(x)$ построим последовательность функций $f_n(t, x)$:

$$f_n(t, x) = \alpha_n(x) \int_T^t [\varphi(\tau, x, u_1(\tau, x)) - \varphi(\tau, x, u_2(\tau, x))]\, d\tau, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Очевидно, что все f_n непрерывны в G, имеют в G ограниченные обобщенные производные $\frac{\partial f_n}{\partial t}$, $\frac{\partial f_n}{\partial x}$ и обращаются в нуль вне конечной области и при $t = T$. Поэтому для f_n выполняется равенство (1.2), а следовательно, и равенство (1.3). Подставим f_n в (1.3):

$$\iint_G \alpha_n(x)[\varphi(t, x, u_1) - \varphi(t, x, u_2)](u_1 - u_2)\, dt\, dx -$$
$$- \iint_G \alpha_n(x) \left\{ \int_T^t \left[\frac{\partial \varphi(\tau, x, u_1)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi(\tau, x, u_2)}{\partial x}\right] d\tau \right\} \left[\frac{\partial \varphi(t, x, u_1)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi(t, x, u_2)}{\partial x}\right] dt\, dx -$$
$$- \iint_{Q_n} \alpha_n'(x) \left\{ \int_T^t [\varphi(\tau, x, u_1) - \varphi(\tau, x, u_2)]\, d\tau \right\} \left[\frac{\partial \varphi(t, x, u_1)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi(t, x, u_2)}{\partial x}\right] dt\, dx = 0. \tag{1.4}$$

Здесь Q_n — совокупность двух прямоугольников:

$$\{0 \leqslant t \leqslant T,\ n-1 \leqslant x \leqslant n\} \text{ и } \{0 \leqslant t \leqslant T,\ -n \leqslant x \leqslant -n+1\}.$$

Обозначим интегралы в левой части равенства (1.4) через I_{1n}, I_{2n} и I_{3n} (в порядке их написания). Преобразуем I_{2n} следующим образом:

$$I_{2n} = -\frac{1}{2} \iint_G \alpha_n(x) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_T^t \left[\frac{\partial \varphi(\tau, x, u_1)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi(\tau, x, u_2)}{\partial x}\right] d\tau \right\}^2 dt\, dx =$$
$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_n(x) \left\{ \int_T^0 \left[\frac{\partial \varphi(\tau, x, u_1)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi(\tau, x, u_2)}{\partial x}\right] d\tau \right\}^2 dx.$$

Равенство (1.4) примет вид:

$$\iint_G \alpha_n(x)[\varphi(t, x, u_1) - \varphi(t, x, u_2)](u_1 - u_2)\,dt\,dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \alpha_n(x)\left\{\int_T^0 \left[\frac{\partial\varphi(\tau, x, u_1)}{\partial x} - \frac{\partial\varphi(\tau, x, u_2)}{\partial x}\right] d\tau\right\}^2 dx =$$

$$= \iint_{Q_n} \alpha_n'(x)\left\{\int_T^t [\varphi(\tau, x, u_1) - \varphi(\tau, x, u_2)]\,d\tau\right\}\left[\frac{\partial\varphi(t, x, u_1)}{\partial x} - \frac{\partial\varphi(t, x, u_2)}{\partial x}\right] dt\,dx. \tag{1.5}$$

Каждое из двух слагаемых в левой части (1.5), будучи интегралом от неотрицательной функции, неотрицательно и не убывает с ростом n ввиду свойств $\alpha_n(x)$. Выражение, стоящее в правой части (1.5), очевидно, ограничено равномерно по n; поэтому оба интеграла в левой части также ограничены независимо от n. Следовательно, при $n \to \infty$ оба они стремятся к некоторым конечным пределам. Отсюда вытекает, что функция

$$\psi(t, x) = [\varphi(t, x, u_1) - \varphi(t, x, u_2)](u_1 - u_2)$$

суммируема в полосе G.

Покажем, что интеграл I_{3n}, стоящий в правой части (1.5), стремится к нулю при $n \to \infty$. Пусть A, B и C — такие числа, что:

$$|\alpha_n'(x)| \leqslant A \quad (n = 1, 2, \ldots), \qquad \left|\frac{\partial\varphi(t, x, u_i)}{\partial x}\right| \leqslant B \quad (i = 1, 2),$$

$$\varphi_u'(t, x, u) \leqslant C \quad \text{при } 0 \leqslant u \leqslant \sup_G\{u_1(t, x), u_2(t, x)\}.$$

Применяя неравенство Коши—Буняковского, находим:

$$|I_{3n}| \leqslant 2ABT\iint_{Q_n} |\varphi(t, x, u_1) - \varphi(t, x, u_2)|\,dt\,dx \leqslant$$

$$\leqslant 4ABT^{\frac{3}{2}}\left\{\iint_{Q_n}[\varphi(t, x, u_1) - \varphi(t, x, u_2)]^2\,dt\,dx\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 4ABT^{\frac{3}{2}}\left\{\iint_{Q_n}[\varphi(t, x, u_1) - \varphi(t, x, u_2)](u_1 - u_2)\varphi_u'(t, x, \bar{u})\,dt\,dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant 4ABC^{\frac{1}{2}}T^{\frac{3}{2}}\left\{\iint_{Q_n}\psi(t, x)\,dt\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь $\bar{u}$ — промежуточное значение между u_1 и u_2. Так как функция $\psi(t, x)$ суммируема в G, то последний интеграл стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} I_{3n} = 0.$$

Таким образом, каждый из интегралов в левой части (1.5) при $n \to \infty$ должен стремиться к нулю. Для первого из них это означает, что

$$\iint_G \varphi_u'(t, x, \bar{u})(u_1 - u_2)^2\,dt\,dx = 0. \tag{1.6}$$

Так как $\varphi'_u(t, x, u) > 0$ при $u > 0$, то равенство (1.6) возможно, лишь если $u_1(t, x) \equiv u_2(t, x)$. Этим доказана единственность обобщенного решения задачи Коши.

Докажем существование обобщенного решения задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi(x, u)}{\partial x^2}, \tag{1.7}$$

где $\varphi(x, u) > 0$, $\varphi'_u(x, u) > 0$ при $u > 0$, $\varphi(x, 0) \equiv \varphi'_u(x, 0) \equiv 0$.

Предварительно рассмотрим в прямоугольнике $Q\{0 \leqslant t \leqslant T, X_1 \leqslant x \leqslant X_2\}$ уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = A(x, v)\frac{\partial v}{\partial t} \tag{1.8}$$

при условиях

$$v(0, x) = v_0(x), \quad v(t, X_1) = v_1(t), \quad v(t, X_2) = v_2(t) \tag{1.9}$$

и докажем несколько вспомогательных предложений.

ЛЕММА 1. *Пусть выполняются следующие предположения:*

1) *Функция $v_0(x)$ имеет на отрезке $[X_1, X_2]$ третью производную, удовлетворяющую условию Липшица; функции $v_1(t)$ и $v_2(t)$ имеют на отрезке $[0, T]$ вторые производные, удовлетворяющие условию Липшица.*

2) $0 < m \leqslant v_i \leqslant M$, $\quad i = 0, 1, 2$.

3) *$A(x, v) \geqslant a_p > 0$ при $X_1 \leqslant x \leqslant X_2$, $v \geqslant p > 0$ (каково бы ни было $p > 0$).*

4) *В замкнутой области $\{X_1 \leqslant x \leqslant X_2, m \leqslant v \leqslant M\}$ функция $A(x, v)$ имеет непрерывные производные четвертого порядка, удовлетворяющие условию Липшица по x и v.*

5) $v_0(X_1) = v_1(0), \quad v_0(X_2) = v_2(0),$

$$\frac{d^2 v_0(X_1)}{dx^2} = A(X_1, v_1(0))\frac{dv_1(0)}{dt}, \qquad \frac{d^2 v_0(X_2)}{dx^2} = A(X_2, v_2(0))\frac{dv_2(0)}{dt}.$$

Тогда в прямоугольнике Q существует решение $v(t, x)$ уравнения (1.8), удовлетворяющее условиям (1.9) и непрерывное в Q вместе с производными $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$. Внутри Q существуют и непрерывны все производные $v(t, x)$, которые входят в уравнения, получающиеся дифференцированием обеих частей (1.8) четыре раза по x, а также один раз по t. Кроме того, всюду в Q выполняются неравенства:

$$m \leqslant v(t, x) \leqslant M. \tag{1.10}$$

Доказательство. Построим функцию $A_1(x, v)$ со следующими свойствами: $A_1(x, v) = A(x, v)$ при $X_1 \leqslant x \leqslant X_2$, $v \geqslant m$; при $X_1 \leqslant x \leqslant X_2$, $v \leqslant m$ выполняется неравенство $A_1(x, v) \geqslant a_{\frac{m}{2}}$; функция $A_1(x, v)$ имеет непрерывные производные четвертого порядка, удовлетворяющие условию Липшица по x и v.

Так как $A_1(x, v) \geqslant a_{\frac{m}{2}} > 0$ при $X_1 \leqslant x \leqslant X_2$ и $|v| \leqslant M$, то по теореме 1 работы ([2]) в прямоугольнике Q существует единственное решение $v(t, x)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = A_1(x, v)\frac{\partial v}{\partial t}, \tag{1.11}$$

удовлетворяющее условиям (1.9).

Покажем, что для v выполняются неравенства (1.10). Положим

$$v = we^{\alpha t}, \quad \alpha > 0.$$

Функция $w(t, x)$ удовлетворяет в Q уравнению:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = A_1(x, we^{\alpha t})\left(\frac{\partial w}{\partial t} + \alpha w\right). \tag{1.12}$$

В силу условий теоремы, $w \leqslant M$ на границе Γ $(t = 0,\ x = X_1,\ x = X_2)$ прямоугольника Q; в силу уравнения (1.12), функция w не может достигать положительного максимума нигде в $Q \setminus \Gamma$. Следовательно, $w \leqslant M$ всюду в Q, откуда $v \leqslant Me^{\alpha T}$. Ввиду произвольности α, получаем: $v(t, x) \leqslant M$ всюду в Q.

Полагая $v = m + ze^{\beta t}$, $\beta > 0$, и рассуждая аналогичным образом, легко показать, что $v(t, x) \geqslant m$ всюду в Q.

Так как $A_1(x, v) = A(x, v)$ при $v \geqslant m$, то функция $v(t, x)$ удовлетворяет в прямоугольнике Q не только уравнению (1.11), но и уравнению (1.8).

Докажем, что при наших предположениях уравнение (1.8) можно дифференцировать по x внутри Q. Рассмотрим внутри Q уравнение:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = A(x, v(t, x))\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{A(x, v(t, x))}\frac{DA(x, v(t, x))}{Dx}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{1.13}$$

при условии:

$$p(t, x) \;\; p(t, x)|_{\Gamma} = \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{\Gamma}. \tag{1.14}$$

Здесь $v(t, x)$ — построенное нами решение уравнения (1.8), удовлетворяющее условиям (1.9); символ $\frac{D}{Dx}$ означает полное дифференцирование по x.

Из доказательства теоремы 1 работы ([2]) следует, что производные $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ удовлетворяют в прямоугольнике Q условию Липшица по t и x. Отсюда вытекает, что функции

$$\frac{DA}{Dx} = A'_x + A'_v\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{DA}{Dt} = A'_v\frac{\partial v}{\partial t}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{\Gamma}$$

также удовлетворяют условию Липшица по своим аргументам. По теореме 4 работы ([2]), задача (1.13), (1.14) имеет единственное решение $p(t, x)$. Как в п. 4 работы ([2]), можно показать, что $p(t, x) = \frac{\partial v}{\partial x}$ всюду в Q. Следовательно, внутри Q существуют и непрерывны производные $\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial x}$, $\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}$.

С помощью аналогичных рассуждений можно обосновать также применение к уравнению (1.8) операций дифференцирования $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^4}{\partial x^4}$, $\frac{\partial}{\partial t}$ внутри прямоугольника Q.

Для уравнения (1.8) справедлива также следующая

ЛЕММА 2. *Пусть в прямоугольнике* $S\{t_1 \leqslant t \leqslant T_1,\ x_1 \leqslant x \leqslant X_1\}$ *функция* $v(t, x)$ *удовлетворяет уравнению* (1.8) *и неравенствам* (1.10), *а также имеет непрерывные производные, которые входят в уравнения, получающиеся дифференцированием обеих частей* (1.8) *по* x *четыре раза; функция* $A(x, v)$ *при* $x_1 \leqslant x \leqslant X_1$, $m \leqslant v \leqslant M$ *имеет непрерывные производные четвертого порядка и удовлетворяет неравенству* $A(x, v) \geqslant a_m > 0$.

Тогда в любом внутреннем прямоугольнике $S'\{t_1 < t_2 \leqslant t \leqslant T_1, x_1 < x_2 \leqslant x \leqslant X_2 < X_1\}$ *при* $k \leqslant 4$ *имеет место оценка* $\left|\frac{\partial^k v}{\partial x^k}\right| \leqslant C$, *где* C *зависит только от величин* m, M, $t_2 - t_1$, $x_2 - x_1$, $X_1 - X_2$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству теоремы 3 работы ([11]).

После того как установлены леммы 1 и 2, мы можем перейти непосредственно к доказательству существования обобщенного решения задачи Коши для уравнения (1.7).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть выполняются следующие предположения:*

1) *Функция* $u_0(x)$ *непрерывна;* $0 \leqslant u_0(x) \leqslant M$; *функция* $\varphi(x, u_0(x))$ *удовлетворяет условию Липшица при* $-\infty < x < \infty$.

2) *В* $H\{-\infty < x < \infty,\ 0 < u \leqslant M + \varepsilon = M_1\}$ $(\varepsilon > 0)$ *функция* $\varphi(x, u)$ *имеет непрерывные производные пятого порядка, удовлетворяющие во всякой замкнутой области* $\{-\infty < X_1 \leqslant x \leqslant X_2 < \infty,\ 0 < m \leqslant u \leqslant M_1\}$ *условию Липшица по* x *и* u *(каковы бы ни были числа* $m > 0$, X_1 *и* X_2).

3) $\varphi(x, u) \to \infty$ *при* $u \to \infty$ *равномерно по* x, $-\infty < x < \infty$.

4) *Функции* $\varphi(x, u)$ *и* $\varphi'_u(x, u)$ *ограничены в* H.

Тогда существует обобщенное решение $u(t, x)$ *задачи Коши* (1.7), (1.1), *причем в тех точках* G, *где* $t > 0$ *и* $u(t, x) > 0$, *функция* $u(t, x)$ *имеет непрерывные производные, входящие в уравнение* (1.7), *и удовлетворяет ему в обычном смысле.*

Доказательство. Положим $v_0(x) = \varphi(x, u_0(x))$ и построим монотонно убывающую последовательность бесконечно дифференцируемых функций $\{v_0^n(x)\}$, равномерно сходящуюся к $v_0(x)$ и такую, что

$$\left|\frac{dv_0^n(x)}{dx}\right| \leqslant K$$

и $0 < v_0^n(x) \leqslant M_2$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Здесь $M_2 = \sup\limits_{-\infty < x < \infty} \varphi(x, M_1)$, K — некоторая постоянная. Существование такой последовательности обеспечивается условием 1) теоремы.

При помощи функций $v_0^n(x)$ построим вторую последовательность бесконечно дифференцируемых функций $\{\widetilde{v}_n(x)\}$, которая обладает следующими свойствами:

$$\left.\begin{gathered}\widetilde{v}_n(x) = v_0^n(x) \text{ при } |x| \leqslant n-2; \quad \widetilde{v}_n(x) = M_2 \text{ при } |x| \geqslant n-1,\\ v_0^{n+1}(x) \leqslant \widetilde{v}_{n+1}(x) \leqslant \widetilde{v}_n(x) \leqslant M_2,\\ \left|\frac{d\widetilde{v}_n(x)}{dx}\right| \leqslant K\end{gathered}\right\} \qquad (1.15)$$

при всех x, $-\infty < x < \infty$, и $n = 1, 2, \ldots$.

Замена искомой функции:

$$\varphi(x, u) = v, \quad \Phi(x, v) = u \qquad (1.16)$$

преобразует уравнение (1.7) к виду:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \Phi'_v(x, v)\frac{\partial v}{\partial t}, \qquad (1.17)$$

где функция $\Phi'_v(x, v)$ положительна и ограничена при $X_1 \leqslant x \leqslant X_2$, $0 < \mu \leqslant v \leqslant M_2$ (каковы бы ни были числа $\mu > 0$, X_1 и X_2);

$\Phi'_v(x, v) \to \infty$ при $v \to 0$ и любом x. Так как $\varphi'_u > 0$ при $u > 0$, то соответствие (1.16) между u и v является взаимно однозначным.

Рассмотрим для уравнения (1.17) в прямоугольнике $G_n\{0 \leqslant t \leqslant T, -n \leqslant x \leqslant n\}$ первую краевую задачу;

$$v(0, x) = \tilde{v}_n(x), \quad v(t, \pm n) = M_2. \tag{1.18}$$

Как нетрудно проверить, при наших предположениях можно применить лемму 1, согласно которой при каждом n задача (1.17), (1.18) имеет решение $v_n(t, x)$ и всюду в G_n выполняются неравенства

$$0 < \inf_x \tilde{v}_n(x) \leqslant v_n(t, x) \leqslant M_2. \tag{1.19}$$

Кроме того, внутри G_n существуют и непрерывны все производные v_n, которые входят в уравнения, получающиеся дифференцированием (1.17) по x четыре раза, а также один раз по t.

Сравним функции $v_n(t, x)$ и $v_{n+1}(t, x)$ в их общей области определения G_n. Обозначим через Γ_n часть границы G_n, состоящую из сторон $t = 0$, $x = n$ и $x = -n$. Вследствие условий (1.18) и неравенств (1.19) имеем:

$$v_n|_{\Gamma_n} \geqslant v_{n+1}|_{\Gamma_n}.$$

В прямоугольнике G_n разность $v_n - v_{n+1}$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{1}{\Phi'_v(x, v_n)} \frac{\partial^2(v_n - v_{n+1})}{\partial x^2} = \frac{\partial(v_n - v_{n+1})}{\partial t} + \frac{\Phi''_{vv}(x, \theta_n)}{\Phi'_v(x, v_n)} \frac{\partial v_{n+1}}{\partial t}(v_n - v_{n+1}), \tag{1.20}$$

где $\theta_n(t, x)$ — промежуточное значение между $v_n(t, x)$ и $v_{n+1}(t, x)$. При фиксированном n выражение, стоящее здесь множителем при $v_n - v_{n+1}$, ограничено; пусть модуль его не превосходит числа L_n. Положим

$$v_n - v_{n+1} = w_n e^{2L_n t};$$

рассуждая, как в доказательстве леммы 1, легко установить, что функция $w_n(t, x)$ не может иметь в $G_n \setminus \Gamma_n$ отрицательного минимума. Отсюда следует, что $v_n(t, x) \geqslant v_{n+1}(t, x)$ всюду в G_n.

Таким образом, функции v_n образуют монотонно убывающую и ограниченную снизу (тождественным нулем) последовательность; то же самое справедливо для последовательности функций $u_n(t, x) = \Phi(x, v_n(t\ x))$. Так как при $n \to \infty$ прямоугольники G_n, расширяясь, заполняют всю полосу G, то в каждой точке $(t, x) \in G$ существует

$$\lim_{n \to \infty} u_n(t, x) = u(t, x).$$

Покажем, что $u(t, x)$ является обобщенным решением задачи (1.7), (1.1).

Ограниченность и неотрицательность $u(t, x)$ в полосе G вытекает из неравенств (1.19). Установим наличие ограниченной в G обобщенной производной $\dfrac{\partial \varphi(x, u(t, x))}{\partial x}$.

При каждом n функция $p_n(t, x) = \dfrac{\partial v_n}{\partial x}$ удовлетворяет в G^n уравнению

$$\frac{\partial^2 p_n}{\partial x^2} = \Phi'_v(x, v_n) \frac{\partial p_n}{\partial t} + \frac{1}{\Phi'_v(x, v_n)} \frac{D\Phi'_v(x, v_n)}{Dx} \frac{\partial p_n}{\partial x}. \tag{1.21}$$

Применяя к этому уравнению принцип максимума, нетрудно показать, что всюду в G_n

$$\left|\frac{\partial v_n}{\partial x}\right| \leqslant \max_{\Gamma_n} \left|\frac{\partial v_n}{\partial x}\right|. \tag{1.22}$$

При $t=0$ имеем:

$$\left|\frac{\partial v_n}{\partial x}\right| = \left|\frac{d\widetilde{v}_n(x)}{dx}\right| \leqslant K, \quad n=1, 2, \ldots.$$

Оценим $\frac{\partial v_n}{\partial x}$ при $x=n$. Согласно условиям (1.18),

$$v_n(t, n) \equiv M_2 = \max_{G_n} v_n,$$

поэтому

$$\left.\frac{\partial v_n}{\partial x}\right|_{x=n} \geqslant 0.$$

Введем вспомогательную функцию

$$z_n(t, x) = v_n(t, x) - M_2(x-n+1).$$

В прямоугольнике $S_n\{0 \leqslant t \leqslant T,\ n-1 \leqslant x \leqslant n\}$ функция z_n удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2} = \Phi_v'(x, v_n)\frac{\partial z_n}{\partial t}$$

и потому, как и v_n, может принимать свое наибольшее значение только при $t=0$, $x=n-1$ или $x=n$. Имеем:

$$z_n(0, x) = M_2(n-x) > 0, \quad z_n(t, n-1) = v_n(t, n-1) > 0, \quad z_n(t, n) \equiv 0.$$

Следовательно, $z_n(t, n) \equiv \min\limits_{S_n} z_n$, откуда

$$\left.\frac{\partial z_n}{\partial x}\right|_{x=n} \leqslant 0, \quad \left.\frac{\partial v_n}{\partial x}\right|_{x=n} \leqslant M_2.$$

Тем самым мы оценили $\frac{\partial v_n}{\partial x}$ при $x=n$. Для $x=-n$ можно повторить те же рассуждения.

Из неравенства (1.22) получаем:

$$\left|\frac{\partial \varphi(x, u_n(t, x))}{\partial x}\right| = \left|\frac{\partial v_n}{\partial x}\right| \leqslant N = \max(K, M_2), \quad n=1, 2, \ldots. \tag{1.23}$$

Отсюда следует, что функция $\varphi(x, u(t, x))$ удовлетворяет условию Липшица по x с константой, не зависящей от t, и что в G существует обобщенная производная $\frac{\partial \varphi(x, u(t, x))}{\partial x}$, по абсолютной величине не превосходящая N [см. ([12]), стр. 42—43].

Покажем, что для $u(t, x)$ выполняется равенство (1.2).

Так как последовательность $\left\{\frac{\partial \varphi(x, u_n(t, x))}{\partial x}\right\}$ ограничена, то из нее можно выделить подпоследовательность $\left\{\frac{\partial \varphi(x, u_{n_k}(t, x))}{\partial x}\right\}$, слабо сходящуюся в любой конечной части G к функции $\frac{\partial \varphi(x, u(t, x))}{\partial x}$. Функции $u_n = \Phi(x, v_n)$ удовлетворяют уравнению (1.7). Подставим u_{n_k} в (1.7), умножим обе части получившегося тождества на функцию $f(t, x)$, непрерывно

дифференцируемую в G и равную нулю вне конечной области и при $t=T$, а затем проинтегрируем по G. После интегрирования по частям получим:

$$\iint\limits_{G}\left[\frac{\partial f}{\partial t}u_{n_k}-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi(x,u_{n_k})}{\partial x}\right]dtdx+\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(0,x)\Phi(0,\tilde{v}_{n_k}(x))\,dx=0. \qquad (1.24)$$

Предельный переход в (1.24) при $k\to\infty$ приводит к равенству (1.2).

Докажем, что $u(t,x)$ непрерывна в G; для этого достаточно доказать непрерывность в G функции $\varphi(x,u(t,x))=v(t,x)$. Выше уже было показано, что $v(t,x)$ удовлетворяет по x условию Липшица с константой, не зависящей от t.

Пусть в некоторой точке $(t_0,x_0)\in G$ функция $v(t,x)$ терпит разрыв как функция t. Тогда найдется такая последовательность $t_k\to t_0$, что

$$|v(t_k,x_0)-v(t_0,x_0)|\geqslant\alpha>0$$

для $k=1,2,\ldots$. Пусть, для определенности, $t_k>t_0$ и

$$v(t_k,x_0)-v(t_0,x_0)\geqslant\alpha,\quad k=1,2,\ldots.$$

Вследствие условия Липшица, на некотором отрезке $\xi_1\leqslant x\leqslant\xi_2$, содержащем x_0, будет выполняться неравенство:

$$v(t_k,x)-v(t_0,x)\geqslant\frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда следует:

$$u(t_k,x)-u(t_0,x)\geqslant\beta>0 \text{ при } \xi_1\leqslant x\leqslant\xi_2. \qquad (1.25)$$

Обозначим через G^λ полосу $\{0\leqslant\lambda\leqslant t\leqslant T,\ -\infty<x<\infty\}$. Если $f(t,x)$ — непрерывно дифференцируемая в G функция, равная нулю вне конечной области и при $t=T$, то имеет место равенство:

$$\iint\limits_{G^\lambda}\left[\frac{\partial f}{\partial t}u-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi(x,u)}{\partial x}\right]dtdx+\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\lambda,x)u(\lambda,x)\,dx=0. \qquad (1.26)$$

Действительно, соотношение (1.26) получается предельным переходом из соответствующего равенства для u_{n_k}, подобно тому, как выше мы получили равенство (1.2) из (1.24).

Пусть $f(t,x)=0$ при $x\leqslant\xi_1$ и при $x\geqslant\xi_2$, а при $\xi_1<x<\xi_2$ и достаточно близких к t_0 значениях $t>t_0$ выполняются неравенства:

$$f(t,x)>0,\quad \frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\geqslant 0.$$

Составим равенства вида (1.26) для $\lambda=t_0$ и $\lambda=t_k$; вычитая одно из другого, найдем:

$$\iint\limits_{G^{t_0}\setminus G^{t_k}}\left[\frac{\partial f}{\partial t}u-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi(x,u)}{\partial x}\right]dtdx=\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}[f(t_k,x)u(t_k,x)-f(t_0,x)u(t_0,x)]\,dx.$$

При $t_k\to t_0$ левая часть последнего равенства стремится к нулю, а правая часть, согласно (1.25), не меньше, чем

$$\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}f(t_0,x)[u(t_k,x)-u(t_0,x)]\,dx\geqslant\beta\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}f(t_0,x)\,dx=\beta_1>0.$$

Мы пришли к противоречию.

Итак, функция $v(t, x)$ в полосе G непрерывна по t и удовлетворяет по x условию Липшица с константой, не зависящей от t. Отсюда вытекает, что $v(t, x)$ (а следовательно, и $u(t, x)$) непрерывна в G по совокупности своих аргументов.

Таким образом, $u(t, x)$ обладает всеми свойствами, перечисленными в определении 1, и поэтому является обобщенным решением задачи Коши (1.7), (1.1).

Тот факт, что во всех точках, где $t > 0$ и $u(t, x) > 0$, функция $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (1.7) в обычном смысле, вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 3. *Пусть в некотором замкнутом прямоугольнике S функция $u(t, x)$ непрерывна, положительна и является пределом монотонно убывающей последовательности решений $u_n(t, x)$ уравнения* (1.7), *где $\varphi(x, u)$ удовлетворяет условиям теоремы* 2. *Тогда внутри S существуют и непрерывны производные $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и функция $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению* (1.7).

Доказательство. Так как $u(t, x) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(t, x)$, то

$$v(t, x) = \varphi(x, u(t, x)) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x, u_n(t, x)) = \lim_{n\to\infty} v_n(t, x).$$

В прямоугольнике S справедливо неравенство $v(t, x) \geqslant \mu > 0$, следовательно,

$$v_n(t, x) \geqslant \mu, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

По лемме 2, в любом внутреннем прямоугольнике $S' \subset S$ ограничены равномерно относительно n производные $\frac{\partial^k v_n}{\partial x^k}$, $k \leqslant 4$.

В силу уравнения (1.17), производные $\frac{\partial v_n}{\partial t}$ также равномерно ограничены в S'. На основании леммы 1, к уравнению (1.17) внутри S можно применять операции дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial}{\partial t}$; из равенств, получающихся при этом, следует равномерная ограниченность в S' производных $\frac{\partial^2 v_n}{\partial t \partial x}$, $\frac{\partial^3 v_n}{\partial t \partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}$. Отсюда вытекает, что последовательности $\left\{\frac{\partial v_n}{\partial t}\right\}$, $\left\{\frac{\partial v_n}{\partial x}\right\}$ и $\left\{\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}\right\}$ компактны в S' в смысле равномерной сходимости. Следовательно, функция $v(t, x)$ имеет в S' непрерывные производные $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$. Так как $v(t, x) > 0$ в S', то функция $u(t, x) = \Phi(x, v(t, x))$ в S' обладает непрерывными производными $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и удовлетворяет уравнению (1.7).

§ 2. Первая краевая задача

В этом параграфе мы рассмотрим первую краевую задачу для уравнения (1) в прямоугольнике $R\{0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant X\}$ и в полуполосе $D\{0 \leqslant t \leqslant T, 0 \leqslant x < \infty\}$.

Обозначим через Γ часть границы прямоугольника R, состоящую из

боковых сторон ($x=0$, $x=X$) и нижнего основания ($t=0$), через Γ_1 — часть границы R, состоящую из боковых сторон и верхнего основания ($t=T$). Зададим на Γ краевые условия:

$$u(0,x)=u_0(x),\quad 0\leqslant x\leqslant X,\quad u(t,0)=u_1(t),\quad u(t,X)=u_2(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{2.1}$$

Определение 2. Функцию $u(t,x)$, неотрицательную, непрерывную в прямоугольнике R и удовлетворяющую условиям (2.1), назовем обобщенным решением задачи (1), (2.1), если существует обобщенная производная $\frac{\partial\varphi(t,x,u(t,x))}{\partial x}$, суммируемая с квадратом в R, и для любой функции $f(t,x)$, непрерывно дифференцируемой в R и обращающейся в нуль на Γ_1, выполняется равенство:

$$\iint\limits_R\left[\frac{\partial f}{\partial t}u-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi(t,x,u)}{\partial x}\right]dt\,dx+\int\limits_0^X f(0,x)\,u_0(x)\,dx=0. \tag{2.2}$$

ТЕОРЕМА 3. *Обобщенное решение задачи* (1), (2.1) *единственно, если функция $\varphi(t,x,u)$ непрерывна по всем аргументам, а $\varphi'_u(t,x,u)$ ограничена при $(t,x)\in R$ и ограниченных u.*

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 1. Сначала покажем, что равенство (2.2) остается в силе, если функция $f(t,x)$ непрерывна в R, равна нулю на Γ_1 и имеет в R квадратично суммируемые обобщенные производные $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$. Затем подставим в (2.2) функцию

$$f(t,x)=\int\limits_T^t[\varphi(\tau,x,u_1(\tau,x))-\varphi(\tau,x,u_2(\tau,x))]\,d\tau,$$

где u_1 и u_2 — два обобщенных решения задачи (1), (2.1); как и в теореме 1, докажем, что $u_1\equiv u_2$.

Теорема существования, как и в предыдущем параграфе, будет доказана для уравнения (1.7).

ТЕОРЕМА 4. *Пусть выполняются следующие предположения:*

1) *$u_0(x)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$ — непрерывные функции своих аргументов; $0\leqslant u_i\leqslant M$, $i=0,1,2$, $u_0(0)=u_1(0)$, $u_0(X)=u_2(0)$.*

2) *Функция $\varphi(x,u_0(x))$ удовлетворяет условию Липшица при $0\leqslant x\leqslant X$; функции $\varphi(0,u_1(t))$ и $\varphi(X,u_2(t))$ удовлетворяют условию Липшица при $0\leqslant t\leqslant T$.*

3) *В $H_1\{0\leqslant x\leqslant X,\ 0<u\leqslant M+\varepsilon=M_1\}$ ($\varepsilon>0$) функция $\varphi(x,u)$ имеет непрерывные производные пятого порядка, удовлетворяющие при $u\geqslant m>0$ условию Липшица по x и u (каково бы ни было $m>0$).*

4) *$\varphi''_{uu}(x,u)>0$ в H_1.*

5) *Функции $\frac{[\varphi'_u(x,u)]^2}{\varphi''_{uu}(x,u)}$ и $\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\varphi'_x(x,u)}{\varphi'_u(x,u)}\right]$ ограничены в H_1.*

Тогда существует обобщенное решение $u(t,x)$ задачи (1.7), (2.1), причем в тех точках $R\setminus\Gamma$, где $u(t,x)>0$, функция $u(t,x)$ имеет непре-

рывные производные, входящие в уравнение (1.7), *и удовлетворяет ему в обычном смысле.*

Замечание. Как нетрудно проверить, предположения 3)—5) теоремы 4 выполняются, если $\varphi(x, u) = u^\nu$, $\nu > 1$. Этот случай наиболее часто рассматривается в теории фильтрации [см. ([1])].

Доказательство теоремы 4. Примем обозначения:

$$v_0(x) = \varphi(x, u_0(x)), \quad v_1(t) = \varphi(0, u_1(t)), \quad v_2(t) = \varphi(X, u_2(t));$$
$$M_2 = \max_{0 \leqslant x \leqslant X} \varphi(x, M_1).$$

Построим монотонно убывающие последовательности бесконечно дифференцируемых функций $\{v_{0n}(x)\}$, $\{v_{1n}(t)\}$, $\{v_{2n}(t)\}$, которые равномерно сходятся соответственно к $v_0(x)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$ и обладают следующими свойствами:

$$\left.\begin{aligned} &\left|\frac{dv_{0n}(x)}{dx}\right| \leqslant K, \quad \left|\frac{dv_{in}(t)}{dt}\right| \leqslant K, \quad i = 1, 2; \\ &0 < m_n \leqslant v_{in} \leqslant M_2, \quad i = 0, 1, 2; \\ &v_{0n}(0) = v_{1n}(0), \quad v_{0n}(X) = v_{2n}(0); \\ &\frac{d^2 v_{0n}(0)}{dx^2} = \Phi_v'(0, v_{1n}(0)) \frac{dv_{1n}(0)}{dt}, \quad \frac{d^2 v_{0n}(X)}{dx^2} = \Phi_v'(X, v_{2n}(0)) \frac{dv_{2n}(0)}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Здесь $\Phi(x, v)$ определяется с помощью равенств (1.16), K — постоянная, не зависящая от n. Возможность построения таких последовательностей вытекает из условий 1), 2) настоящей теоремы.

По лемме 1, при каждом n существует в R решение $v_n(t, x)$ уравнения (1.17), удовлетворяющее условиям:

$$v_n(0, x) = v_{0n}(x), \quad v_n(t, 0) = v_{1n}(t), \quad v_n(t, X) = v_{2n}(t).$$

При этом всюду в R выполняются неравенства:

$$0 < m_n \leqslant v_n(t, x) \leqslant M_2, \tag{2.4}$$

а внутри R существуют и непрерывны все производные v_n, которые входят в уравнения, получающиеся дифференцированием (1.17) четыре раза по x, а также один раз по t.

Положим $u_n = \Phi(x, v_n)$; тогда $v_n = \varphi(x, u_n)$. Неравенства (2.4) дают:

$$0 < u_n(t, x) \leqslant M_1. \tag{2.5}$$

Как в теореме 2, легко установить, что функции u_n образуют монотонную ограниченную последовательность; поэтому в каждой точке R существует предел

$$u(t, x) = \lim_{n \to \infty} u_n(t, x). \tag{2.6}$$

Покажем, что $u(t, x)$ является обобщенным решением задачи (1.7), (2.1).

Докажем сначала, что существует обобщенная производная $\frac{\partial \varphi(x, u(t, x))}{\partial x}$, суммируемая с квадратом в R. Рассмотрим (при фиксированном n) вспомогательную функцию

$$F_n(t, x) = \varphi(x, u_n(t, x)) - v_{1n}(t) + \frac{x}{X}[v_{1n}(t) - v_{2n}(t)].$$

Так как $u_n(t, x)$ удовлетворяет уравнению (1.7), то

$$\iint_R \left[\frac{\partial u_n}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi(x, u_n(t, x))}{\partial x^2}\right] F_n(t, x)\, dt\, dx = 0.$$

Преобразуем это тождество с помощью интегрирования по частям; учитывая, что $F_n(t, 0) = F_n(t, X) = 0$, получим:

$$\iint_R \varphi(x, u_n(t, x)) \frac{\partial u_n}{\partial t} dt dx - \iint_R v_{1n}(t) \frac{\partial u_n}{\partial t} dt\, dx +$$

$$+ \frac{1}{X} \iint_R x [v_{1n}(t) - v_{2n}(t)] \frac{\partial u_n}{\partial t} dt dx + \frac{1}{X} \iint_R [v_{1n}(t) - v_{2n}(t)] \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial \varphi(x, u_n(t, x))}{\partial x} dt dx + \iint_R \left[\frac{\partial \varphi(x, u_n(t, x))}{\partial x}\right]^2 dt dx = 0. \tag{2.7}$$

Обозначим интегралы, стоящие в левой части равенства (2.7), через I_1, I_2, I_3, I_4 и I_5 (в порядке их написания). Чтобы оценить величину I_1, положим

$$\Omega(x, u) = \int_0^u \varphi(x, \alpha)\, d\alpha.$$

Тогда

$$I_1 = \iint_R \varphi(x, u_n(t, x)) \frac{\partial u_n}{\partial t} dt dx = \iint_R \frac{\partial \Omega(x, u_n(t, x))}{\partial t} dt dx =$$

$$= \int_0^X [\Omega(x, u_n(T, x)) - \Omega(x, u_n(0, x))]\, dx.$$

Из неравенств (2.4) и (2.5) следует: $0 < \Omega(x, u_n(t, x)) \leqslant M_2 M_1$, что дает:

$$|I_1| \leqslant M_2 M_1 X = A_1. \tag{2.8}$$

Далее, интегрируя по частям и используя соотношения (2.3), (2.4), (2.5), находим:

$$I_2 = \int_0^X [u_n(0, x) v_{1n}(0) - u_n(T, x) v_{1n}(T)]\, dx + \iint_R \frac{dv_{1n}(t)}{dt} u_n(t, x)\, dt dx,$$

$$|I_2| \leqslant M_1 M_2 X + K M_1 T X = A_2. \tag{2.9}$$

Аналогичным путем устанавливаются неравенства:

$$|I_3| \leqslant A_3, \quad |I_4| \leqslant A_4. \tag{2.10}$$

Теперь из соотношений (2.7) — (2.10) вытекает, что

$$\iint_R \left[\frac{\partial \varphi(x, u_n(t, x))}{\partial x}\right]^2 dt dx \leqslant A, \tag{2.11}$$

где A — постоянная, не зависящая от n. Оценка (2.11) справедлива, очевидно, при любом n.

На основании формулы (2.6) и неравенств (2.5), (2.11), заключаем [см. ([12]), стр. 42—43], что существует обобщенная производная $\frac{\partial \varphi(x, u(t, x))}{\partial x}$, причем

$$\iint_R \left[\frac{\partial \varphi(x, u(t, x))}{\partial x}\right]^2 dt dx \leqslant A.$$

Соотношение (2.2) для функции $u(t, x)$ получается из соответствующих соотношений для $u_n(t, x)$ предельным переходом, подобно тому как в доказательстве теоремы 2 мы получили равенство (1.2) из равенства (1.24).

Мы доказали, что обобщенная производная $\frac{\partial \varphi(x, u(t, x))}{\partial x}$ суммируема с квадратом в прямоугольнике R; покажем, что она ограничена во всяком прямоугольнике $R_\delta\{0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 < \delta \leqslant x \leqslant X - \delta\}$. Для этого достаточно установить, что в R_δ равномерно относительно n ограничены по модулю производные $\frac{\partial v_n}{\partial x}$.

Воспользуемся методом вспомогательных функций С. Н. Бернштейна [см. ([13])] в том виде, в каком этот метод применялся в работе ([14]). Рассмотрим в R функцию:

$$w_n(t,x) = x(X - x)\left|\frac{\partial v_n}{\partial x}\right| + e^{2Xv_n}. \tag{2.12}$$

Эта функция всюду в R положительна. Если она достигает своего наибольшего в R значения при $x = 0$, при $x = X$ или в точке, где $\frac{\partial v_n}{\partial x} = 0$, то

$$w_n \leqslant e^{2XM_2}.$$

Если максимум w_n достигается при $t = 0$, то

$$w_n \leqslant \frac{1}{4} KX^2 + e^{2XM_2} = K_1.$$

Во всех этих случаях

$$x(X - x)\left|\frac{\partial v_n}{\partial x}\right| + e^{2Xv_n} \leqslant K_1.$$

Рассматривая w_n в R_δ, находим:

$$\left|\frac{\partial v_n}{\partial x}\right| \leqslant \frac{K_1}{\delta(X - \delta)} = K_\delta^{(1)}. \tag{2.13}$$

Пусть теперь w_n принимает свое наибольшее в R значение в некоторой точке $P \in R \setminus \Gamma$, причем $\left.\frac{\partial v_n}{\partial x}\right|_P \neq 0$. Перепишем уравнение (1.17) для v_n в эквивалентной форме:

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} = \varphi'_u(x, \Phi(x, v_n))\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}. \tag{2.14}$$

В точке P, где, по предположению, $\frac{\partial v_n}{\partial x} \neq 0$, равенство (2.12) можно дифференцировать по x; это дает:

$$\frac{\partial w_n}{\partial x} = \pm x(X - x)\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} \pm (X - 2x)\frac{\partial v_n}{\partial x} + 2Xe^{2Xv_n}\frac{\partial v_n}{\partial x}. \tag{2.15}$$

Здесь и в дальнейшем верхний знак ставится в случае, когда $\left.\frac{\partial v_n}{\partial x}\right|_P > 0$, а нижний — когда $\left.\frac{\partial v_n}{\partial x}\right|_P < 0$.

Так как максимум w_n достигается в точке $P \in R \setminus \Gamma$, то в этой точке должно соблюдаться условие $\frac{\partial w_n}{\partial x} = 0$, откуда следует, что

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} = \frac{2Xe^{2Xv_n} \pm (X-2x)}{\mp x(X-x)} \frac{\partial v_n}{\partial x}. \tag{2.16}$$

Кроме того, в точке P должно выполняться неравенство:

$$\varphi_u'(x, \Phi(x, v_n)) \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} - \frac{\partial w_n}{\partial t} \leqslant 0. \tag{2.17}$$

Продифференцировав по x равенства (2.15) и (2.14), получим:

$$\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} = \pm x(X-x) \frac{\partial^3 v_n}{\partial x^3} \pm 2(X-2x) \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} \mp 2 \frac{\partial v_n}{\partial x} +$$
$$+ 4X^2 e^{2Xv_n} \left(\frac{\partial v_n}{\partial x}\right)^2 + 2Xe^{2Xv_n} \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}, \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial t\, \partial x} = \varphi_u' \frac{\partial^3 v_n}{\partial x^3} + \varphi_{ux}'' \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \varphi_{uu}'' \Phi_x' \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \varphi_{uu}'' \Phi_v' \frac{\partial v_n}{\partial x} \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}. \tag{2.19}$$

Здесь и ниже у всех производных функции φ первым аргументом является x, а вторым $\Phi(x, v_n)$.

В силу соотношений (1.16),

$$\Phi_v' = \frac{1}{\varphi_u'}, \quad \Phi_x' = -\frac{\varphi_x'}{\varphi_u'},$$

поэтому уравнение (2.19) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial t\, \partial x} = \varphi_u' \frac{\partial^3 v_n}{\partial x^3} + \varphi_u' \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varphi_x'}{\varphi_u'}\right) \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \frac{\varphi_{uu}''}{\varphi_u'} \frac{\partial v_n}{\partial x} \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}. \tag{2.20}$$

Дифференцируя по t равенство (2.12) и заменяя производные $\frac{\partial v_n}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 v_n}{\partial t \partial x}$ их выражениями из уравнений (2.14), (2.20), находим:

$$\frac{\partial w_n}{\partial t} = \pm x(X-x) \varphi_u' \frac{\partial^3 v_n}{\partial x^3} + \varphi_u' \left[2Xe^{2Xv_n} \pm x(X-x) \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varphi_x'}{\varphi_u'}\right)\right] \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} \pm$$
$$\pm x(X-x) \frac{\varphi_{uu}''}{\varphi_u'} \frac{\partial v_n}{\partial x} \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}. \tag{2.21}$$

Из (2.17), (2.18) и (2.21) получаем (после приведения подобных членов):

$$\varphi_u' \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} - \frac{\partial w_n}{\partial t} = 4X^2 e^{2Xv_n} \varphi_n' \left(\frac{\partial v_n}{\partial x}\right)^2 \mp x(X-x) \frac{\varphi_{uu}''}{\varphi_u'} \frac{\partial v_n}{\partial x} \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} \mp$$
$$\mp 2\varphi_u' \frac{\partial v_n}{\partial x} + \varphi_u' \left[\pm 2(X-2x) \mp x(X-x) \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varphi_x'}{\varphi_u'}\right)\right] \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} \leqslant 0.$$

Заменим здесь производную $\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}$ ее выражением (2.16); это даст:

$$\left\{4X^2e^{2Xv_n}\varphi'_u + [2Xe^{2Xv_n} \pm (X-2x)]\frac{\varphi''_{uu}}{\varphi'_u}\right\}\left(\frac{\partial v_n}{\partial x}\right)^2 +$$

$$+\varphi'_u\left\{\pm 2 + \frac{2Xe^{2Xv_n} \pm (X-2x)}{x(X-x)}\left[-2(X-2x) +\right.\right.$$

$$\left.\left.+ x(X-x)\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varphi'_x}{\varphi'_u}\right)\right]\right\}\frac{\partial v_n}{\partial x} \leqslant 0. \tag{2.22}$$

Так как $v_n > 0$, $\varphi'_u > 0$ и $\varphi''_{uu} > 0$, то множитель при $\left(\frac{\partial v_n}{\partial x}\right)^2$ в левой части неравенства (2.22) оценивается снизу выражением $X\frac{\varphi''_{uu}}{\varphi'_u} > 0$. Из (2.22) следует:

$$\left|\frac{\partial v_n}{\partial x}\right| \leqslant \frac{1}{x(X-x)}\frac{\varphi'^2_u}{\varphi''_{uu}}\left[C_1 + C_2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varphi'_x}{\varphi'_u}\right)\right],$$

где C_1 и C_2 — постоянные, не зависящие от n. В силу условий теоремы; отсюда заключаем, что в точке P максимума w_n выполняется неравенство

$$\left|\frac{\partial v_n}{\partial x}\right| \leqslant \frac{C_3}{x(X-x)},$$

где постоянная C_3 также не зависит от n. Обращаясь к равенству (2.12), выводим, что в точке P

$$w_n \leqslant C_3 + e^{2XM_2} = K_2$$

и тем более $w_n \leqslant K_2$ во всякой другой точке прямоугольника R. Поэтому в R_δ в рассматриваемом случае справедлива оценка:

$$\left|\frac{\partial v_n}{\partial x}\right| \leqslant \frac{K_2}{\delta(X-\delta)} = K_\delta^{(2)}. \tag{2.23}$$

Полагая

$$K_\delta = \max_{i=1,2} K_\delta^{(i)},$$

получаем из (2.13) и (2.23):

$$\left|\frac{\partial v_n(t, x)}{\partial x}\right| \leqslant K_\delta \text{ при } (t, x) \in R_\delta;$$

здесь K_δ не зависит от n. Следовательно,

$$\left|\frac{\partial \varphi(x, u(t, x))}{\partial x}\right| \leqslant K_\delta \text{ при } (t, x) \in R_\delta;$$

функция $v(t, x) = \varphi(x, u(t, x))$ удовлетворяет в R_δ условию Липшица по x с константой, не зависящей от t. Отсюда, как и в теореме 2, следует, что функция $u(t, x)$ непрерывна в R_δ по совокупности своих аргументов.

Так как $\delta > 0$ может быть взято сколь угодно малым, то мы доказали непрерывность $u(t, x)$ всюду в $R \setminus \Gamma$ и, кроме того, справедливость равенства

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ x\to x_0}} u(t, x) = u_0(x) \tag{2.24}$$

для $0 < x_0 < X$.

Докажем, что функция $u(t, x)$ непрерывна и принимает заданные значения в точках боковых сторон прямоугольника R. Для определенности будем рассматривать сторону $x=0$.

Сначала выведем для $0 \leqslant t_0 \leqslant T$ неравенство

$$\varlimsup_{\substack{t \to t_0 \\ x \to 0}} u(t, x) \leqslant u_1(t_0). \tag{2.25}$$

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое n, что

$$v_1(t_0) < v_{1n}(t_0) \leqslant v_1(t_0) + \varepsilon. \tag{2.26}$$

Так как последовательность $\{v_n(t, x)\}$ монотонно убывает, то в любой точке $(t, x) \in R$ при $k > 0$ выполняется неравенство

$$v_{n+k}(t, x) \leqslant v_n(t, x);$$

переходя в нем к пределу сначала при $k \to 0$, а затем при $t \to t_0$ и $x \to 0$, получим с учетом (2.26):

$$\varlimsup_{\substack{t \to t_0 \\ x \to 0}} v(t, x) \leqslant v_1(t_0) + \varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε, это означает, что

$$\varlimsup_{\substack{t \to t_0 \\ x \to 0}} v(t, x) \leqslant v_1(t_0).$$

Отсюда следует неравенство (2.25).

Чтобы доказать непрерывность $u(t, x)$ и выполнение граничного условия в точке $(t_0, 0)$, остается установить, что

$$\varliminf_{\substack{t \to t_0 \\ x \to 0}} u(t, x) \geqslant u_1(t_0). \tag{2.27}$$

Если $u_1(t_0) = 0$, то справедливость неравенства (2.27) вытекает из неотрицательности $u(t, x)$. Пусть теперь $u_1(t_0) > 0$ и $0 < t_0 \leqslant T$. Так как функция $u_1(t)$ непрерывна, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $d > 0$, что при $|t - t_0| < d$

$$u_1(t) > u_1(t_0) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.28}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $\varepsilon < u_1(t_0)$ и

$$d < t_0. \tag{2.29}$$

Возьмем некоторое $\delta > 0$ и введем в рассмотрение функцию $\bar{\varphi}(u)$ со следующими свойствами: производная $\bar{\varphi}'(u)$ непрерывна при $u \geqslant 0$; $\bar{\varphi}(0) = \bar{\varphi}'(0) = 0$; при $u > 0$ функция $\bar{\varphi}(u)$ бесконечно дифференцируема; при $0 \leqslant x \leqslant \delta$, $0 < u \leqslant M_1$ имеют место неравенства:

$$\left.\begin{gathered} 0 < \bar{\varphi}(u) \leqslant \varphi(x, u), \quad 0 < \bar{\varphi}'(u) \leqslant \varphi'_u(x, u), \quad \bar{\varphi}''(u) > 0, \\ \Psi(u) = \int_0^u \frac{\bar{\varphi}'(\alpha)}{\alpha}\, d\alpha < \infty. \end{gathered}\right\} \tag{2.30}$$

Такую функцию, очевидно, легко построить. Как следствие неравенств (2.30), получаем, что

$$\Phi(x, v) \leqslant \overline{\Phi}(v), \quad \Phi'_v(x, v) \leqslant \overline{\Phi}'(v) \tag{2.31}$$

при $0 \leqslant x \leqslant \delta$, $0 < v \leqslant M_2$. Здесь $\bar{\varphi}(\bar{\Phi}'(v)) \equiv v$.

Положим $\Psi_1 \equiv \Psi(\bar{\Phi}(\varphi(0, u_1(t_0) - \varepsilon)))$ и зададим функцию $\bar{u}(t, x)$ с помощью соотношения:

$$\Psi(\bar{u}(t, x)) = \begin{cases} c[c(t-t_1)-x] & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant c(t-t_1), \\ 0 & \text{при } 0 \leqslant c(t-t_1) \leqslant x, \end{cases} \tag{2.32}$$

где

$$c = 2\max\left\{\frac{\Psi_1}{\delta}, \sqrt{\frac{\Psi_1}{d}}\right\}, \tag{2.33}$$

$$t_1 = t_0 - \frac{\Psi_1}{c^2}. \tag{2.34}$$

Так как $\Psi(u)$ является монотонной функцией от u, то $\bar{u}(t, x)$ однозначно определяется из (2.32), причем $\bar{u}(t, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $\Psi(\bar{u}(t, x)) = 0$.

В силу (2.29), (2.33) и (2.34) имеем: $0 < t_1 < t_0$. Из соотношения (2.32) следует, что

$$\bar{u}(t_1, x) = 0 \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant \delta. \tag{2.35}$$

Далее, функция $\bar{u}(t, 0)$ при $t \geqslant t_1$ монотонно возрастает с ростом t. Формулы (2.32) и (2.34) дают:

$$\bar{u}(t_0, 0) = \bar{\Phi}(\varphi(0, u_1(t_0) - \varepsilon)). \tag{2.36}$$

Учитывая еще неравенство (2.28), получаем для достаточно малого $\gamma > 0$:

$$\bar{u}(t, 0) = \bar{u}_1(t) < \bar{\Phi}(\varphi(0, u_1(t))) \text{ при } t_1 \leqslant t \leqslant t_0 + \gamma. \tag{2.37}$$

Кроме того, согласно соотношению (2.32), $\bar{u}(t, \delta) = 0$ при $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \frac{\delta}{c}$. Используя формулы (2.33) и (2.34), находим:

$$t_1 + \frac{\delta}{c} = t_0 + \frac{\delta}{c} - \frac{\Psi_1}{c^2} \geqslant t_0 + \frac{\delta}{2c};$$

поэтому для $\gamma < \frac{\delta}{2c}$ имеем:

$$\bar{u}(t, \delta) = 0 \text{ при } t_1 \leqslant t \leqslant t_0 + \gamma. \tag{2.38}$$

Как показано в работе (7), функция $\bar{u}(t, x)$, определяемая из (2.32), при $t \geqslant t_1$, $x \geqslant 0$ непрерывна вместе с $\frac{\partial \bar{\varphi}(\bar{u})}{\partial x}$, а при $x \neq c(t-t_1)$ имеет все производные, входящие в уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{\varphi}(u)}{\partial x^2}, \tag{2.39}$$

и удовлетворяет этому уравнению. Отсюда следует, что $\bar{u}(t, x)$ является обобщенным решением первой краевой задачи (2.39), (2.35), (2.37), (2.38) для прямоугольника $\bar{R}\{t_1 \leqslant t \leqslant t_0 + \gamma,\ 0 \leqslant x \leqslant \delta\}$ в смысле определения 2.

Построим монотонно убывающую последовательность бесконечно дифференцируемых функций $\{\bar{v}_{1n}(t)\}$, равномерно сходящуюся на отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant t_0 + \gamma$ к функции $\bar{\varphi}(\bar{u}_1(t))$ и обладающую следующими свойствами:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{v}_{1n}(t_1) = \bar{m}_n < m_n, \quad \bar{v}'_{1n}(t_1) = 0, \\ &\bar{v}_{1n}(t) < v_{1n}(t), \quad \bar{v}'_{1n}(t) \geqslant 0 \quad \text{при } t_1 \leqslant t \leqslant t_0 + \gamma. \end{aligned}\right\} \tag{2.40}$$

Напомним, что $\{v_n(t, x)\}$ — ранее построенная в R последовательность, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(x, v_n(t, x)) = u(t, x), \quad v_{1n}(t) = v_n(t, 0), \ m_n = \min_{\bar{R}} v_n(t, x).$$

Возможность построения последовательности $\{\bar{v}_{1n}(t)\}$ с указанными свойствами обеспечивается условиями (2.35), (2.37) и монотонностью $\bar{\varphi}(\bar{u}_1(t))$.

Заменой $v = \bar{\varphi}(u)$, $u = \bar{\Phi}(v)$ мы приведем уравнение (2.39) к виду:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \bar{\Phi}'(v)\frac{\partial v}{\partial t}. \tag{2.41}$$

Рассмотрим для уравнения (2.41) в прямоугольнике $\bar{R}$ первую краевую задачу с условиями:

$$v(t, 0) = \bar{v}_{1n}(t), \quad v(t, \delta) = \bar{m}_n, \quad v(t_1, x) = \bar{m}_n. \tag{2.42}$$

По лемме 1, задача (2.41), (2.42) при каждом n имеет решение $\bar{v}_n(t, x)$; всюду в $\bar{R}$ выполняется неравенство $\bar{v}_n(t, x) \geqslant \bar{m}_n$; внутри R уравнение (2.41) можно дифференцировать по t. С помощью принципа максимума легко показать, что

$$\bar{v}_n(t, x) \geqslant \bar{v}_{n+1}(t, x), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Обозначим через $\bar{\Gamma}$ часть границы $\bar{R}$, состоящую из сторон $t = t_1$, $x = 0$ и $x = \delta$; вследствие соотношений (2.40), уравнения (2.41) и условий (2.42) имеем:

$$\left.\frac{\partial \bar{v}_n}{\partial t}\right|_{\bar{\Gamma}} \geqslant 0.$$

Покажем, что $\frac{\partial \bar{v}_n}{\partial t} \geqslant 0$ всюду в $\bar{R}$. Продифференцировав уравнение (2.41) по t, получим уравнение, которому удовлетворяет в $\bar{R} \setminus \bar{\Gamma}$ функция $q_n(t, x) = \frac{\partial \bar{v}_n}{\partial t}$:

$$\frac{\partial^2 q_n}{\partial x^2} = \bar{\Phi}'(\bar{v}_n)\frac{\partial q_n}{\partial t} + \bar{\Phi}''(\bar{v}_n)\, q_n^2. \tag{2.43}$$

Обращаясь к неравенствам (2.30), находим:

$$\bar{\Phi}''(\bar{v}_n) = -\frac{\bar{\varphi}''(\bar{\Phi}(\bar{v}_n))}{[\bar{\varphi}'(\bar{\Phi}(\bar{v}_n))]^3} < 0.$$

Из уравнения (2.43) легко усмотреть, что q_n не может иметь в $\bar{R} \setminus \bar{\Gamma}$ отрицательного минимума. Таким образом, $\frac{\partial \bar{v}_n}{\partial t} \geqslant 0$ всюду в $\bar{R}$; в силу уравнения (2.41), это означает, что всюду в $\bar{R}$

$$\frac{\partial^2 \bar{v}_n}{\partial x^2} \geqslant 0. \tag{2.44}$$

Сравним в R функции $v_n(t, x)$ и $\bar{v}_n(t, x)$. Ввиду условий (2.42) и соотношений (2.40),

$$\bar{v}_n|_{\bar{\Gamma}} < v_n|_{\bar{\Gamma}}.$$

Из (1.17) и (2.41) следует, что разность $v_n - \bar{v}_n$ удовлетворяет в $\bar{R}$ уравнению:

$$\frac{\partial (v_n - \bar{v}_n)}{\partial t} = \frac{1}{\Phi'_v(x, v_n)} \frac{\partial^2 (v_n - \bar{v}_n)}{\partial x^2} - \frac{\bar{\Phi}''(\theta_n)}{\Phi'_v(x, v_n)\bar{\Phi}'(\bar{v}_n)} \frac{\partial^2 \bar{v}_n}{\partial x^2}(v_n - \bar{v}_n) + \\ + \frac{\bar{\Phi}'(v_n) - \Phi'_v(x, v_n)}{\Phi'_v(x, v_n)\bar{\Phi}'(\bar{v}_n)} \frac{\partial^2 \bar{v}_n}{\partial x^2}. \qquad (2.45)$$

Здесь θ_n — промежуточное значение между v_n и $\bar{v}_n$. Если n фиксировано, то множитель при $v_n - \bar{v}_n$ в правой части (2.45) ограничен в $\bar{R}$; пусть L_n — максимум модуля этого множителя. Положим

$$v_n - \bar{v}_n = z_n e^{2L_n t};$$

уравнение для $z_n(t, x)$ имеет вид:

$$\frac{\partial z_n}{\partial t} + \left[2L_n + \frac{\bar{\Phi}''(\theta_n)}{\Phi'_v(x, v_n)\bar{\Phi}'(\bar{v}_n)} \frac{\partial^2 \bar{v}_n}{\partial x^2}\right] z_n = \frac{1}{\Phi'_v(x, v_n)} \frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2} + \\ + \frac{\bar{\Phi}'(v_n) - \Phi'_v(x, v_n)}{\Phi'_v(x, v_n)\bar{\Phi}'(\bar{v}_n)} \frac{\partial^2 \bar{v}_n}{\partial x^2} e^{-2L_n t}. \qquad (2.46)$$

Вследствие неравенств (2.31) и (2.44), функция z_n, удовлетворяющая уравнению (2.46), не может принимать в $\bar{R} \setminus \bar{\Gamma}$ наименьшее отрицательное значение. Но $z_n|_{\bar{\Gamma}} > 0$; поэтому в прямоугольнике $\bar{R}$ всюду $z_n(t, x) \geqslant 0$. Отсюда получаем:

$$u_n(t, x) = \Phi(x, v_n(t, x)) \geqslant \Phi(x, \bar{v}_n(t, x)), \quad n = 1, 2, \ldots. \qquad (2.47)$$

Положим $\mu_n = \bar{\Phi}(\bar{m}_n)$; так как $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{m}_n = 0$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = 0$. Пусть $f(t, x)$ непрерывно дифференцируема в $\bar{R}$ и обращается в нуль при $x = 0$, $x = \delta$, $t = t_0 + \gamma$. При каждом n функция $\bar{u}_n(t, x) = \bar{\Phi}(\bar{v}_n(t, x))$ удовлетворяет в $\bar{R}$ уравнению (2.39) и, следовательно, интегральному тождеству вида (2.2):

$$\iint\limits_{\bar{R}} \left[\frac{\partial f}{\partial t} \bar{u}_n - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \bar{\varphi}(\bar{u}_n)}{\partial x}\right] dt\, dx + \mu_n \int\limits_0^\delta f(t_1, x)\, dx = 0. \qquad (2.48)$$

Как уже отмечалось, $\bar{u}(t, x)$ является обобщенным решением задачи (2.39), (2.35), (2.37), (2.38) в прямоугольнике $\bar{R}$, поэтому и для $\bar{u}(t, x)$ имеет место аналогичное тождество:

$$\iint\limits_{\bar{R}} \left[\frac{\partial f}{\partial t} \bar{u} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \bar{\varphi}(\bar{u})}{\partial x}\right] dt\, dx = 0, \qquad (2.49)$$

в котором однократный интеграл отсутствует в силу условия (2.35).

Вычитая (2.49) из (2.48), получим:

$$\iint\limits_{\bar{R}} \left\{\frac{\partial f}{\partial t}(\bar{u}_n - \bar{u}) - \frac{\partial f}{\partial x}\left[\frac{\partial \bar{\varphi}(\bar{u}_n)}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\varphi}(\bar{u})}{\partial x}\right]\right\} dt\, dx = \\ = -\mu_n \int\limits_0^\delta f(t_1, x)\, dx. \qquad (2.50)$$

Рассмотрим последовательность функций:

$$f_n(t, x) = \int_{t_0+\gamma}^{t} \Big\{[\bar{\varphi}(\bar{u}_n(\tau, x)) - \bar{\varphi}(\bar{u}(\tau, x))] +$$

$$+ [\bar{v}_{1n}(\tau) - \bar{\varphi}(\bar{u}_1(\tau))]\left(\frac{x}{\delta} - 1\right) - \bar{m}_n \frac{x}{\delta}\Big\} d\tau, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Все f_n непрерывно дифференцируемы в $\bar{R}$; в силу условий (2.42), $f_n = 0$ при $x = 0$, $x = \delta$, $t = t_0 + \gamma$. Следовательно, для f_n справедливо тождество (2.50). Подставляя $f_n(t, x)$ в (2.50) и производя такое же преобразование, как в доказательстве теоремы 1, приходим к равенству:

$$\iint_{\bar{R}} [\bar{\varphi}(\bar{u}_n) - \bar{\varphi}(\bar{u})](\bar{u}_n - \bar{u})\, dt\, dx + \frac{1}{2}\int_0^{\delta}\Big\{\int_{t_0+\gamma}^{t_1}\Big[\frac{\partial\bar{\varphi}(\bar{u}_n)}{\partial x} - \frac{\partial\bar{\varphi}(u)}{\partial x}\Big] d\tau\Big\}^2 dx =$$

$$= -\mu_n \int_0^{\delta} f_n(t_1, x)\, dx - \iint_{\bar{R}} \Big\{[\bar{v}_{1n}(t) - \bar{\varphi}(\bar{u}_1(t))]\left(\frac{x}{\delta} - 1\right) - m_n \frac{x}{\delta}\Big\}(\bar{u}_n - \bar{u})\, dt dx +$$

$$+ \frac{1}{\delta}\iint_{\bar{R}}\Big(\int_{t_0+\gamma}^{t_1} \{[\bar{v}_{1n}(\tau) - \bar{\varphi}(\bar{u}_1(\tau))] - m_n\}\, d\tau\Big)\Big[\frac{\partial\bar{\varphi}(\bar{u}_n)}{\partial x} - \frac{\partial\bar{\varphi}(\bar{u})}{\partial x}\Big] dt\, dx. \quad (2.51)$$

Первый и второй интегралы в правой части (2.51) стремятся к нулю при $n \to \infty$, так как $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = 0$ и $\bar{v}_{1n}(t) \to \bar{\varphi}(\bar{u}_1(t))$ равномерно на отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant t_0 + \gamma$. Аналогично тому, как было доказано неравенство (2.11), можно получить оценку:

$$\iint_{\bar{R}} \Big[\frac{\partial\bar{\varphi}(\bar{u}_n)}{\partial x}\Big]^2 dt\, dx \leqslant \bar{A},$$

где $\bar{A}$ не зависит от n. Применяя неравенство Коши — Буняковского к третьему интегралу в правой части (2.51), мы видим, что и этот интеграл стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{\bar{R}} [\bar{\varphi}(\bar{u}_n) - \bar{\varphi}(\bar{u})](\bar{u}_n - \bar{u})\, dt\, dx = 0. \quad (2.52)$$

Последовательность $\{\bar{u}_n(t, x)\}$ монотонно убывает и ограничена снизу, так как этими свойствами обладает последовательность $\{\bar{v}_n(t, x)\}$; поэтому в каждой точке $(t, x) \in \bar{R}$ существует

$$\lim_{n\to\infty} \bar{u}_n(t, x) = U(t, x).$$

Покажем, что

$$U(t, x) \equiv \bar{u}(t, x).$$

Возьмем произвольное $\eta > 0$ и обозначим через $E_{n,\eta}$ множество точек прямоугольника $\bar{R}$, в которых $|\bar{u}_n - \bar{u}| \geqslant \eta$. Так как $\bar{\varphi}''(u) > 0$ при $u > 0$, то всюду в $E_{n,\eta}$ справедливо неравенство:

$$|\bar{\varphi}(\bar{u}_n) - \bar{\varphi}(\bar{u})| \geqslant \bar{\varphi}(\eta);$$

отсюда имеем:

$$\iint\limits_{\bar{R}} [\bar{\varphi}(\bar{u}_n) - \bar{\varphi}(\bar{u})](\bar{u}_n - \bar{u})\, dt\, dx \geqslant \iint\limits_{E_{n,\eta}} [\bar{\varphi}(\bar{u}_n) - \bar{\varphi}(\bar{u})](\bar{u}_n - \bar{u})\, dt\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \eta\bar{\varphi}(\eta)\,\text{mes}\, E_{n,\eta}. \qquad (2.53)$$

Из соотношений (2.52) и (2.53) вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \text{mes}\, E_{n,\eta} = 0.$$

Ввиду произвольности η мы доказали, что в прямоугольнике $\bar{R}$ последовательность $\{\bar{u}_n(t, x)\}$ сходится к $\bar{u}(t, x)$ по мере; поэтому найдется подпоследовательность $\{\bar{u}_{n_k}(t, x)\}$, сходящаяся к $\bar{u}(t, x)$ почти всюду в $\bar{R}$ [см. ([15]), стр. 89]. Следовательно,

$$U(t, x) = \bar{u}(t, x)$$

почти всюду в R.

Повторяя рассуждения, с помощью которых была доказана непрерывность $u(t, x)$ в $R \setminus \Gamma$, можно показать, что функция $U(t, x)$ внутри $\bar{R}$ непрерывна и поэтому $U(t, x) = \bar{u}(t, x)$ всюду в $\bar{R}$. Таким образом, всюду в $\bar{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \bar{u}_n(t, x) = \bar{u}(t, x)$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \bar{v}_n(t, x) = \bar{\varphi}(\bar{u}(t, x)).$$

Переходя в неравенстве (2.47) к пределу сначала при $n \to \infty$, а затем при $t \to t_0$, $x \to 0$ и используя условие (2.36), а также непрерывность $\bar{u}(t, x)$ в $\bar{R}$, получаем:

$$\varliminf_{\substack{t\to t_0\\ x\to 0}} u(t, x) \geqslant \Phi(0, \varphi(0, u_1(t_0) - \varepsilon)) = u_1(t_0) - \varepsilon.$$

Отсюда вытекает справедливость неравенства (2.27), так как ε могло быть взято сколь угодно малым. Из неравенств (2.25) и (2.27) следует, что

$$\lim_{\substack{t\to t_0\\ x\to 0}} u(t, x) = u_1(t_0).$$

Совершенно так же доказываются непрерывность $u(t, x)$ и выполнение граничного условия в точках вида (t_0, X), $0 < t_0 \leqslant T$. Непрерывность $v(t, x)$, а следовательно, и $u(t, x)$, в точках $(0, 0)$ и $(0, X)$ можно доказать с помощью барьеров аналогично тому, как это сделано для уравнения теплопроводности в книге И. Г. Петровского ([16]) (стр. 344—345). Заметим, что равенство (2.24), к которому мы пришли иным путем, также может быть получено методом барьеров.

Наконец, по лемме 3, во всех точках $R \setminus \Gamma$, в которых $u(t, x) > 0$, функция $u(t, x)$ обладает непрерывными производными, входящими в уравнение (1.7), и удовлетворяет этому уравнению.

Теорема 4 доказана.

Замечание 1. В том частном случае, когда в условиях (2.1) $u_1(t) \equiv C_1 \geqslant 0$ и $u_2(t) \equiv C_2 \geqslant 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, можно доказать, что обобщенная производная $\frac{\partial \varphi(x, u(t, x))}{\partial x}$ ограничена по абсолютной величи-

не в R (а не только в любом R_δ); доказательство проводится аналогично тому, как это сделано в теореме 2.

Замечание 2. Обобщенное решение $u(t, x)$ задачи (1.7), (2.1) будет всюду в $R \setminus \Gamma$ удовлетворять уравнению (1.7) в обычном смысле, если предположения теоремы 4 дополнить следующим условием:

$$u_0(x) > 0 \text{ при } 0 < x < X. \tag{2.54}$$

В самом деле, пусть условие (2.54) выполнено. Сохраняя обозначения теоремы 4, возьмем произвольное $\delta > 0$ и построим функцию

$$Z_\delta(t, x) = \alpha_\delta e^{-\frac{M_3\pi^2 t}{(X-\delta)^2}} \sin \frac{\pi\left(x - \frac{\delta}{2}\right)}{X - \delta},$$

где

$$\alpha_\delta = \frac{1}{2} \min_{\frac{\delta}{2} \leqslant x \leqslant X - \frac{\delta}{2}} u_0(x), \quad M_3 = 2 \max_{0 \leqslant x \leqslant X} \varphi_u'(x, M_1).$$

Функция Z_δ удовлетворяет в R уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial Z_\delta}{\partial t} = M_3 \frac{\partial^2 Z_\delta}{\partial x^2};$$

функция v_n (при каждом n) удовлетворяет в R уравнению (2.14). Уравнение для разности $v_n - Z_\delta$ имеет вид:

$$\frac{\partial (v_n - Z_\delta)}{\partial t} = \varphi_u'(x, \Phi(x, v_n)) \frac{\partial^2 (v_n - Z_\delta)}{\partial x^2} + [\varphi_u'(x, \Phi(x, v_n)) - M_3] \frac{\partial^2 Z_\delta}{\partial x^2}. \tag{2.55}$$

Сравним Z_δ и v_n в прямоугольнике $R_{\frac{\delta}{2}} \left\{0 \leqslant t \leqslant T, \frac{\delta}{2} \leqslant x \leqslant X - \frac{\delta}{2}\right\}$. На нижнем основании и боковых сторонах этого прямоугольника $v_n > Z_\delta$; так как $\frac{\partial^2 Z_\delta}{\partial x^2} < 0$ внутри $R_{\frac{\delta}{2}}$ и при $t = T$, то из уравнения (2.55) следует, что разность $v_n - Z_\delta$ не может иметь отрицательного минимума внутри $R_{\frac{\delta}{2}}$ или при $t = T$; таким образом, $v_n > Z_{\frac{\delta}{2}}$ всюду в $R_{\frac{\delta}{2}}$. Прямоугольник $R_\delta \{0 \leqslant t \leqslant T, \delta \leqslant x \leqslant X - \delta\}$ содержится в $R_{\frac{\delta}{2}}$, поэтому при $(t, x) \in R_\delta$ имеем:

$$v_n(t, x) \geqslant Z_\delta(t, x) \geqslant \alpha_\delta e^{-\frac{M_3\pi^2 T}{(X-\delta)^2}} \sin \frac{\delta\pi}{2(X - \delta)} > 0.$$

Отсюда получаем: $u_n(t,x) \geqslant \beta_\delta > 0$, где β_δ не зависит от n; следовательно, и $u(t, x) \geqslant \beta_\delta$ в R_δ. Ввиду произвольности δ это означает, что $u(t, x) > 0$ всюду в $R \setminus \Gamma$, и, по теореме 4, функция $u(t, x)$ всюду в $R \setminus \Gamma$ удовлетворяет уравнению (1.7).

Рассмотрим теперь первую краевую задачу для уравнения (1) в полуполосе $D\{0 \leqslant t \leqslant T, 0 \leqslant x < \infty\}$.

Пусть заданы условия:

$$u(0, x) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x < \infty, \quad u(t, 0) = u_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2.56}$$

Определение 3. Функцию $u(t, x)$, неотрицательную, непрерывную, ограниченную в D и удовлетворяющую условиям (2.56), назовем обобщенным решением задачи (1), (2.56), если существует обобщенная производная $\frac{\partial \varphi(t, x, u(t, x))}{\partial x}$, суммируемая с квадратом в любой конечной

области и ограниченная в любой полуполосе вида $\{0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 < \delta \leqslant \leqslant x < \infty\}$, каково бы ни было $\delta > 0$, и если для всякой непрерывно дифференцируемой в D функции $f(t, x)$, равной нулю при $x = 0$, при $t = T$ и вне некоторой конечной области, выполняется равенство:

$$\iint\limits_D \left[\frac{\partial f}{\partial t} u - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi(t, x, u)}{\partial x}\right] dt\, dx + \int\limits_0^\infty f(0, x)\, u_0(x)\, dx = 0. \qquad (2.57)$$

ТЕОРЕМА 5. *Обобщенное решение задачи* (1), (2.56) *единственно, если функция* $\varphi(t, x, u)$ *непрерывна по всем аргументам, а* $\varphi'_u(t, x, u)$ *ограничена при* $(t, x) \in D$ *и ограниченных* u.

Доказательство теоремы 5 аналогично доказательству теоремы 1.

Существование обобщенного решения, как и раньше, установим для уравнения (1.7).

ТЕОРЕМА 6. *Пусть выполняются следующие предположения*:

1) $u_0(x)$ *и* $u_1(t)$ — *непрерывные функции своих аргументов*; $0 \leqslant u_i \leqslant M$, $i = 1, 2$, $u_0(0) = u_1(0)$.

2) *Функция* $\varphi(x, u_0(x))$ *удовлетворяет условию Липшица при* $0 \leqslant x < \infty$, *а функция* $\varphi(0, u_1(t))$ — *при* $0 \leqslant t \leqslant T$.

3) *В* $H_2\{0 \leqslant x < \infty,\ 0 < u \leqslant M + \varepsilon = M_1\}$ $(\varepsilon > 0)$ *функция* $\varphi(x, u)$ *имеет непрерывные производные пятого порядка, удовлетворяющие во всякой замкнутой области* $\{0 \leqslant x \leqslant X < \infty,\ 0 < m \leqslant u \leqslant M_1\}$ *условию Липшица по* x *и* u (*каковы бы ни были числа* X *и* $m > 0$).

4) *Функции* $\varphi(x, u)$ *и* $\varphi'_u(x, u)$ *ограничены в* H_2.

5) $\varphi''_{uu}(x, u) > 0$ *в* $H_0\{0 \leqslant x \leqslant \delta_0,\ 0 < u \leqslant M_1\}$, $\delta_0 > 0$.

6) *Функции* $\dfrac{[\varphi'_u(x, u)]^2}{\varphi''_{uu}(x, u)}$ *и* $\dfrac{\partial}{\partial u}\left[\dfrac{\varphi'_x(x, u)}{\varphi'_u(x, u)}\right]$ *ограничены в* H_0.

7) $\varphi(x, u) \to \infty$ *при* $u \to \infty$ *равномерно по* x, $0 \leqslant x < \infty$.

Тогда существует обобщенное решение $u(t, x)$ *задачи* (1.7), (2.56), *причем в тех точках* D, *где* $t > 0$, $x > 0$ *и* $u(t, x) > 0$, *функция* $u(t, x)$ *имеет непрерывные производные, входящие в уравнение* (1.7), *и удовлетворяет ему в обычном смысле.*

Доказательство. Положим

$$v_0(x) = \varphi(x, u_0(x)), \quad v_1(t) = \varphi(0, u_1(t)), \quad M_2 = \sup_{0 \leqslant x < \infty} \varphi(x, M_1).$$

Как в доказательстве теоремы 2, построим последовательность $\{\widetilde{v}_n(x)\}$ со свойствами (1.15); как в теореме 4, построим последовательность $\{v_{1n}(t)\}$, удовлетворяющую условиям (2.3) (где функции $v_{0n}(x)$ заменены на $\widetilde{v}(x)$, а соотношения, содержащие $v_{2n}(t)$, отсутствуют). По лемме 1, в прямоугольнике $D_n\{0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant n\}$ существует решение $v_n(t, x)$ уравнения (1.17) при условиях:

$$v_n(0, x) = \widetilde{v}_n(x), \quad v_n(t, 0) = v_{1n}(t), \quad v_n(t, n) = M_2.$$

Как в теореме 2, можно показать, что в каждой точке D существует

$$\lim_{n \to \infty} \Phi(x, v_n(t, x)) \equiv u(t, x),$$

причем функция $u(t, x)$ неотрицательна и ограничена в D. Как в тео-

реме 4, докажем, что существует обобщенная производная $\frac{\partial \varphi(x, u(t, x))}{\partial x}$, суммируемая с квадратом в любой конечной области, и выполняется равенство (2.57).

Рассмотрим $\frac{\partial v_n}{\partial x}$ в прямоугольнике $R_{n,\delta}\{0 \leqslant t \leqslant T, \quad 0 < \delta \leqslant x \leqslant n\}$; пусть $\delta < \frac{\delta_0}{2}$, где δ_0 — число, входящее в условия 5) и 6). Рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 2, для значений $\left|\frac{\partial v_n}{\partial x}\right|$ при $t = 0$ и при $x = n$ можно получить оценку, не зависящую от n. Применяя метод С. Н. Бернштейна (аналогично тому, как это делалось в доказательстве теоремы 4), установим, что в прямоугольнике $\left\{0 \leqslant t \leqslant T, \frac{\delta}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\delta}{2}\right\}$ и, в частности, при $x = \delta$ производная $\frac{\partial v_n}{\partial x}$ также ограничена по модулю постоянной, не зависящей от n.

Так как функция $\frac{\partial v_n}{\partial x}$ удовлетворяет уравнению (1.21), для которого имеет место принцип максимума, то в прямоугольнике $R_{n,\delta}$ $\left|\frac{\partial v_n}{\partial x}\right| \leqslant C_8$, где C_8 не зависит от n. Поэтому

$$\left|\frac{\partial \varphi(x, u(t, x))}{\partial x}\right| \leqslant C_8 \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant T, \quad \delta \leqslant x < \infty.$$

Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 2, нетрудно показать, что $u(t, x)$ непрерывна при $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < x < \infty$. Непрерывность $u(t, x)$ в точках оси t устанавливается методом, примененным в доказательстве теоремы 4. Наконец, вследствие леммы 3, во всех точках D, где $t > 0$, $x > 0$ и $u(t, x) > 0$, функция $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (1.7) в обычном смысле.

В заключение этого параграфа сделаем следующее

Замечание. Как уже указывалось во введении, в работах ([6]), ([7]) построены частные решения уравнения (2), у которых первые производные разрывны. Можно показать, что эти решения в любом прямоугольнике $R\{0 \leqslant t \leqslant T, \ 0 \leqslant x \leqslant X\}$ или полуполосе $D\{0 \leqslant t \leqslant T, \ 0 \leqslant x < \infty\}$ являются обобщенными решениями первой краевой задачи для уравнения (2) с соответствующими начальными и граничными условиями. На основании доказанных выше теорем 3 и 5 отсюда следует, что задача (1), (2.1) и задача (1), (2.56) могут не иметь гладкого решения во всех точках рассматриваемой области.

§ 3. Вторая краевая задача

Перейдем к исследованию второй краевой задачи для уравнения (1). Как и в § 2, сначала рассмотрим эту задачу для прямоугольника R, а затем — для полуполосы D.

Итак, в прямоугольнике $R\{0 \leqslant t \leqslant T, \ 0 \leqslant x \leqslant X\}$ будем рассматривать краевую задачу для уравнения (1) при условиях:

$$\left.\begin{aligned} u(0, x) = u_0(x) \geqslant 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant X, \\ \frac{\partial \varphi(t, 0, u(t, 0))}{\partial x} = -g_1(t) \leqslant 0, \\ \frac{\partial \varphi(t, X, u(t, X))}{\partial x} = g_2(t) \geqslant 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

Определение 4. Функцию $u(t, x)$, неотрицательную и непрерывную в прямоугольнике R, назовем обобщенным решением задачи (1), (3.1), если существует обобщенная производная $\frac{\partial\varphi(t, x, u(t, x))}{\partial x}$, ограниченная в R, и для любой непрерывно дифференцируемой в R функции $f(t, x)$, равной нулю при $t = T$, выполняется равенство:

$$\iint\limits_R \left[\frac{\partial f}{\partial t} u - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi(t, x, u)}{\partial x}\right] dt\,dx + \int_0^X f(0, x)\,u_0(x)\,dx +$$
$$+ \int_0^T [f(t, 0)\,g_1(t) + f(t, X)\,g_2(t)]\,dt = 0. \tag{3.2}$$

ТЕОРЕМА 7. *Обобщенное решение задачи* (1), (3.1) *единственно, если функция* $\varphi(t, x, u)$ *непрерывна по всем аргументам, а* $\varphi'_u(t, x, u)$ *ограничена при* $(t, x) \in R$ *и ограниченных* u.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Существование обобщенного решения, как и выше, будет доказано для уравнения (1.7); условия (3.1) для этого уравнения имеют вид:

$$u(0, x) = u_0(x) \geqslant 0, \quad \frac{\partial\varphi(0, u(t, 0))}{\partial x} = -g_1(t) \leqslant 0, \quad \frac{\partial\varphi(X, u(t, X))}{\partial x} = g_2(t) \geqslant 0. \tag{3.3}$$

ТЕОРЕМА 8. *Пусть выполняются следующие предположения:*

1) $u_0(x)$, $g_1(t)$ *и* $g_2(t)$ — *неотрицательные непрерывные функции своих аргументов; функция* $\varphi(x, u_0(x))$ *удовлетворяет условию Липшица при* $0 \leqslant x \leqslant X$.

2. *В* $H_3\{0 \leqslant x \leqslant X,\ 0 < u < \infty\}$ *функция* $\varphi(x, u)$ *имеет непрерывные производные пятого порядка, удовлетворяющие при* $0 < m \leqslant u \leqslant M < \infty$ *условию Липшица по* x *и* u (*каковы бы ни были числа* M *и* $m > 0$).

Тогда существует обобщенное решение $u(t, x)$ *задачи* (1.7), (3.3), *причем в тех точках* $R \setminus \Gamma$, *где* $u(t, x) > 0$, *функция* $u(t, x)$ *имеет непрерывные производные, входящие в уравнение* (1.7), *и удовлетворяет ему в обычном смысле.*

Доказательство. Построим монотонно убывающие последовательности бесконечно дифференцируемых функций $\{v_{0n}(x)\}$, $\{g_{1n}(t)\}$, $\{g_{2n}(t)\}$, которые равномерно сходятся соответственно к функциям $\varphi(x, u_0(x))$, $g_1(t)$, $g_2(t)$ и обладают следующими свойствами:

$$\left.\begin{gathered}
0 < m_n \leqslant v_{0n}(x) \leqslant N, \\
|v'_{0n}(x)| \leqslant N_1, \quad 0 < g_{in}(t) \leqslant N_1, \quad i = 1, 2, \\
v'_{0n}(0) = -g_{1n}(0), \quad v'_{0n}(X) = g_{2n}(0), \\
v'''_{0n}(0) = -\Phi'_v(0, v_{0n}(0))\,g'_{1n}(0) + \\
+ \frac{1}{\Phi'_v(0, v_{0n}(0))}[\Phi''_{xv}(0, v_{0n}(0)) - \Phi''_{vv}(0, v_{0n}(0))\,g_{1n}(0)]\,v''_{0n}(0), \\
v'''_{0n}(X) = \Phi'_v(X, v_{0n}(X))\,g'_{2n}(0) + \\
+ \frac{1}{\Phi'_v(X, v_{0n}(X))}[\Phi''_{xv}(X, v_{0n}(X)) + \Phi''_{vv}(X, v_{0n}(X))\,g_{2n}(0)]\,v''_{0n}(X).
\end{gathered}\right\} \tag{3.4}$$

Здесь, как и выше, $\varphi(x, \Phi(x, v)) = v$, а постоянные N, N_1 не зависят от n. Существование таких последовательностей обеспечивается условием 1) теоремы.

Зафиксируем какое-либо n и введем в рассмотрение функцию $A_n(x, v)$ с такими свойствами: $A_n(x, v) = \Phi'_v(x, v)$ при $0 \leqslant x \leqslant X$, $v \geqslant m_n$; при $0 \leqslant x \leqslant X$, $v \leqslant m_n$ выполняется неравенство $A_n(x, v) \geqslant \alpha_n > 0$ и функция $A_n(x, v)$ имеет непрерывные производные четвертого порядка, удовлетворяющие условию Липшица по x и v.

Вследствие теоремы 14 и замечания 1 к этой теореме из работы ([11]) [см. также ([3]), теорема 1], в прямоугольнике R существует единственное решение $v_n(t, x)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = A_n(x, v)\frac{\partial v}{\partial t} \tag{3.5}$$

при условиях:

$$v_n(0, x) = v_{0n}(x), \quad \frac{\partial v_n(t, 0)}{\partial x} = -g_{1n}(t), \quad \frac{\partial v_n(t, X)}{\partial x} = g_{2n}(t);$$

при этом производные $\frac{\partial v_n}{\partial t}, \frac{\partial v_n}{\partial x}, \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}$ удовлетворяют в R условию Липшица. С помощью принципа максимума легко установить, что $v_n(t, x) \geqslant m_n$ всюду в R; следовательно, функция $v_n(t, x)$ удовлетворяет в прямоугольнике R не только уравнению (3.5), но и уравнению (1.17).

Разность $v_n - v_{n+1} = z_n$ удовлетворяет в прямоугольнике R уравнению (1.20); так как каждая из последовательностей $\{v_{0n}(x)\}$, $\{g_{1n}(t)\}$ и $\{g_{2n}(t)\}$ монотонно убывает, то имеют место неравенства:

$$z_n(0, x) > 0, \quad \frac{\partial z_n(t, 0)}{\partial x} < 0, \quad \frac{\partial z_n(t, X)}{\partial x} > 0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Пользуясь принципом максимума, получаем, что $v_n(t, x) > v_{n+1}(t, x)$ всюду в R. Поэтому

$$v_n(t, x) \leqslant M = \max_R v_1(t, x) \text{ для } n = 1, 2, \ldots;$$

кроме того, в каждой точке R существует $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x, v_n(t, x)) = u(t, x)$.

Рассуждая, как в доказательстве леммы 1, можно показать, что внутри R существуют и непрерывны все производные v_n, которые входят в уравнения, получающиеся дифференцированием обеих частей (1.17) четыре раза по x, а также один раз по t. Применяя принцип максимума к уравнению (1.21) для функции $p_n(t, x) = \frac{\partial v_n}{\partial x}$ и учитывая условия (3.4), получим, что всюду в R справедлива оценка:

$$\left|\frac{\partial v_n}{\partial x}\right| \leqslant N_1, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{3.6}$$

Далее, как в доказательстве теоремы 2, устанавливаем, что существует ограниченная в R обобщенная производная $\frac{\partial \varphi(x, u(t, x))}{\partial x}$, что выполняется равенство (3.2) и что функция $u(t, x)$ непрерывна в R и во всех точках $R \setminus \Gamma$, в которых $u > 0$, удовлетворяет уравнению (1.7) в обычном смысле.

Теорема 8 доказана.

Замечание 1. Обобщенное решение $u(t, x)$ задачи (1.7), (3.3) удовлетворяет граничным условиям при $x = 0$ и $x = X$ в следующем смысле:

какова бы ни была непрерывно дифференцируемая в R функция $f(t, x)$, выполняются соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\int_0^T f(t, x)\frac{\partial\varphi(x, u(t, x))}{\partial x}\,dt &= -\int_0^T f(t, 0)\,g_1(t)\,dt, \\ \lim_{x\to X}\int_0^T f(t, x)\frac{\partial\varphi(x, u(t, x))}{\partial x}\,dt &= \int_0^T f(t, X)\,g_2(t)\,dt, \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

если функцию $\frac{\partial\varphi(x, u(t, x))}{\partial x}$ изменить, быть может, на множестве меры нуль.

Действительно, в силу неравенства (3.6), последовательность $\left\{\frac{\partial v_n(t, x)}{\partial x}\right\}$ при любом x, $0 \leqslant x \leqslant X$, слабо компактна в $L_2(0, T)$; применяя «диагональный» метод, можно выбрать из нее подпоследовательность, слабо сходящуюся в $L_2(0, T)$ при всех x из некоторого счетного всюду плотного на отрезке $0 \leqslant x \leqslant X$ множества E.

Покажем, что эта подпоследовательность $\Bigl($которую мы будем также обозначать через $\left\{\frac{\partial v_n(t, x)}{\partial x}\right\}\Bigr)$ слабо сходится в $L_2(0, T)$ при любом x_0, $0 \leqslant x_0 < X$. Функции v_n удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial\Phi(x, v_n)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2};$$

умножим обе части этого уравнения на непрерывно дифференцируемую в R функцию $f(t, x)$ и проинтегрируем по прямоугольнику $R_p\,\{0 \leqslant t \leqslant T,\ x_0 \leqslant x \leqslant x_p\}$, где $x_p \in E$; после интегрирования по частям находим:

$$\int_0^T f(t, x_0)\frac{\partial v_n(t, x_0)}{\partial x}\,dt = \int_0^T f(t, x_p)\frac{\partial v_n(t, x_p)}{\partial x}\,dt - \int_{x_0}^{x_p} f(T, x)\,\Phi(x, v_n)\,dx + \\ + \int_{x_0}^{x_p} f(0, x)\,\Phi(x, v_n)\,dx - \iint_{R_p}\left[\frac{\partial f}{\partial t}\Phi(x, v_n) - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial v_n}{\partial x}\right]dt\,dx. \tag{3.8}$$

Написав аналогичное равенство для v_k, $k \neq n$, и вычтя его из (3.8), получим:

$$\int_0^T f(t, x_0)\left[\frac{\partial v_n(t, x_0)}{\partial x} - \frac{\partial v_k(t, x_0)}{\partial x}\right]dt = \\ = \iint_{R_p}\left\{\frac{\partial f}{\partial t}[\Phi(x, v_k) - \Phi(x, v_n)] - \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x} - \frac{\partial v_n}{\partial x}\right)\right\}dt\,dx + \\ + \int_{x_0}^{x_p} f(T, x)\,[\Phi(x, v_k) - \Phi(x, v_n)]\,dx + \int_{x_0}^{x_p} f(0, x)\,[\Phi(x, v_n) - \Phi(x, v_k)]\,dx + \\ + \int_0^T f(t, x_p)\left[\frac{\partial v_n(t, x_p)}{\partial x} - \frac{\partial v_k(t, x_p)}{\partial x}\right]dt. \tag{3.9}$$

Каждый из первых трех интегралов в правой части (3.9) стремится к нулю при $x_p \to x_0$, так как их подынтегральные функции ограничены

(независимо от n и k). Последний интеграл в правой части (3.9) стремится к нулю при $n, k \to \infty$, так как $x_0 \in E$. Так как последовательность $\left\{\frac{\partial v_n}{\partial x}\right\}$ равномерно ограничена, то $\left\{\frac{\partial v_n(t, x_0)}{\partial x}\right\}$ слабо сходится в $L_2(0, T)$ к некоторой функции $w(t, x_0)$ при любом x_0, $0 \leqslant x_0 < X$. Ввиду того, что последовательность $\left\{\frac{\partial v_n}{\partial x}\right\}$ слабо сходится в $L_2(R)$ к $\frac{\partial \varphi(x, u(t, x))}{\partial x}$, имеем:

$$w(t, x) = \frac{\partial \varphi(x, u(t, x))}{\partial x}$$

почти всюду в R.

Напишем равенство (3.8) для прямоугольника $R^{\xi}\{0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant \xi\}$, $\xi > 0$:

$$\int_0^T f(t, \xi) \frac{\partial v_n(t, \xi)}{\partial \xi} dt = -\int_0^T f(t, 0) g_{1n}(t) dt +$$

$$+ \iint_{R^{\xi}} \left[\frac{\partial f}{\partial t} \Phi(x, v_n) - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial v_n}{\partial x}\right] dt\, dx + \int_0^{\xi} f(T, x) \Phi(x, v_n) dx - \int_0^{\xi} f(0, x) \Phi(x, v_n) dx.$$

Переходя здесь к пределу сначала при $n \to \infty$, а затем при $\xi \to 0$ установим первое из соотношений (3.7). Второе соотношение доказывается аналогично.

Замечание 2. Такими же рассуждениями нетрудно показать, что производная $\frac{\partial \varphi(x, u(t, x))}{\partial x}$ слабо непрерывна по x в следующем смысле: какова бы ни была непрерывно дифференцируемая в R функция $f(t, x)$, для всех x_0, $0 \leqslant x_0 \leqslant X$, выполняется равенство

$$\lim_{x \to x_0} \int_0^T f(t, x) \frac{\partial \varphi(x, u(t, x))}{\partial x} dt = \int_0^T f(t, x_0) \frac{\partial \varphi(x_0, u(t, x_0))}{\partial x} dt,$$

если функцию $\frac{\partial \varphi(x, u(t, x))}{\partial x}$ изменить, быть может, на множестве меры нуль.

Обобщенные решения задачи Коши и первой краевой задачи для уравнения (1.7) также обладают производной $\frac{\partial \varphi(x, u(t, x))}{\partial x}$, слабо непрерывной по x в указанном смысле.

Рассмотрим теперь уравнение (1) в полуполосе $D\{0 \leqslant t \leqslant T, 0 \leqslant x < \infty\}$. Пусть заданы условия:

$$u(0, x) = u_0(x) \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant x < \infty,$$

$$\frac{\partial \varphi(t, 0, u(t, 0))}{\partial x} = -g_1(t) \leqslant 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3.10}$$

Определение 5. Функцию $u(t, x)$, неотрицательную, непрерывную и ограниченную в D, назовем обобщенным решением задачи (1), (3.10), если существует ограниченная в D обобщенная производная $\frac{\partial \varphi(t, x, u(t, x))}{\partial x}$ и для любой непрерывно дифференцируемой в D функции $f(t, x)$, равной нулю при $t = T$ и вне некоторой конечной области, выполняется равенство:

$$\iint_D \left[\frac{\partial f}{\partial t} u - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi(t, x, u)}{\partial x}\right] dt\, dx + \int_0^{\infty} f(0, x) u_0(x) dx + \int_0^T f(t, 0) g_1(t) dt = 0. \tag{3.11}$$

ТЕОРЕМА 9. *Обобщенное решение задачи* (1), (3.10) *единственно, если функция* $\varphi(t, x, u)$ *непрерывна по всем аргументам, а* $\varphi'_u(t, x, u)$ *ограничена при* $(t, x) \in D$ *и ограниченных* u.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Для уравнения (1.7) в полуполосе D при условиях:

$$u(0, x) = u_0(x) \geqslant 0, \quad \frac{\partial \varphi(0, u(t, 0))}{\partial x} = -g_1(t) \leqslant 0 \tag{3.12}$$

имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 10. *Пусть выполняются следующие предположения:*

1) *Функции* $u_0(x)$ *и* $g_1(t)$ *неотрицательны, непрерывны и ограничены; функция* $\varphi(x, u_0(x))$ *удовлетворяет условию Липшица при* $0 \leqslant x < \infty$, *а функция* $g_1(t)$ — *при* $0 \leqslant t \leqslant T$.

2) *В* $H_4\{0 \leqslant x < \infty,\ 0 < u < \infty\}$ *функция* $\varphi(x, u)$ *имеет непрерывные производные пятого порядка, удовлетворяющие во всякой замкнутой области* $\{0 \leqslant x \leqslant X < \infty,\ 0 < m \leqslant u \leqslant M < \infty\}$ *условию Липшица по* x *и* u (*каковы бы ни были числа* X, M *и* $m > 0$).

3) *Функции* $\varphi(x, u)$ *и* $\varphi'_u(x, u)$ *ограничены при* $(x, u) \in H_4$ *и ограниченных* u.

4) *Отношения* $\dfrac{\varphi'_u(x, u)}{\varphi(x, u)}$ *и* $\dfrac{1}{\varphi(x, u)}$ *равномерно по* x *стремятся к нулю при* $u \to \infty$.

Тогда существует обобщенное решение $u(t, x)$ *задачи* (1.7), (3.12), *причем в тех точках* D, *где* $t > 0$, $x > 0$ *и* $u(t, x) > 0$, *функция* $u(t, x)$ *имеет непрерывные производные, входящие в уравнение* (1.7), *и удовлетворяет ему в обычном смысле.*

Доказательство. Построим монотонно убывающие последовательности бесконечно дифференцируемых функций $\{v_{0n}(x)\}$ и $\{g_{1n}(t)\}$, которые равномерно сходятся соответственно к функциям $\varphi(x, u_0(x))$, $g_1(t)$ и обладают следующими свойствами:

$$0 < m_n \leqslant v_{0n}(x) \leqslant N, \quad |v'_{0n}(x)| \leqslant N_1 \text{ при } 0 \leqslant x < \infty,$$

$$0 < g_{1n}(t) \leqslant N_1, \qquad |g'_{1n}(t)| \leqslant N_2 \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$v'''_{0n}(0) = -\Phi'_v(0, v_{0n}(0))\, g'_{1n}(0) +$$

$$+ \frac{1}{\Phi'_v(0, v_{0n}(0))} [\Phi''_{xv}(0, v_{0n}(0)) - \Phi''_{vv}(0, v_{0n}(0)) g_{1n}(0)]\, v''_{0n}(0).$$

Здесь N, N_1, N_2 — постоянные, не зависящие от n. В силу условия 1) теоремы, такое построение возможно.

Далее построим последовательность бесконечно дифференцируемых функций $\{\tilde{v}_n(x)\}$, удовлетворяющих соотношениям:

$$\tilde{v}_n(x) = v_{0n}(x) \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant n-2, \quad \tilde{v}_n(n-1) = N, \quad \tilde{v}'_n(n-1) = N_1 + \frac{1}{n},$$

$$v_{0,\,n+1}(x) \leqslant \tilde{v}_{n+1}(x) \leqslant \tilde{v}_n(x) \leqslant N, \quad |\tilde{v}'_n(x)| \leqslant N_1 + \frac{1}{n} \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant n-1,$$

$$\tilde{v}_n(x) = N + \left(N_1 + \frac{1}{n}\right)(x - n + 1) \text{ при } x \geqslant n-1.$$

Как и в теореме 8, можно показать, что при каждом n в прямоугольнике D_n $\{0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant n\}$ существует решение $v_n(t, x)$ уравнения (1.17) при условиях:

$$v_n(0, x) = \widetilde{v}_n(x), \qquad \frac{\partial v_n(t, 0)}{\partial x} = -g_{1n}(t), \qquad \frac{\partial v_n(t, n)}{\partial x} = N_1 + \frac{1}{n}.$$

При этом $v_n(t, x) \geqslant m_n$ всюду в D_n; внутри D_n уравнение (1.17) можно дифференцировать четыре раза по x, а также один раз по t.

Применяя принцип максимума к уравнению (1.21), которому внутри D_n удовлетворяет функция $\frac{\partial v_n}{\partial x}$, находим:

$$\left|\frac{\partial v_n}{\partial x}\right| \leqslant N_1 + \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3.13}$$

Разность $v_n - v_{n+1} = z_n$ удовлетворяет в прямоугольнике D_n уравнению (1.20), а на границе этого прямоугольника — неравенствам:

$$z_n(0, x) \geqslant 0, \qquad \frac{\partial z_n(t, 0)}{\partial x} < 0, \qquad \frac{\partial z_n(t, n)}{\partial x} \geqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0.$$

Используя принцип максимума, получаем отсюда, что $v_n(t, x) \geqslant v_{n+1}(t, x)$ всюду в $D_n (n = 1, 2, \ldots)$. Поэтому в каждой точке D существует

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(x, v_n(t, x)) = u(t, x) \geqslant 0.$$

Вследствие неравенств (3.13), функция $\varphi(x, u(t, x))$ имеет в D ограниченную обобщенную производную $\frac{\partial \varphi(x, u(t, x))}{\partial x}$.

Докажем, что функция $u(t, x)$ ограничена в D. Построим семейство бесконечно дифференцируемых при $0 \leqslant x < \infty$ функций $h_n(x)$ со следующими свойствами:

$$h_n(0) = h_n(n) = 0, \quad h_n'(0) = 1, \quad h_n'(n) = -1,$$

$$h_n(x) > 0 \text{ при } 0 < x < n,$$

$$\left|\frac{d^k h_n(x)}{dx^k}\right| \leqslant N_3, \quad k = 0, 1, 2, \quad 0 \leqslant x < \infty, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Рассмотрим (при фиксированном n) в прямоугольнике D_n функцию

$$y_n(t, x) = [v_n(t, x) + w_n(t, x)]\, e^{-\alpha t},$$

где $\alpha > 0$ и

$$w_n(t, x) = h_n(x)\left\{\left(1 - \frac{x}{n}\right)[g_{1n}(t) + 1] + \frac{x}{n}\left(N_1 + \frac{1}{n} + 1\right)\right\}.$$

Легко видеть, что в D_n справедливы неравенства:

$$0 \leqslant w_n(t, x) \leqslant N_4, \quad \max\left\{\left|\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\right|, \left|\frac{\partial w_n}{\partial t}\right|\right\} \leqslant N_5, \tag{3.14}$$

где постоянные N_4, N_5 не зависят от n.

Функция $y_n(t, x)$ удовлетворяет в D_n уравнению:

$$\varphi_u'(x, \Phi(x, v_n)) \frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2} - \frac{\partial y_n}{\partial t} = \alpha y_n + \left[\varphi_u'(x, \Phi(x, v_n)) \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} - \frac{\partial w_n}{\partial t}\right] e^{-\alpha t} \tag{3.15}$$

и краевым условиям:

$$y_n(0, x) = \widetilde{v}_n(x) + w_n(0, x) > 0, \qquad \frac{\partial y_n(t, 0)}{\partial x} = e^{-\alpha t} > 0,$$

$$\frac{\partial y_n(t, n)}{\partial x} = -e^{-\alpha t} < 0. \tag{3.16}$$

Ввиду условий (3.16), максимум $y_n(t, x)$ в D_n не может достигаться ни при $x = 0$, ни при $x = n$. Если этот максимум достигается при $t = 0$, то всюду в D_n должно выполняться неравенство $y_n \leqslant N + N_4$, откуда следует:

$$v_n(t, x) \leqslant (N + N_4) e^{\alpha T} = N_6. \tag{3.17}$$

Пусть теперь $\max\limits_{D_n} y_n(t, x)$ достигается внутри D_n или при $t = T$; тогда в точке максимума y_n имеем, согласно (3.15):

$$\alpha y_n + \left[\varphi'_u(x, u_n) \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} - \frac{\partial w_n}{\partial t}\right] e^{-\alpha t} \leqslant 0. \tag{3.18}$$

Здесь $u_n(t, x) = \Phi(x, v_n(t, x))$. Неравенство (3.18) можно переписать так:

$$\left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial w_n}{\partial t} - w_n\right) \frac{1}{\varphi(x, u_n)} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} \frac{\varphi'_u(x, u_n)}{\varphi(x, u_n)} \geqslant 1. \tag{3.19}$$

Ввиду условий 3), 4) теоремы, из неравенств (3.14) и (3.19) вытекает, что $u_n(t, x) \leqslant U_0$ в точке максимума y_n, где U_0 — постоянная, не зависящая от n. Таким образом,

$$y_n(t, x) \leqslant \sup_{0 \leqslant x < \infty} \varphi(x, U_0) + N_4 = N_7$$

в рассматриваемой точке и, следовательно, всюду в D_n. Поэтому всюду в D_n

$$v_n(t, x) \leqslant N_7 e^{\alpha T} = N_8. \tag{3.20}$$

Объединяя неравенства (3.17) и (3.20), получаем оценку:

$$v_n(t, x) \leqslant \max(N_6, N_8) = N_9,$$

откуда

$$u_n(t, x) \leqslant \sup_{0 \leqslant x < \infty} \Phi(x, N_9) = M \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

В пределе при $n \to \infty$ получаем:

$$u(t, x) \leqslant M.$$

Как в теореме 2, можно показать, что функция $u(t, x)$ удовлетворяет равенству (3.11), а в тех точках D, где $t > 0$, $x > 0$ и $u(t, x) > 0$, — уравнению (1.7).

Остановимся на вопросе о том, насколько оправданным является требование неотрицательности функций $g_i(t)$, $i = 1, 2$, в граничных условиях (3.1), (3.10). Пусть

$$\varphi(t, x, u) = u^\nu, \quad \nu > 1;$$

тогда уравнение (1) представляет собою уравнение одномерной нестационарной фильтрации при политропическом режиме [см. ([1])], где $u(t, x)$ — переменная плотность фильтрующейся жидкости (или газа). Как показано в книге ([1]), поток жидкости через поперечное сечение равен $-a^2 \dfrac{\partial u^\nu}{\partial x}$, где a — некоторая постоянная. Таким образом, при $g_i(t) \geqslant 0$, $i = 1, 2$, условия (3.1), (3.10) означают, что жидкость не вытекает из рассматриваемого пласта ($0 \leqslant x \leqslant X$ или $0 \leqslant x < \infty$) через его границу ($x = 0$, $x = X$ или только $x = 0$ соответственно).

Предположим, что в условиях (3.10) функция $g_1(t)$ может принимать отрицательные значения; это соответствует тому, что допускается исте-

чение жидкости из пласта ($0 \leqslant x < \infty$) через его границу $x = 0$. Вообще говоря, в этом случае возможно, что к некоторому моменту времени $t_0 < T$ в пласте не останется жидкости (т. е. $u(t_0, x) \equiv 0$, $0 \leqslant x < \infty$), и если $g_1(t) < 0$ для $t > t_0$, то задача теряет физический смысл.

Таким образом, неотрицательность функций $g_1(t)$ и $g_2(t)$ в условиях (3.1) и (3.10) согласуется с физической сущностью рассматриваемых задач *.

§ 4. Свойства обобщенных решений уравнения (1.7)

Установим некоторые свойства, которыми обладают обобщенные решения задачи Коши и краевых задач для уравнения (1.7).

ТЕОРЕМА 11 (принцип максимума). *Пусть выполняются предположения теоремы 2, функция $u(t, x)$ является обобщенным решением задачи Коши* (1.7), (1.1) *в полосе $G\{0 \leqslant t \leqslant T,\ -\infty < x < \infty\}$ и имеют место неравенства $0 \leqslant m \leqslant u_0(x) \leqslant M$. Тогда $m \leqslant u(t, x) \leqslant M$ всюду в G.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{v_n(t, x)\}$, построенную при доказательстве теоремы 2. Как мы видели, функция

$$U(t, x) = \lim_{n\to\infty} \Phi(x, v_n(t, x))$$

является обобщенным решением задачи (1.7), (1.1); в силу единственности такого решения (теорема 1),

$$U(t, x) \equiv u(t, x).$$

Пользуясь принципом максимума для уравнения (1.17), которому удовлетворяют функции $v_n(t, x)$, находим:

$$\inf_{-\infty < x < \infty} \varphi(x, u_0(x)) < v_n(t, x) \leqslant M_2 = \sup_{-\infty < x < \infty} \varphi(x, M + \varepsilon),$$

откуда

$$m < \Phi(x, v_n(t, x)) \leqslant M + \varepsilon.$$

В пределе при $n \to \infty$ получаем:

$$m \leqslant u(t, x) \leqslant M + \varepsilon.$$

Ввиду того, что в теореме 2 можно было взять $\varepsilon > 0$ как угодно малым, имеем:

$$m \leqslant u(t, x) \leqslant M.$$

Аналогично могут быть доказаны следующие предложения.

ТЕОРЕМА 12. *Пусть выполняются предположения теоремы 4, функция $u(t, x)$ является обобщенным решением первой краевой задачи* (1.7), (2.1) *в прямоугольнике $R\{0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant X\}$ и имеют место неравенства $0 \leqslant m \leqslant u_i \leqslant M$, $i = 0, 1, 2$. Тогда $m \leqslant u(t, x) \leqslant M$ всюду в R.*

ТЕОРЕМА 13. *Пусть выполняются предположения теоремы 6, функция $u(t, x)$ является обобщенным решением первой краевой задачи* (1.7), (2.56) *в полуполосе $D\{0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x < \infty\}$ и имеют место неравенства $0 \leqslant m \leqslant u_i \leqslant M$, $i = 0,1$. Тогда $m \leqslant u(t, x) \leqslant M$ всюду в D.*

ТЕОРЕМА 14. *Пусть выполняются предположения теоремы 8, функция $u(t, x)$ является обобщенным решением второй краевой задачи* (1.7), (3.3) *в прямоугольнике R и имеет место неравенство $u_0(x) \geqslant m \geqslant 0$. Тогда $u(t, x) \geqslant m$ всюду в R.*

---

* Этим замечанием авторы обязаны Г. И. Баренблатту.

ТЕОРЕМА 15. *Пусть выполняются предположения теоремы* 10, *функция* $u(t, x)$ *является обобщенным решением второй краевой задачи* (1.7), (3.12) *в полуполосе* D *и имеет место неравенство* $u_0(x) \geqslant m \geqslant 0$. *Тогда* $u(t, x) \geqslant m$ *всюду в* D.

Далее, для уравнения (1.7) справедлива следующая теорема о монотонной зависимости обобщенного решения задачи Коши от начальной функции.

ТЕОРЕМА 16. *Пусть выполняются предположения теоремы* 2, *и пусть* $u^{(1)}(t, x)$, $u^{(2)}(t, x)$ — *два обобщенных решения задачи Коши для уравнения* (1.7) *в полосе* $G\{0 \leqslant t \leqslant T, \ -\infty < x < \infty\}$ *с условиями* $u^{(i)}(0, x) = u_0^{(i)}(x)$, $i = 1, 2$, *причем*

$$u_0^{(1)}(x) \leqslant u_0^{(2)}(x) \quad \text{при} -\infty < x < \infty. \tag{4.1}$$

Тогда $u^{(1)}(t, x) \leqslant u^{(2)}(t, x)$ *всюду в* G.

Доказательство. Вследствие единственности обобщенного решения задачи Коши, имеем:

$$u^{(i)}(t, x) = \lim_{n\to\infty} \Phi(x, v_n^{(i)}(t, x)), \quad i = 1, 2,$$

где последовательности $\{v_n^{(i)}\}$ — такие, как последовательность $\{v_n\}$, построенная при доказательстве теоремы 2. Ввиду соотношений (4.1) можно обеспечить выполнение неравенств

$$v_n^{(1)}|_{\Gamma_n} \leqslant v_n^{(2)}|_{\Gamma_n}, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

применяя принцип максимума к уравнению (1.20) для разности $v_n^{(1)} - v_n^{(2)}$, получаем, что $v_n^{(1)}(t, x) \leqslant v_n^{(2)}(t, x)$ всюду в G_n. Устремляя n к бесконечности, приходим к утверждению теоремы.

Аналогично доказываются предложения, формулируемые ниже.

ТЕОРЕМА 17. *Пусть выполняются предположения теоремы* 4, *и пусть* $u^{(1)}(t, x)$, $u^{(2)}(t, x)$ — *два обобщенных решения первой краевой задачи для уравнения* (1.7) *в прямоугольнике* $R\{0 \leqslant t \leqslant T, \ 0 \leqslant x \leqslant X\}$ *с условиями:*

$$u^{(i)}(0, x) = u_0^{(i)}(x), \quad u^{(i)}(t, 0) = u_1^{(i)}(t), \quad u^{(i)}(t, X) = u_2^{(i)}(t), \quad i = 1, 2,$$

причем $u_k^{(1)} \leqslant u_k^{(2)}$, $k = 0, 1, 2$. *Тогда* $u^{(1)}(t, x) \leqslant u^{(2)}(t, x)$ *всюду в* R.

ТЕОРЕМА 18. *Пусть выполняются предположения теоремы* 6, *и пусть* $u^{(1)}(t, x)$, $u^{(2)}(t, x)$ — *два обобщенных решения первой краевой задачи для уравнения* (1.7) *в полуполосе* $D\{0 \leqslant t \leqslant T, \ 0 \leqslant x < \infty\}$ *с условиями:*

$$u^{(i)}(0, x) = u_0^{(i)}(x), \quad u^{(i)}(t, 0) = u_1^{(i)}(t), \quad i = 1, 2,$$

причем $u_k^{(1)} \leqslant u_k^{(2)}$, $k = 0, 1$. *Тогда* $u^{(1)}(t, x) \leqslant u^{(2)}(t, x)$ *всюду в* D.

ТЕОРЕМА 19. *Пусть выполняются предположения теоремы* 8, *и пусть* $u^{(1)}(t, x)$, $u^{(2)}(t, x)$ — *два обобщенных решения второй краевой задачи для уравнения* (1.7) *в прямоугольнике* R *с условиями:*

$$u^{(i)}(0, x) = u_0^{(i)}(x), \quad \frac{\partial\varphi(0, u^{(i)}(t, 0))}{\partial x} = -g_1^{(i)}(t) \leqslant 0,$$

$$\frac{\partial\varphi(X, u^{(i)}(t, X))}{\partial x} = g_2^{(i)}(t) \geqslant 0, \quad i = 1, 2,$$

причем $u_0^{(1)}(x) \leqslant u_0^{(2)}(x)$, $g_k^{(1)}(t) \leqslant g_k^{(2)}(t)$, $k=1, 2$. *Тогда* $u^{(1)}(t, x) \leqslant u^{(2)}(t, x)$ *всюду в* R.

ТЕОРЕМА 20. *Пусть выполняются предположения теоремы* 10, *и пусть* $u^{(1)}(t, x)$, $u^{(2)}(t, x)$ — *два обобщенных решения второй краевой задачи для уравнения* (1.7) *в полуполосе* D *с условиями:*

$$u^{(i)}(0, x) = u_0^{(i)}(x), \quad \frac{\partial\varphi(0, u^{(i)}(t, 0))}{\partial x} = -g_1^{(i)}(t) \leqslant 0, \quad i = 1, 2,$$

причем $u_0^{(1)}(x) \leqslant u_0^{(2)}(x)$, $g_1^{(1)}(t) \leqslant g_1^{(2)}(t)$. *Тогда* $u^{(1)}(t, x) \leqslant u^{(2)}(t, x)$ *всюду в* D.

Докажем теорему о конечной скорости распространения возмущений в задаче Коши для уравнения (1.7).

ТЕОРЕМА 21. *Пусть выполняются предположения теоремы* 2 *и, кроме того, справедливы неравенства:*

$$\varphi''_{uu}(x, u) > 0, \quad \int_0^u \frac{\varphi'_u(x, \alpha)}{\alpha}\, d\alpha < \infty \tag{4.2}$$

при $(x, u) \in H$. *Пусть функция* $u(t, x)$ *является обобщенным решением задачи Коши* (1.7), (1.1) *в полосе* $G\{0 \leqslant t \leqslant T, -\infty < x < \infty\}$. *Тогда:*

1) *Если* $u_0(x) \equiv 0$ *при* $X_0 \leqslant x < \infty$, *то для любого* t, $0 \leqslant t \leqslant T$, *можно указать такое* X_t, *что* $u(t, x) \equiv 0$ *при* $X_t \leqslant x < \infty$.

2) *Если* $u_0(x) \equiv 0$ *при* $-\infty < x \leqslant X_0$, *то для любого* t, $0 \leqslant t \leqslant T$, *можно указать такое* X_t, *что* $u(t, x) \equiv 0$ *при* $-\infty < x \leqslant X_t$.

3) *Если* $u_0(x) \equiv 0$ *при* $|x| \geqslant X_0$, *то для любого* t, $0 \leqslant t \leqslant T$, *можно указать такое* X_t, *что* $u(t, x) \equiv 0$ *при* $|x| \geqslant X_t$.

Доказательство. Докажем первое из утверждений теоремы. Без ограничения общности можно считать, что $X_0 > 0$. Построим бесконечно дифференцируемую при $u > 0$ функцию $\bar\varphi(u)$ со следующими свойствами:

$\bar\varphi(u) > 0$, $\bar\varphi'(u) > 0$, $\bar\varphi''(u) > 0$ при $0 < u < \infty$, $\bar\varphi(0) = \bar\varphi'(0) = 0$;

$\varphi(x, u) \leqslant \bar\varphi(u)$, $\varphi'_u(x, u) \leqslant \bar\varphi'(u)$ в полосе $\{-\infty < x < \infty,\ 0 \leqslant u \leqslant M_1\}$;

$$\Psi(u) \equiv \int_0^u \frac{\bar\varphi'(\alpha)}{\alpha}\, d\alpha < \infty \quad \text{при любых конечных } u.$$

Здесь M_1 — число, входящее в условия теоремы 2.

Определим функцию $\bar u(t, x)$ соотношением:

$$\Psi(\bar u(t, x)) = \begin{cases} c\,[c\,(t + t_1) - x], & -\infty < x \leqslant c\,(t + t_1), \\ 0, & c\,(t + t_1) \leqslant x < \infty. \end{cases} \tag{4.3}$$

Постоянные $c > 0$ и $t_1 > 0$ выберем так, чтобы выполнялось неравенство:

$$\Psi(\bar u(0, X_0)) = c\,(ct_1 - X_0) \geqslant \Psi(\bar\Phi(M_2)),$$

где

$$M_2 = \sup_{-\infty < x < \infty} \varphi(x, M_1).$$

В полуполосе $D\{0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x < \infty\}$ функцию $\bar u(t, x)$ можно рас-

сматривать как обобщенное решение первой краевой задачи для уравнения

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{\varphi}(\bar{u})}{\partial x^2}$$

с условиями:

$$\begin{aligned} \bar{u}(t,\ 0) = \bar{u}_1(t) \geqslant \bar{\Phi}(\varphi(0,\ u_1(t))), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ \bar{u}(0,\ x) = \bar{u}_0(x) \geqslant \bar{\Phi}(\varphi(x,\ u_0(x))), \quad 0 \leqslant x < \infty, \end{aligned} \tag{4.4}$$

где $\bar{\varphi}(\bar{\Phi}(v)) \equiv v$.

Как мы видели при доказательстве теорем 2 и 6, для функций $u(t, x)$ и $\bar{u}(t, x)$ имеют место равенства:

$$u(t,\ x) = \lim_{n\to\infty} \Phi(x,\ v_n(t, x)), \quad \bar{u}(t,\ x) = \lim_{n\to\infty} \bar{\Phi}(\bar{v}_n(t,\ x)).$$

Здесь $\varphi(x,\ \Phi(x,\ v)) \equiv v$; при каждом n функция $v_n(t,\ x)$ удовлетворяет в прямоугольнике $\{0 \leqslant t \leqslant T,\ -n \leqslant x \leqslant n\}$ уравнению (1.17), а функция $\bar{v}_n(t,\ x)$ удовлетворяет в прямоугольнике $D_n\{0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant n\}$ уравнению (2.41).

Обозначим через Γ^n границу $(t = 0,\ x = 0,\ x = n)$ прямоугольника D_n. В силу условий (4.4), можно считать, что

$$v_n\big|_{\Gamma^n} \leqslant \bar{v}_n\big|_{\Gamma^n}, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots;$$

вследствие монотонности по t функции $\bar{u}(t,\ x)$ можно обеспечить также выполнение неравенств

$$\frac{\partial \bar{v}_n}{\partial t}\bigg|_{\Gamma^n} \geqslant 0, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots.$$

Применяя принцип максимума к уравнению (2.43), которому удовлетворяет функция $\frac{\partial \bar{v}_n}{\partial t}$, легко показать, что $\frac{\partial \bar{v}_n}{\partial t} \geqslant 0$ всюду в $D_n (n = 1,\ 2,\ \ldots)$. Используя этот факт и применяя принцип максимума к уравнению (2.45) для разности $v_n - \bar{v}_n$, мы установим, что $v_n(t,\ x) \leqslant \bar{v}_n(t,\ x)$ всюду в D_n. Следовательно,

$$\Phi(x,\ v_n(t,\ x)) \leqslant \Phi(x,\ \bar{v}_n(t,\ x)), \quad n = 1,\ 2,\ \ldots.$$

В пределе при $n \to \infty$ получаем:

$$u(t,\ x) \leqslant \Phi(x,\ \bar{\varphi}(\bar{u}(t,\ x))),$$

и справедливость первого утверждения теоремы вытекает из формулы (4.3).

Аналогично доказывается второе утверждение теоремы. Наконец, третье утверждение является очевидным следствием первых двух.

Конечная скорость распространения возмущений имеет место также в первой и второй краевых задачах для уравнения (1.7).

ТЕОРЕМА 22. *Пусть выполняются предположения теоремы* 6, *а также неравенства* (4.2) *при* $(x,\ u) \in H_2$, *и пусть функция* $u(t,\ x)$ *является обобщенным решением первой краевой задачи* (1.7), (2.56) *в полуполосе*

$D\{0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x < \infty\}$, причем $u_0(x) \equiv 0$ при $X_0 \leqslant x < \infty$. Тогда для любого t, $0 \leqslant t \leqslant T$, можно указать такое X_t, что $u(t, x) \equiv 0$ при $X_t \leqslant x < \infty$.

ТЕОРЕМА 23. *Пусть выполняются предположения теоремы 10, а также неравенства (4.2) при $(x, u) \in H_4$, и пусть функция $u(t, x)$ является обобщенным решением второй краевой задачи (1.7), (3.12) в полуполосе $D\{0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x < \infty\}$, причем $u_0(x) \equiv 0$ при $X_0 \leqslant x < \infty$. Тогда для любого t, $0 \leqslant t \leqslant T$, можно указать такое X_t, что $u(t, x) \equiv 0$ при $X_t \leqslant x < \infty$.*

Доказательство двух последних предложений аналогично доказательству теоремы 21.

Поступило
21.XI.1957

ЛИТЕРАТУРА

1 Лейбензон Л. С., Движение природных жидкостей и газов в пористой среде, М.—Л., Гостехиздат, 1947.

2 Олейник О. А. и Вентцель Т. Д., Первая краевая задача и задача Коши для квазилинейных уравнений параболического типа, Матем. сб., 41 (83):1 (1957), 105—128.

3 Чжоу Юй-линь, Краевые задачи для нелинейных параболических уравнений, Доклады Ак. наук СССР, 117, № 2 (1957), 195—198.

4 Полубаринова-Кочина П. Я., Об одном нелинейном уравнении в частных производных, встречающемся в теории фильтрации, Доклады Ак. наук СССР, 63, № 6 (1948), 623—626.

5 Зельдович Я. Б. и Компанеец А. С., К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры, Сборник, посвященный семидесятилетию акад. А. Ф. Иоффе, М., 1950.

6 Баренблатт Г. И., О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде, Прикл. матем. и мех., 16, вып. 1 (1952), 67—78.

7 Баренблатт Г. И., Об одном классе точных решений плоской одномерной задачи нестационарной фильтрации газа в пористой среде, Прикл. матем. и мех., 17, вып. 6 (1953), 739—742.

8 Баренблатт Г. И. и Вишик М. И., О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа, Прикл. матем. и мех., 20, вып. 3 (1956), 411—417.

9 Олейник О. А., Об уравнениях типа уравнений нестационарной фильтрации, Доклады Ак. наук СССР, 113, № 6 (1957), 1210—1213.

10 Калашников А. С., О первой краевой задаче для уравнений одномерной нестационарной фильтрации, Доклады Ак. наук СССР, 115, № 5 (1957), 858—861.

11 Чжоу Юй-линь, Краевые задачи для нелинейных параболических и эллиптических уравнений, Диссертация, МГУ, 1957.

12 Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., изд. ЛГУ, 1950.

13 Бернштейн С. Н., Ограничение модулей последовательных производных решений уравнений параболического типа, Доклады Ак. наук СССР, 18, № 7 (1938), 385—388.

14 Пискунов Н. С., Интегрирование уравнений теории пограничного слоя, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 7 (1943), 35—46.

15 Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, М.—Л., Гостехиздат, 1950.

16 Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, М., Гостехиздат, 1953.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 705—716

А. Я. ДУБОВИЦКИЙ

О ТОЧКАХ ПОЛНОГО ВЫРОЖДЕНИЯ МАТРИЦЫ ЯКОБИ

(*Представлено академиком* П. С. Александровым)

В работе устанавливается связь между структурой множества точек полного вырождения матрицы Якоби дифференцируемого отображения и степенью гладкости этого отображения.

Введение

Пусть U — отображение области G из E^n в E^k. Отображение U называется m раз дифференцируемым, если координаты точек из $U(G)$ являются m раз дифференцируемыми функциями координат прообраза, т. е. если $u_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ суть m раз дифференцируемые функции точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Точка $x \in G$ называется точкой полного вырождения матриц Якоби, если

$$\text{ранг} \quad \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_x = 0.$$

Точки полного вырождения в дальнейшем будем называть особыми. Совокупность всех особых точек отображения будем обозначать через N.

Настоящая работа посвящена исследованию структуры N.

Определение 1. Пусть E — множество из E^m. Луч $x_0 x$ называется полукасательной для E, если существует последовательность x_n из E, сходящаяся вдоль $x_0 x$ к x_0 $\left(\text{т. е. если} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ и} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\rho(x_n, x_0 x)}{|x_n - x_0|} = 0\right)$.

Сумма всех полукасательных множеств E в x_0 называется контингенцией E в x_0.

Мы скажем, что контингенция E в x_0 не превосходит s, если ее можно погрузить в гиперплоскость размерности, не превосходящей s.

α-мерную меру Хаусдорфа будем обозначать через m_α.

Определение 2. Множество E будем называть α-существенным, если $m_\alpha U(E) > 0$, и, соответственно, α-несущественным, если $m_\alpha U(E) = 0$.

В работе доказывается следующая

ТЕОРЕМА (основная). *Пусть* $u_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, — *система m раз дифференцируемых в области G функций, задающих отображение U. Тогда любое B-множество N точек полного вырождения матрицы Якоби, в каждой точке которого контингенция не превосходит*

$\omega \cdot m$, *ω-несущественно, т. е.* $m_\omega U(N) = 0$ *(ω — любое положительное число).*

В § 2 будет приведен пример, показывающий невозможность ослабления посылок теоремы.

Эта теорема усиливает результат, полученный Е. М. Ландисом ([1]) для случая одной функции n переменных (результат Е. М. Ландиса получается при $\omega = k = 1$).

§ 1. Вспомогательные предложения

1°. Мера Хаусдорфа. Для доказательства основной теоремы и вспомогательных предложений нам понадобятся некоторые свойства меры Хаусдорфа.

Определение 3. Покрытие множества E сферами $\{\sigma_i\}$ с диаметрами d_i называется δ-покрытием, если $d_i < \delta$.

$\inf \sum d_i^\alpha$, где нижняя грань берется по всевозможным δ-покрытиям множества E, называется δ-приближением α-мерной меры Хаусдорфа и обозначается через $m_\alpha^\delta E$.

α-мерной мерой Хаусдорфа называется $\lim\limits_{\delta \to 0} m_\alpha^\delta E$ и обозначается через $m_\alpha E$.

Очевидно, m_α — мера Каратеодори и все A-множества измеримы по отношению к m_α.

ЛЕММА 1 [см. ([2])]. *Если E — A-множество пространства E^n и $m_\alpha E > 0$, то существует замкнутое множество F, $F \subset E$, такое, что $\infty > m_\alpha F > 0$.*

ЛЕММА 2 [см. ([3]) и ([6])]. *Пусть U — B-отображение области G из E^n в E^k и E — A-множество области G. Тогда если $m_\alpha U(E) > 0$ и $\varepsilon > 0$ произвольно, то существует замкнутое множество F, $F \subset E$, такое, что $m_\alpha U(F) > m_\alpha U(F) - \varepsilon$.*

Эти две леммы характеризуют F-свойство меры Хаусдорфа в классе A-множеств.

ЛЕММА 3 [см. ([4])]. *Если $E = \sum E_n$ и $E_{n+1} \supset E_n$, то* $m_\alpha E = \lim\limits_{n} m_\alpha E_n$.

2°. О дифференцируемом продолжении отображений. В этом пункте будут указаны условия, при которых отображения, заданные на B-множестве, можно распространить на все пространство без потери гладкости.

Определение 4. Функция $f(x)$ называется m раз слабо дифференцируемой на E, если в каждой точке $x_0 \in E$ существует полином $P(x, x_0)$ степени m такой, что

$$f(x) - P(x, x_0) = o(|x - x_0|^m).$$

Определение 5. Мы скажем, что функция $f(x)$ m раз сильно дифференцируема на E, если $f(x)$ m раз слабо дифференцируема на E и для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что если $|x' - x''| < \delta$, $x', x'' \in E$, то

$$|f(x) - P(x', x'')| < \varepsilon |x' - x''|^m.$$

ТЕОРЕМА [Уитней (5)]. *Если функция* $f(x)$ m *раз сильно дифференцируема на замкнутом множестве* F, $F \subset E^n$, *то ее можно распространить* m *раз дифференцируемым образом на все* E^n *так, что ее дифференциалы на* F *будут совпадать со слабыми дифференциалами исходной функции.*

Из теоремы Уитнея следует, что если B-отображение U области G в E^k m раз сильно дифференцируемо на замкнутом множестве F, то существует m раз дифференцируемое отображение V, совпадающее с U на F вместе с дифференциалами m-го порядка.

ЛЕММА 4. *Если* B*-отображение* U *области* G *из* E^n *в* E^k *и* A*-множество* $E \subset G$ *таковы, что*

1. $m_\omega U(E) > 0$,
2. U m *раз слабо дифференцируемо на* E,

то существует множество $F \subset E$ *и* m *раз дифференцируемое отображение* V *пространства* E^n *в* E^k *такие, что*

1′. $m_\omega V(F) > 0$,

2′. $F \subset E$,

3′. U *и* V *совпадают на* F *вместе со своими дифференциалами* m*-го порядка.*

Доказательство. В силу теоремы Уитнея, достаточно выделить замкнутое множество $F \subset E$, на котором отображение U m раз сильн о дифференцируемо и для которого выполняется условие 1′.

Заметим, прежде всего, что в силу леммы 2 мы можем считать, что множество E, данное в условии леммы, замкнуто. В силу же леммы 1 можно считать, что $\infty > m_\omega U(E) > 0$.

Множество F будем строить как пересечение надлежащим образом выделенной последовательности замкнутых множеств.

Пусть $x_0 \in E$. Тогда

$$u_i(x) - P_i(x, x_0) = o(|x - x_0|^m)$$

и, значит, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\rho(\varepsilon, x_0) > 0$, что если $|x - x_0| < \rho(\varepsilon, x_0)$, то

$$|u_i(x) - P_i(x, x_0)| < \varepsilon |x - x_0|^m.$$

Обозначим через $D(\varepsilon, l)$ совокупность точек x_0 из E, для которых $\rho(\varepsilon, x_0) < \frac{1}{l}$ и коэффициенты слабых дифференциалов $P_i(x, x_0)$ не превосходят l. Очевидно,

$$D(\varepsilon, l) \underset{l \to \infty}{\longrightarrow} E. \tag{1}$$

В работе (6) (см. лемму 9) доказано, что существует постоянная C такая, что

$$\overline{D(\varepsilon, l)} \subset D(C\varepsilon, l + C). \tag{2}$$

Фиксируем последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ и определим монотонно возрастающую последовательность чисел $\{l_r\}$ так, чтобы при любом s

$$m_\omega U\Bigl(\prod_{j \leqslant s} D\Bigl(\frac{1}{j}, l_j\Bigr)\Bigr) > d, \tag{3}$$

где $d = \frac{m_\omega U(E)}{2}$.

Предположим, что числа $l_1, l_2, \ldots, l_{s-1}$ определены. Тогда

$$m_\omega U\left(\prod_{j\leq s-1} \overline{D\left(\frac{1}{j}, l_j\right)}\right) > d.$$

Из соотношений (1) и (2), в силу леммы 3, следует, что существует число l_s, для которого справедливо неравенство (3).

Положим

$$\prod_{j\leq s} \overline{D\left(\frac{1}{j}, l_j\right)} = F_s.$$

Множество F_s замкнуто и монотонно убывает с ростом s. Следовательно, множество $U(F_s)$ также замкнуто и монотонно убывает с ростом s.

Пусть $\prod F_s = F$. Тогда

$$U(F) = \prod U(F_s),$$

и так как $m_\omega U(F_1)$ конечно, то

$$\lim m_\omega U(F_s) = m_\omega U(F).$$

Согласно определению F_s,

$$m_\omega U(F_s) > d$$

и поэтому

$$m_\omega U(F) \geqslant d.$$

Покажем, что на F отображение U равномерно дифференцируемо до порядка m.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Тогда существует j_0 такое, что $\frac{C}{j_0} < \varepsilon$. Так как

$$F \subseteq \overline{D\left(\frac{1}{j_0}, l_{j_0}\right)} \subset D\left(\frac{C}{j_0}, l_{j_0} + C\right),$$

то из неравенства $|x' - x''| < \frac{1}{l_{j_0} + C}$ вытекает неравенство

$$|u(x') - u(x'')| < \varepsilon\, |x' - x''|^m$$

для $x', x'' \in F$.

Лемма доказана.

3°. ЛЕММА 5 (о неявной функции). *Если непрерывное отображение U, m раз дифференцируемая функция φ и B-множество E таковы, что*

1. *в точках E $\varphi(x) = 0$ и*
2. $m_\omega U(F) > 0$,

то существуют B-множество $F \subset E$ и функция $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, определенная и m раз слабо дифференцируемая на $\text{пр}_{x_i} F$, *такие, что*

1′. *F содержится в графике функции f,*

2′. $m_\omega U(F) < 0$.

Доказательство. Проведем построение функции f для случая $m = 1$. Если $m > 1$, то, в силу классической теоремы о неявной функции, множество E можно погрузить в счетную систему сегментов π_s, в каждом из которых нулевое множество уровня τ_0 функции φ совпадает с графиком некоторой m раз дифференцируемой функции $n-1$ переменного. Для одной из таких функций, как легко видеть, выполняются все утверждения леммы.

Итак, рассмотрим случай $m = 1$. Имеем:

$$E = \sum E_{il},$$

где в каждой точке $x_0 \in E_{il}$ производная $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \neq 0$ и на отрезке длиной $\frac{4}{l}$, параллельном оси x_i, с центром в x_0, $\varphi(x) \neq 0$ (за исключением точки x_0).

Легко видеть, что E_{il} одновременно с E являются B-множествами.

Так как

$$U(E) = \sum U(E_{il}),$$

то одно из слагаемых правой части имеет положительную ω-мерную меру.

Будем считать, что

$$m_\omega U(E_{1l_0}) > 0. \tag{4}$$

Пусть $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in E_{1l_0}$. Согласно определению E_{1l_0}, отрезок $[x', x'']$, где

$$x' = (x_1', x_2^0, \ldots, x_n^0), \quad x'' = (x_1'', x_2^0, \ldots, x_n^0),$$

$$x_1'' > x_1^0 > x_1', \quad x'' - x' < \frac{2}{l},$$

(x' и x'' — рациональные числа), не содержит других точек из E_{1l_0}, кроме x_0. Если выбрать x_1' и x_1'' достаточно близкими к x_1^0, то имеет место либо неравенство

$$\varphi(x') > \varphi(x_0) > \varphi(x''),$$

либо неравенство

$$\varphi(x') < \varphi(x_0) < \varphi(x'')$$

$\left(\text{в зависимости от знака производной } \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right|_{x_0}\right)$.

Для определенности будем считать выполненным неравенство

$$\varphi(x') < \varphi(x_0) < \varphi(x'').$$

Тогда x_0 можно погрузить в рациональный сегмент π такой, что в точках верхнего основания, содержащего x'', $\varphi(x) > \varphi(x_0)$, а в точках нижнего основания, содержащего x', $\varphi(x) < \varphi(x_1)$.

По построению, множество πE_{1l_0} униформно вдоль x_1 и каждый отрезок, соединяющий основания π, пересекает τ_0. Это построение проведем для каждой точки $x_0 \in E_{1l_0}$.

Так как рациональных сегментов счетное множество, то для одного из них, в силу (4),

$$m_\omega U(\pi E_{1l_0}) > 0. \tag{5}$$

Положим $\pi E_{1l_0} = F$ и определим функцию f на проекции π в грань $x_1 = 0$, положив

$$f(x_2^0, \ldots, x_n^0) = \min x_1,$$

где min берется среди всех точек $(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \tau_0$.

Графиком f является множество нижних точек $\tau_0 \pi$.

В силу униформности F, график Γ функции f содержит F.

Покажем, что функция $f(x_2, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точках $\text{пр}_{x_1} F$.

Пусть $(x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \text{пр}_{x_1} F$ и $(x_2, \ldots, x_n) \in \text{пр}_{x_1} \pi$. Обозначим

$$f(x_2^0, \ldots, x_n^0) = f_0, \quad f(x_2, \ldots, x_n) = f.$$

Тогда

$$\varphi(f, x_2, \ldots, x_n) - \varphi(f_0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = 0;$$

так как $x = (f, x_2, \ldots, x_n)$ и $x_0 = (f_0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \tau_0$, то, переходя к дифференциалам, получаем:

$$A \cdot (f - f_0) + B(x_2 - x_2^0) + \cdots + C(x_n - x_n^0) =$$

$$= \alpha(f - f_0) + \beta(x_2 - x_2^0) + \cdots + \gamma(x_n - x_n^0),$$

где $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ бесконечно малы вместе с $x - x_0$. Отсюда видно, что

$$f - f_0 = -\frac{B}{A}(x_2 - x_2^0) - \cdots - \frac{C}{A}(x_n - x_n^0) +$$

$$+ \beta_1(x_2 - x_2^0) + \cdots + \gamma_1(x_n - x_n^0),$$

где $\beta_1, \ldots, \gamma_1$ бесконечно малы вместе с $|x_2 - x_2^0| + \cdots + |x_n - x_n^0|$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 6 [см. (7)]. *Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ m раз дифференцируема в точке $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ и первые ее r дифференциалов в точке x_0 равны нулю, а функция $\varphi(x_2, \ldots, x_n)$ $n - r$ слабо дифференцируема в точке $(x_2^0, \ldots, x_n^0)$, причем $\varphi(x_2^0, \ldots, x_n^0) = x_1^0$, то функция $f(\varphi, x_2, \ldots, x_n)$ m раз слабо дифференцируема в точке $(x_2^0, \ldots, x_n^0)$.*

4°. ЛЕММА 7. *Если контингенция множества E в каждой его точке не превосходит m, то E содержится в счетной системе гиперповерхностей размерности m, удовлетворяющих условию Липшица.*

Доказательство получается при помощи непосредственного применения теоремы Колмогорова — Верченко [см. (8)].

§ 2. Основная теорема

В этом параграфе будет установлена структура множества точек полного вырождения матрицы Якоби.

ТЕОРЕМА 1 (основная). *Пусть $u_i(x_1, \ldots, x_n)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, — система m раз дифференцируемых в области G функций, задающих отображение U. Тогда любое B-множество N точек полного вырождения матрицы Якоби, в каждой точке которого контингенция не превосходит $m\omega$, ω-несущественно, т. е. $m_\omega U(N) = 0$ (ω — любое положительное число).*

Доказательство. Будем вести доказательство от противного индукцией по числу переменных измерений области G.

При $n = 1$ утверждение теоремы доказано [см., например, работу (1)].

Пусть это утверждение справедливо при всех $n' < n$, в то время как существуют m раз дифференцируемое отображение U области $G \subset E^n$ и B-множество особых точек N, в точках которого контингенция N не превосходит $m\omega$, такое, что $m_\omega U(N) > 0$.

Пусть $N = N_1 + N_2$, где на N_1 все дифференциалы функций, составляющих отображение до m-го порядка, равны нулю, а в точках N_2 все

первые дифференциалы равны нулю, в то время как один из дифференциалов $d^r u_j \neq 0$, $r \leqslant m$.

Покажем, что неравенства

$$m_\omega U(N_i) > 0, \quad i = 1,2, \tag{6}$$

противоречивы.

Предположим сначала, что $m_\omega U(N_1) > 0$. В силу аддитивности меры Хаусдорфа, можно считать, что область G содержится в некотором единичном кубе Q пространства E^n (в противном случае мы бы рассмотрели часть области G).

На основании леммы 1, мы можем выделить $[m\omega]$-мерную гиперповерхность Γ, удовлетворяющую условию Липшица с константой L:

$$x_i = x_i(x_{n-[m\omega]}, \ldots x_n), \quad i = n - [m\omega],$$

такую, что

$$m_\omega U(N_1\Gamma) = 2d > 0 \ * . \tag{7}$$

Пусть $x_0 \in N_1\Gamma$. Тогда

$$|u(x) - u(x_0)| = o\,|x - x_0|^m$$

и, значит, для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать $\rho(\varepsilon, x_0) > 0$ такое, что диаметр образа каждого куба, содержащего x_0, с ребром $r < \rho(\varepsilon, x_0)$, не превосходит εr^m.

Совокупность $x_0 \in N_1\Gamma$, для которых $\rho(\varepsilon, x_0) > \delta$, обозначим через $D(\varepsilon, \delta)$. Очевидно, $D(\varepsilon, \delta) \to N_1\Gamma$ при $\delta \to 0$. Следовательно,

$$U(D(\varepsilon, \delta)) \underset{\delta \to 0}{\to} U(N_1\Gamma),$$

причем допредельные множества монотонно возрастают. Поэтому из неравенства (7), в силу леммы 3, следует существование $\delta_0 > 0$ такого, что если $\delta < \delta_0$, то

$$m_\omega U(D(\varepsilon, \delta)) > d. \tag{8}$$

Разобьем грань $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-[m\omega]} = 0$ на $p^{[m\omega]}$ кубов q, где p выбрано из условия $\frac{1}{p} < \delta_0$. Тогда Γ погрузится в $L \cdot p^{[m\omega]}$ кубов $\widetilde{q}$ с ребрами той же длины. В силу (8),

$$m_\omega U\left(D\left(\varepsilon, \frac{1}{p}\right)\right) > d. \tag{9}$$

Оценим меру этого же множества сверху.

Пусть куб $\widetilde{q}$ содержит точку из $D\left(\varepsilon, \frac{1}{p}\right)$. Тогда диаметр $U(\widetilde{q})$ не превосходит $\frac{1}{p^m}\varepsilon$. Таким образом, наше подразделение содержит $L \cdot p^{[m\omega]}$ кубов и, значит, $U\left(D\left(\varepsilon, \frac{1}{p}\right)\right)$ распадается не более, чем на $L \cdot p^{[m\omega]}$ частей, диаметр каждой из которых меньше $\frac{1}{p^m}\varepsilon < \delta_0$. Поэтому

$$m_\omega^{\delta_0} U\left(D\left(\varepsilon, \frac{1}{p}\right)\right) < L \cdot p^{[m\omega]} \left(\frac{1}{p^m}\varepsilon\right)^\omega < \varepsilon \cdot L.$$

---

* В силу леммы 1, можно считать, что $m_\omega U(N)$ — конечное число.

Так как δ_0 произвольно мало, то

$$m_\omega U\left(D\left(\varepsilon, \frac{1}{p}\right)\right) < \varepsilon \cdot L. \tag{10}$$

Сравнивая (9) и (10), получим: $d < \varepsilon \cdot L$.

При малых ε последнее неравенство невозможно (d от ε не зависит), следовательно, N_1 ω-несущественно.

Покажем теперь невозможность неравенства

$$m_\omega U(N_2) > 0, \quad N_2 = \sum N_{2t}, \tag{11}$$

где на множестве N_{2t} одна и та же производная

$$\frac{\partial^r u_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \neq 0, \quad 1 < r \leqslant m,$$

в то время как все производные более низкого порядка равны нулю.

Все множества N_{2t} суть B-множества. В силу (11), одно из них ω-существенно, причем контингенция каждого из этих множеств во всех его точках не превосходит $[m\omega]$.

Положим

$$m_\omega U(N_{2t_0}) > 0. \tag{12}$$

Пусть первая отличная от нуля на N_{2t_0} производная есть

$$\frac{\partial^r u_1}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Так как $r = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n > 1$, то одно из слагаемых $\geqslant 1$. Пусть $\alpha_1 \geqslant 1$.

Положим

$$\varphi = \frac{\partial^{r-1} u_1}{\partial x_1^{\alpha_1 - 1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

В точках N_{2t_0} функция φ равна нулю, в то время как $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \neq 0$.

Применяя к функции φ отображение U и к множеству N_{2t_0} лемму о неявной функции, заключаем, что существует функция $f(x_2, \ldots, x_n)$, определенная на $\text{пр}_{x_1} G$, и множество $N^* \subset N_{2t_0}$ такие, что

I. f дифференцируема $m - r + 1$ раз на $\text{пр}_{x_1} N^*$,

II. $m_\omega U(N^*) > 0$,

III. график H функции f содержит множество N^*.

Рассмотрим отображение $U(f, x_2 \ldots, x_n) = U^*$ области $\text{пр}_{x_1} G$ в E^k.

В силу леммы 6, условий I, II и определения N_{2t_0}, отображение U^* слабо дифференцируемо на $\text{пр}_{x_1} N^*$ до m-го порядка, причем слабые дифференциалы U^* равны нулю на $\text{пр}_{x_1} N^*$ до $(r-1)$-го порядка.

В силу условий II и III,

$$m_\omega U^*(\text{пр}_{x_1} N^*) = m_\omega U(N^*) > 0.$$

Поэтому, применяя к отображению U^* и множеству $\text{пр}_{x_1} N^*$ лемму 4, мы приходим к выводу: существуют отображение V пространства E^{n-1} в E^*, m раз дифференцируемое, и B-множество F такие, что

I'. $m_\omega V(F) > 0$,

II''. $F \subset \text{пр}_{x_1} N^*$,

III'''. V и U^* совпадают на F вместе с дифференциалами m-го порядка.

Но условие I′ противоречит предположению индукции, так как в силу II′ и III′ на F все дифференциалы $(r-1)$-го порядка отображения U^*, а значит и V, равны нулю, а контингенция множества F во всех его точках не превосходит $m\omega$. Следовательно,

$$m_\omega U(N_2) = 0.$$

Теорема доказана.

2°. Следствия из основной теоремы. Так как контингенция множества никогда не превосходит количества измерений содержащего его пространства, то имеет место

ТЕОРЕМА 2. *Если отображение U области G дифференцируемо m раз и $m\omega \geqslant n$, то множество особых точек U ω-несущественно, т. е.*

$$m_\omega U(N) = 0$$

(N — множество особых точек U).

В частности, если отображение U дифференцируемо ln раз, то $\frac{1}{l}$-мерная мера Хаусдорфа образа множества особых точек равна нулю.

Поэтому в предельном случае (для бесконечно дифференцируемых отображений) справедлива

ТЕОРЕМА 3. *Если отображение U бесконечно дифференцируемо, то любая мера Хаусдорфа образа множества особых точек равна нулю.*

Из полученного результата вытекает некоторое усиление теоремы Е. М. Ландиса. Именно, полагая в теореме 2 $k = 1$, мы получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. *Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ дифференцируема ln раз и N — множество особых точек f, то*

$$m_{\frac{1}{l}} f(N) = 0.$$

В предельном случае (когда f бесконечно дифференцируема) имеет место

ТЕОРЕМА 5. *Если функция n переменных бесконечно дифференцируема и N — множество нулей ее дифференциала, то $f(N)$ имеет абсолютную меру нуль в классе мер Хаусдорфа.*

Из последней теоремы можно сделать выводы относительно строения множеств уровня бесконечно дифференцируемых функций. Для этого нам понадобится

Определение 6. Множество E называется вполне несущественным *, если $f(E)$ имеет абсолютную меру нуль в классе мер Хаусдорфа (точнее, если $m_\omega f(E) = 0$ для любого $\omega > 0$).

ТЕОРЕМА 6. *Если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на кубе Q, $Q \subset E^n$, то каждое множество ее уровня, исключая уровни, образующие вполне не существенное множество E, состоит из конечного числа компонент, являющихся бесконечно дифференцируемыми $(n-1)$-мерными многообразиями.*

Компоненты, не выходящие на границу Q, представляют собой замкнутые многообразия без края.

---

* По отношению к функции $f(x)$.

Доказательство. Будем вести доказательство от противного индукцией по числу измерений Q. Пусть теорема верна для всех $m < n$. Докажем ее для n.

Обозначим через E' совокупность множеств уровня, содержащих нули дифференциала. Тогда E' вполне несущественно.

Обозначим через E'' совокупность множеств уровня, каждое из которых содержит по бесконечному множеству компонент.

Каждый уровень из E'' пересекается с границей Q по бесконечному множеству компонент (в противном случае, в силу компактности куба Q, мы получили бы противоречие с теоремой Юнга о неявной функции).

Из предположения от противного следует, что при некотором $\omega > 0$

$$m_\omega f(E'') > 0.$$

Тогда существуют грань q куба Q и семейство $E''' \subset E''$ уровней, каждый из которых пересекает q по бесконечному множеству компонент, причем $m_\omega f(E''') > 0$.

Рассматривая f только на грани q, мы приходим к противоречию с предположением индукции. Последнее и доказывает теорему.

3°. Пример, показывающий невозможность ослабления посылок основной теоремы. Для данных натуральных m и ω построим отображение U, дифференцируемое $m-1$ раз и такое, что множество N особых точек U имеет контингенцию $m\omega$, причем $m_\omega U(N) = 1$.

Через C обозначим единичный куб $E^{m\omega}$, а через Q — единичный куб из E^ω.

Совокупность точек из C, одна из координат которых заключена между α и β, назовем полосой ширины $|\alpha - \beta|$. Отображение U будем вначале строить на специально выделенном множестве p_0, построение которого проведем при помощи счетной последовательности операций $O_1, O_2, \ldots$.

Операция O_1:

1. Удалим из C $m\omega$ средних полос шириной $\frac{1}{l}$, $2 < l < 3$. Оставшиеся кубы будем называть кубами первого ранга и обозначать через C_{i_1} $(i_1 = 1, \ldots, 2^{m\omega})$.

2. Разделим Q на $2^{m\omega}$ равных кубов Q_{i_1} $(i_1 = 1, \ldots, 2^{m\omega})$, разбивая каждое ребро Q на 2^m частей. Длина ребра каждого куба Q_{i_1} равна $\frac{1}{2^m}$.

3. Отнесем каждому кубу C_{i_1} куб Q_{i_1} с тем же индексом.

Операция O_2:

1. В каждой паре соотнесенных кубов C_{i_1} и Q_{i_1} проводим операцию O_1. При этом удаляем из C_{i_1} $m\omega$ средних полос шириной $\frac{1}{l^2}$. Оставшиеся $2^{m\omega}$ кубов будем называть кубами второго ранга и обозначать через $C_{i_1 i_2}$ $(i_2 = 1, \ldots, 2^{m\omega})$.

2. Куб Q_{i_1} разделим на $2^{m\omega}$ равных кубов $Q_{i_1 i_2}$ $(i_2 = 1, \ldots, 2^{m\omega})$, разбивая каждое ребро Q_{i_1} на 2^m частей. Длина ребра каждого из кубов $Q_{i_1 i_2}$ равна $\frac{1}{2^{2m}}$.

3. Отнесем каждому кубу $Q_{i_1 i_2}$ куб $C_{i_1 i_2}$ с теми же индексами.

Продолжим этот процесс неограниченно. Сумму кубов s-го ранга обозначим через p_s. Это — замкнутое множество.

Положим

$$p_0 = \prod p_s.$$

Очевидно p_0 замкнуто.

Пусть $x_0 \in P_0$. Тогда x_0 есть общая точка стягивающейся системы

$$C \supset C_{i_1 i_2} \supset \ldots \supset C_{i_1 i_2, \ldots i_s} \supset \ldots.$$

Сопоставим ей точку u_0, общую для стягивающейся системы

$$Q \supset Q_{i_1 i_2} \supset \ldots \supset Q_{i_1 i_2 \ldots i_s} \supset \ldots.$$

Мы получим отображение U, зависящее от параметра l. Подберем l так, чтобы это отображение было дифференцируемо $m-1$ раз.

Пусть x', $x'' \in p_0$ произвольны. Рассмотрим куб наибольшего ранга, содержащий эти точки. Пусть этот куб имеет ранг s. Тогда x' и x'' разделяются полосой, проведенной при $(s+1)$-й операции, т. е.

$$|x' - x''| > \frac{1}{l^{s+1}}. \tag{13}$$

Точки $u(x')$ и $u(x'')$ лежат в некотором кубе $Q_{i_1 i_2, \ldots i_s}$, т. е.

$$|u(x') - u(x'')| < \frac{\sqrt{\omega}}{2^{ms}}$$

или, в силу (13),

$$|u(x') - u(x'')| < \sqrt{\omega}\, l^{m-1} \left(\frac{l^{m-1}}{2^m}\right)^s |x' - x''|^{m-1}.$$

Подберем $l > 2$ так, чтобы $\frac{l^{m-1}}{2^m} < 1$ (например, $l = 2^{\frac{m}{m-2}}$). Обозначим $\frac{l^{m-1}}{2^m} = \alpha$, а $\sqrt{\omega}\; l^{m-1} = c$. Тогда

$$|u(x') - u(x'')| < c\alpha^s |x' - x''|^{m-1},$$

где $\alpha < 1$.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Тогда существует s_0 такое, что $c\alpha^{s_0} < \varepsilon$.

Положим $\frac{1}{l^{s_0}} = \delta$. Пусть x', $x'' \in p_0$ и $|x' - x''| < \delta$. Тогда наибольший из рангов кубов, содержащих эти точки, превосходит s_0. Поэтому

$$|u(x') - u(x'')| < c\alpha^{s_0} |x' - x''|^{m-1}.$$

Это и означает, что U сильно дифференцируемо на p_0 до $(m-1)$-го порядка.

Следовательно, $U(p_0) = Q$ и $m_\omega U(p_0) = 1$.

Распространяя полученное отображение на весь куб C, мы получим искомый пример (для отображения U p_0 является особым множеством и имеет контингенцию, не превосходящую $m\omega$).

Поступило
11.VII.1957

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ландис Е. М., О множестве особых точек дифференцируемой функции многи переменных, Доклады Ак. наук СССР, 79, № 4 (1951), 569—572.

[2] Минлос Р. А., Плоская вариация функций двух переменных и цилиндриче ская мера множеств в трехмерном пространстве, Доклады Ак. наук СССР, 81 № 5 (1951), 733—836.

[3] Ляпунов А. А., О непрерывных отображениях A-множеств, Известия Ак наук СССР, серия матем., 13 (1949), 561—564.

[4] Сакс С., Теория интеграла, Москва, 1949.

[5] Whitney H., Analytic extensions of differentiable functions defined in close sets, Trans. Amer. Soc., 36, № 1 (1934), 63—89.

[6] Дубовицкий А. Я., О структуре множеств уровня дифференцируемых ото бражений n-мерного куба в k-мерный куб., Известия Ак. наук СССР, сери матем., 21 (1957), 371—408.

[7] Кронрод А. С. и Ландис Е. М., О множествах уровня функций многи переменных, Доклады Ак. наук СССР, 58, № 7 (1947), 1269—1272.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 717—734

В. И. ЛЕБЕДЕВ

О МЕТОДЕ СЕТОК ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

(*Представлено академиком* **С. Л. Соболевым**)

В работе рассматривается система уравнений в частных производных, не являющаяся системой Ковалевской; для нее ставятся смешанные задачи и задача Коши. Доказываются теоремы разложения на два взаимно ортогональных подпространства для функций, заданных на решетке. Методом конечных разностей доказывается существование решения и дифференциальные свойства решения в замкнутой области. Доказываются дифференциальные свойства в замкнутой области решения уравнения типа С. Л. Соболева.

В настоящей работе исследуются свойства решений системы урав-
ений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \overline{U}}{\partial t} = A\overline{U} - \operatorname{grad} p + \overline{F}, \\ \operatorname{div} \overline{U} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

де $\overline{U} = (u_1(x_1, x_2, x_3, t),\ \ u_2(x_1, x_2, x_3, t),\ \ u_3(x_1, x_2, x_3, t))$, $\overline{F} = (F_1, F_2, F_3)$,
l — матрица с ограниченными элементами, а также исследуются свойства ешений конечно-разностного аналога системы (1). Работа является под-обным изложением результатов, опубликованных в работах автора ([4]), [5]), ([10]).

Для системы (1) ставится либо задача Коши, и тогда задается

$$\overline{U}\,|_{t=0} = \overline{U}_0(x_1, x_2, x_3), \tag{2}$$

ибо смешанная задача: ищется решение системы (1) в односвязной об-асти Ω, гомеоморфной сфере, удовлетворяющее условию (2) и одному из ледующих двух условий:

$$p\,|_S = 0, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{3} u_i \cos(n, x_i)\,|_S = \overline{U}_n = 0, \tag{4}$$

де S — граница области Ω, а n — нормаль к границе S.

Определим для системы (1) понятие обобщенного решения в области $= \Omega \times [0, l]$: обобщенным решением системы (1) назовем векторы $\overline{U}$, rad $p \in L_2(Q)$, для которых при любом векторе $\overline{\Phi}$ таком, что $\overline{\Phi}$, $\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial t} \in L_2(Q)$ $\overline{\Phi}\,|_{k=l} = 0$, выполняется интегральное тождество:

$$\int_0^l \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial t} + A^* \overline{\Phi}\right)\overline{U} - \overline{\Phi} \operatorname{grad} p + \overline{F}\overline{\Phi}\right] d\Omega\, dt + \int_\Omega \overline{U}_0 \Phi|_{t=0} d\Omega = 0 \tag{5}$$

(где A^* — матрица, сопряженная к A) и такие условия: для задачи (2), (4)

$$\int_0^l \int_\Omega \overline{U} \operatorname{grad} q \, d\Omega \, dt = 0 \qquad (5')$$

для любого $\operatorname{grad} q \in L_2(Q)$, а для задачи (2), (3)

$$\int_0^l \int_\Omega (\operatorname{rot} \overline{\psi} \operatorname{grad} p + \overline{U} \operatorname{grad} q) \, d\Omega \, dt = 0 \qquad (5'')$$

для любого $\operatorname{rot} \overline{\psi} \in L_2(Q)$ и любого $\operatorname{grad} q \in L_2(Q)$, у которого $q|_S = 0$.

Система типа (1) была исследована С. Л. Соболевым [6]. Можно было бы доказать существование обобщенных решений перечисленных выше задач методом, развитым С. Л. Соболевым в работе [6], но мы решим эти задачи, исследуя свойства решений конечно-разностного аналога системы (1). При этом окажется, что к решениям конечно-разностного аналога можно успешно применять метод ортогональных проекций, а также перенести на них все теоремы, доказанные С. Л. Соболевым в работе [6].

§ 1. Некоторые предложения о разностных отношениях

Пусть дано пространство $R_3(x_1, x_2, x_3)$. Множество точек $x \in R_3$ с координатами

$$x_i = k_i h, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $h > 0$ и k_i — целые числа, обозначим через M_h. Множество точек $x \in M_h$, для которых

$$\sum_{i=1}^{3} k_i = 2j, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots,$$

обозначим через M_{1h}, а множество точек $x \in M_h$, для которых

$$\sum_{i=1}^{3} k_i = 2j + 1,$$

обозначим через M_{2h}. Если область Ω конечна, то считаем, что $x(k_1 h, k_2 h, k_3 h) \in \Omega_{2h}$, если $x \in M_{2h}$ и октаэдр с центром в точке x и с диагоналями, параллельными осям координат, длиной $4h$, принадлежит Ω. Определим граничные точки S_{2h} для Ω_{2h}: скажем, что $x \in S_{2h}$, если на расстоянии $2h$ от точки x найдутся точки из M_{2h} как принадлежащие, так и не принадлежащие Ω_{2h}; обозначим $\overline{\Omega}_{2h} = \Omega_{2h} + S_{2h}$.

Мы скажем, что $x \in \Omega_{1h}$, если $x \in M_{1h}$ и на расстоянии h от точки x находятся шесть точек множества $\overline{\Omega}_{2h}$.

Пусть в M_{2h} задана функция $\varphi(x_1, x_2, x_3)$; тогда обозначим

$$\varphi_{x_1} = \frac{1}{2h} (\varphi(x_1 + h, x_2, x_3) - \varphi(x_1 - h, x_2, x_3)),$$

где $x(x_1, x_2, x_3) \in M_{1h}$; аналогично определяются φ_{x_2}, φ_{x_3}, причем φ_{x_i}, $i = 1, 2, 3$, мы считаем определенными в точках $x \in M_{1h}$; аналогично определяются φ_{x_i} в точках $x \in M_{2h}$ через значения функции φ, заданные на множестве M_{1h}.

Пусть H_{ih}, $i = 1, 2$, — пространства векторов $\overline{v}$, определенных в Ω_{ih} и таких, что

$$\| \overline{v} \|_{ih}^2 = h^3 \sum_{\Omega_{ih}} \| \overline{v} \|^2 < C.$$

Введем в H_{ih} скалярные произведения

$$(\bar{v}^{(1)}, \bar{v}^{(2)})_{ih} = h^3 \sum_{\Omega_{ih}} (v_1^{(1)} v_1^{(2)} + v_2^{(1)} v_2^{(2)} + v_3^{(1)} v_3^{(3)}), \tag{6}$$

а также понятия разностного градиента, разностной расходимости и разностного вихря:

$$\operatorname{grad}_h \varphi = (\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, \varphi_{x_3}), \tag{7}$$

$$\operatorname{div}_h v = v_{1x_1} + v_{2x_2} + v_{3x_3}, \tag{8}$$

$$\operatorname{rot}_h \bar{\psi} = ((\psi_{3x_2} - \psi_{2x_3}), (\psi_{1x_3} - \psi_{3x_1}), (\psi_{2x_1} - \psi_{1x_2})). \tag{9}$$

Назовем элементарным отрезком Δs отрезок длиной $2h$, имеющий концы в точках $x_1, x_2 \in M_{2h}$; замкнутый контур, состоящий из четырех элементарных отрезков, назовем элементарным контуром. Направленный элементарный отрезок $\overline{\Delta} s$ назовем элементарным перемещением. Множество M_{2h} распадается на четыре таких множества M_{2h}^j, $j = 0, 1, 2, 3$, что точки из разных M_{2h}^j нельзя соединить ломаной линией, состоящей из элементарных отрезков. Выражение $\Delta A = \bar{F}\,\overline{\Delta s}$, где $\bar{F} \in M_{1h}$ и определен в середине элементарного отрезка $\overline{\Delta} s$, назовем элементарной работой. Соединим две точки из одного и того же множества M_{2h}^j ломаной линией γ, состоящей из элементарных отрезков; тогда $A = \sum_{\gamma} \bar{F}\,\overline{\Delta s}$ назовем работой $\bar{F}$ на пути γ. Возьмем по точке из разных M_{2h}^j; это множество обозначим через m_h.

ТЕОРЕМА 1. *Для представимости вектора $\bar{v}$, определенного на M_{1h}, в виде $\bar{v} = \operatorname{grad}_h \varphi$, где функция φ определена на M_{2h}, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rot}_h \bar{v} = 0$.*

Необходимость проверяется вычислением: $\operatorname{rot}_h \operatorname{grad}_h \varphi \equiv 0$.

Докажем достаточность. Если $\operatorname{rot}_h \bar{v} = 0$, то работа v по любому замкнутому контуру γ равна нулю. В самом деле,

$$A = \sum_{\gamma} \bar{v}\,\overline{\Delta s} = \sum_{k} \sum_{c_k} \bar{v}\,\overline{\Delta s},$$

где c_k — элементарные контуры; но $\sum_{c_k} \bar{v}\,\overline{\Delta s} = 0$, следовательно, $A = 0$.

Определим теперь функцию φ следующим образом: положим $\varphi = 0$ в точках m_h, а в любой точке $x \in M_{2h}$ определим φ по формуле

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\gamma} \bar{v}\,\overline{\Delta s},$$

где γ — контур, соединяющий x с одной из точек множества m_h. Так как $A = 0$ по замкнутому контуру, то функция $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ всюду на M_{2h} определяется однозначно. А тогда $\bar{v} = \operatorname{grad}_h \varphi$.

ТЕОРЕМА 2. *Для представимости вектора $\bar{v}$, определенного на M_{1h}, в виде $\bar{v} = \operatorname{rot}_h \bar{\psi}$, где вектор $\bar{\psi}$ определен на M_{2h}, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{div}_h \bar{v} = 0$.*

Необходимость проверяется вычислением: $\operatorname{div}_h \operatorname{rot}_h \bar{\psi} \equiv 0$.

Мы докажем достаточность, если построим вектор $\overline{\psi}$ по заданному вектору $\overline{v}$ в прямоугольном параллелепипеде $D\,(0\leqslant x_i\leqslant k_ih,\ i=1,2,3)$. Пусть в точках множества $M_{2h}D$, лежащих в плоскостях $x_3=0,\ x_3=h$ функции $\psi_1,\ \psi_2$ известны, а функция ψ_3 известна в плоскости $x_3=h$; в противном случае положим $\psi_1=0$ при $x_3=0,\ x_3=h,\ \psi_3|_{x_3=h}=0$, а за ψ_2 берем какое-нибудь решение уравнений $\psi_{2x_1}-v_{3,x_3=0,h}=0$. Полагаем теперь $\psi_3=0$ в $M_{2h}D$ при $x_3\geq h$, а функции $\psi_1,\ \psi_2$ при $x_3=2h$ определяем из формул

$$\psi_{3x_2}-\psi_{2x_3}=v_1,\quad \psi_{1x_3}-\psi_{3x_1}=v_2,$$

записанных при $x_3=h$. Очевидно, что для определенных таким образом функций $\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3$ при $x_3=h$ выполняется равенство

$$\psi_{2x_1}-\psi_{1x_2}=v_3. \tag{10}$$

По аналогичным формулам определяем функции $\psi_1,\ \psi_2$ при $x_3=3h$. Остается проверить справедливость равенства (10) при $x_3=2h$. В самом деле,

$$\psi_{1x_2}(x_1,x_2,2h)=\psi_{1x_2}(x_1,x_2,0)+2h\,(\psi_{3x_1x_2}(x_1\,x_2,2h)+v_{2x_2}(x_1,x_2,h)).$$
$$\psi_{2x_1}(x_1,x_2,2h)=\psi_{2x_1}(x_1,x_2,0)+2h\,(\psi_{3x_1x_2}(x_1,x_2,2h)-v_{1x_1}(x_1,x_2,h)),$$

т. е.

$$\psi_{2x_1}-\psi_{1x_2}=\psi_{2x_1}-\psi_{1x_2}|_{x_3=0}-2h\,(v_{1x_1}+v_{2x_2})=$$
$$=v_3|_{x_3=0}+2hv_{3x_3}=v_3\,(x_1,x_2,2h).$$

Продолжая описанный процесс, мы определим ψ_1,ψ_2,ψ_3 на всем множестве $M_{2h}D$, а значит, и на всем M_{2h}. А тогда $\overline{v}=\mathrm{rot}_h\,\overline{\psi}$.

Очевидно, что теоремы 1 и 2 остаются справедливыми, если в их формулировках множества M_{1h} и M_{2h} поменять местами или соответственно заменить их множествами $\Omega_{1h},\ \overline{\Omega}_{2h}$.

В H_{1h} лежат линейное многообразие G_{1h} векторов вида $\overline{v}_1=\mathrm{grad}_h\varphi$ (такие векторы назовем потенциальными) и линейное многообразие J_{1h} векторов вида $\overline{v}_1=\mathrm{rot}_h\overline{\psi}$ (такие векторы назовем соленоидальными). Введем еще линейные многообразия векторов $H^0_{1h},\ G_{0h},\ J_{0h}$: мы считаем, что $\overline{v}\in H^0_{1h}$, если $\overline{v}\in H_{1h}$ и $\overline{v}\equiv 0$ вне $\Omega_{vh}\subset\Omega_{1h}$, что $\overline{v}_1\in G_{0h}$, если $\overline{v}_1=$ $=\mathrm{grad}_h\,\varphi\in G_{1h}$ и $\varphi\equiv 0$ вне $\Omega_{v_1h}\subseteq\Omega_{2h}$, что $\overline{v}_2\in J_{0h}$, если $\overline{v}_2=\mathrm{rot}_h\overline{\psi}\in J_{1h}$ и $\overline{\psi}=0$ вне $\Omega_{v_2h}\subset\Omega_{2h}$. Замкнем все рассмотренные пространства векторов; замыкание будем обозначать черточкой над буквой. Тогда для случая, когда область Ω есть все пространство, справедливы следующие леммы:

ЛЕММА 1. *В случае, когда область Ω есть все пространство, элемент $\overline{v}$ из H_{1h}, ортогональный ко всем элементам $\overline{G}_{0h}$ и $\overline{J}_{0h}$, может быть лишь тождественным нулем.*

Покажем, что из ортогональности $\overline{v}$ к $\overline{G}_{0h}$ и $\overline{J}_{0h}$ следует ортогональность $\overline{v}$ к разностному оператору Лапласа с шагом $2h$ от вектора $\overline{w}\in\overline{H}^0$. Это следует из того, что

$$\Delta_{2h}\overline{w}=\mathrm{grad}_h\,\mathrm{div}_h\,\overline{w}-\mathrm{rot}_h\,\mathrm{rot}_h\,\overline{w}, \tag{11}$$

а

$$z_1=\mathrm{grad}_h\,\mathrm{div}_h\,\overline{w}\in\overline{G}_{0h}\ \text{ и }\ z_2=\mathrm{rot}_h\,\mathrm{rot}_h\,\overline{w}\in\overline{J}_{0h}.$$

Следовательно,

$$(\bar{v},\ \Delta_{2h}\bar{w})_{1h} = (\bar{v}, z_1)_{1h} - (v_1 z_2)_{1h} = 0,$$

т. е.

$$h^3 \sum_{\Omega_{1h}} v_i \Delta_{2h} w_i = 0, \qquad i=1, 2, 3. \tag{12}$$

Если взять за $\bar{w}$ такие векторы: $w_i = 1$ в точке (x_{01}, x_{02}, x_{03}), а в остальных точках $w_i = 0$, то из (12) получаем, что

$$\Delta_{2h} v_i = 0 \tag{13}$$

всюду в Ω_{1h}, но $h^3 \sum_{\Omega_{1h}} v_i^2 < C$; суммирование в этом ряде будем проводить по расширяющимся концентрическим кубам, окружающим точку (x_{01}, x_{02}, x_{03}); тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется куб со столь большими гранями что на каждой из них будет выполнено неравенство $|v_i| < \varepsilon$. Ввиду произвольности ε и справедливости принципа максимума для (13), отсюда следует, что $v_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, в Ω_{1h}.

В дальнейшем нам понадобится следующая формула:

$$h \sum_{k=0}^{n} u(x_0 + 2kh)\, v_x(x_0 + 2kh) = -h \sum_{k=0}^{n-1} v(x_0 + (2k+1)h)\, u_x(x_0 + (2k+1)h) +$$

$$+ u(x_0 + 2nh)\, v(x_0 + 2(n+1)h) - u(x_0)\, v(x_0 - h), \tag{14}$$

которую можно легко проверить непосредственно.

ЛЕММА 2. *Многообразие $\bar{G}_{0h}$ ортогонально к многообразию $\bar{J}_{1h}$.*

Пусть $\bar{v}_1 \in G_{0h}$, $\bar{v}_2 \in J_{1h}$; тогда, в силу теорем 1, 2 и формулы (14),

$$(\bar{v}_1, \bar{v}_2)_{1h} = (\mathrm{grad}_h\, \varphi, \bar{v}_2)_{1h} = -(\varphi, \mathrm{div}_h\, \bar{v}_2)_{2h} = 0,$$

так как

$$\mathrm{div}_h \bar{v}_2 = 0.$$

ЛЕММА 3. *Многообразие $\bar{G}_{1h}$ ортогонально к многообразию $\bar{J}_{0h}$.*

Пусть $\bar{v}_1 \in G_{1h}$, $\bar{v}_2 \in J_{0h}$; тогда, в силу теорем 1, 2 и формулы (14),

$$(\bar{v}_1, \bar{v}_2)_{1h} = (\bar{v}_1, \mathrm{rot}_h\, \bar{\psi})_{1h} = (\mathrm{rot}_h\, \bar{v}_1, \bar{\psi})_{2h} = 0,$$

так как

$$\mathrm{rot}_h\, \bar{v}_1 = 0.$$

Следствие. *Многообразие $\bar{J}_{0h}$ ортогонально к многообразию G_{0h}.*

Из доказанных лемм следует

ТЕОРЕМА 3. *Для случая, когда область Ω есть все пространство, пространство H_{1h} можно представить в виде:*

$$H_{1h} = J_h \oplus G_h, \text{ где } J_h = \bar{J}_{0h} = \bar{J}_{1h}, \quad G_h = \bar{G}_{0h} = \bar{G}_{1h}.$$

В самом деле, так как $\bar{J}_{0h}$ и $\bar{G}_{0h}$ ортогональны и в H_{1h} не содержится ни одного элемента, ортогонального к ним одновременно, то, следовательно,

$$H_{1h} = \bar{J}_{0h} \oplus \bar{G}_{0h},$$

но $\bar{J}_{1h} \supseteq \bar{J}_{0h}$ и $\bar{J}_{1h}$ ортогонально к G_{0h}, т. е.

$$\bar{J}_{1h} = \bar{J}_{0h};$$

точно так же $\bar{G}_{1h} \supseteq \bar{G}_{0h}$ и $\bar{G}_{1h}$ ортогонально к J_{0h}, следовательно,

$$\bar{G}_{1h} = \bar{G}_{0h}.$$

Теорема доказана.

Докажем теперь несколько лемм для конечных областей.

ЛЕММА 4. *Всякий вектор $\bar{v}$ из H_{1h}, ортогональный к J_{0h} и G_{0h} одновременно, есть гармонический вектор, т. е. вихрь; расходимость его и $\Delta_{2h}\bar{v}$ равны нулю.*

Пусть $\bar{v}_1 = \mathrm{grad}_h\, \varphi \in G_{0h}$; тогда

$$(\bar{v}, \bar{v}_1)_{1h} = 0 = (v, \mathrm{grad}_h\, \varphi)_{1h} = -(\varphi, \mathrm{div}_h\, v)_{2h},$$

т. е. $\mathrm{div}_h\, \bar{v} = 0$ в Ω_{2h}.

Пусть $\bar{v}_2 = \mathrm{rot}_h\, \psi \in J_{0h}$; тогда

$$(\bar{v}, \bar{v}_2)_{1h} = 0 = (\bar{v}, \mathrm{rot}_h\, \bar{\psi})_{1h} = (\bar{\psi}, \mathrm{rot}_h\, \bar{v})_{2h},$$

т. е. $\mathrm{rot}_h\, \bar{v} = 0$ в Ω_{2h}.

Равенство $\Delta_{2h}\bar{v} = 0$ следует из формулы (10).

ЛЕММА 5. *Вектор $\bar{v}$, ортогональный к G_{0h} и J_{1h} одновременно, есть тождественный нуль.*

Так как $\bar{v}$ ортогонален к G_{0h}, J_{1h} и $J_{0h} \subset J_{1h}$, то $\bar{v}$ — гармонический вектор, т. е. $\mathrm{div}_h\, \bar{v} = 0$, следовательно, $\bar{v}$ представим в виде $\bar{v} = \mathrm{rot}_h\, \psi$, т. е. $\bar{v} \in J_{1h}$, но $\bar{v}$ ортогонален J_{1h}, следовательно, $\bar{v} \equiv 0$.

ЛЕММА 6. *Вектор $\bar{v}$, ортогональный к G_{1h} и J_{0h} одновременно, есть тождественный нуль.*

Так как $\bar{v}$ ортогонален к J_{0h}, G_{1h} и $G_{0h} \subset G_{1h}$, то $\bar{v}$ — гармонический вектор, т. е. $\mathrm{rot}_h\, \bar{v} = 0$, следовательно, $\bar{v}$ представим в виде $\bar{v} = \mathrm{grad}_h\, \varphi$, т. е. $\bar{v} \in G_{1h}$; но $\bar{v}$ ортогонален G_{1h}, следовательно, $v \equiv 0$.

ТЕОРЕМА 4. *Пространство H_{1h} допускает представление*

$$H_{1h} = G_{0h} \oplus I_h \oplus J_{0h}, \text{ где } I_h = G_{1h} \cdot J_{1h}.$$

Из лемм 5, 6 следует, что

$$H_{1h} = G_{0h} \oplus J_{1h}, \quad H_{1h} = G_{1h} \oplus J_{0h}.$$

Покажем, что если вектор $\bar{v}$ ортогонален к G_{0h}, J_{0h} и I_h, то $\bar{v} \equiv 0$. В самом деле, если $\bar{v}$ ортогонален к G_{0h}, то $\bar{v} \in J_{1h}$, а в силу того, что $\bar{v}$ ортогонален к J_{0h}, следует, что $\bar{v} \in G_{1h}$, следовательно, $\bar{v} \in I_h$; но из ортогональности $\bar{v}$ к I_h следует, что $\bar{v} \equiv 0$, что и доказывает справедливость теоремы.

§ 2. Построение приближенного решения

Построим разностный аналог системы (1). В пространстве $R_4(x_1, x_2, x_3, t)$ рассмотрим множество точек (x, t) с координатами $x_i = k_i h$, $t = k_0 \Delta t$, $i = 1, 2, 3$, $\Delta t > 0$. Множество точек (x, t) таких, что $x \in \Omega_{ih}$, обозначим через D_{ih}.

Положим

$$\overline{U}_t = \frac{1}{\Delta t}\left(\overline{U}(x_1, x_2, x_3, t) - \overline{U}(x_1, x_2, x_3, t - \Delta t)\right),$$

$$\overline{U}_{\text{ср}} = \alpha U(x_1, x_2, x_3, t) + \beta \overline{U}(x_1, x_2, x_3, t - \Delta t),$$

где $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ и $\alpha + \beta = 1$.

Систему (1) в точках $(x, t) \in D_{1h}$ заменим уравнениями:

$$\begin{gathered}\overline{U}_t = A\overline{U}_{\text{ср}} - \operatorname{grad}_h p + \overline{F},\\ \operatorname{div}_h \overline{U} = 0\end{gathered} \tag{15}$$

в точках $(x, t) \in D_{2h}$.

Найдем решение системы (15).

I. Условие (4) для гладких функций и гладких границ области Ω эквивалентно условию [см. ([6])]:

$$\int_{\Omega} (\overline{U}, \operatorname{grad} \varphi)\, d\Omega = 0 \text{ для любой } \varphi. \tag{16}$$

Для системы (15) условие (16) заменим следующим условием:

$$(\overline{U}, \operatorname{grad}_h \varphi)_{1h} = 0 \text{ для любой } \varphi. \tag{17}$$

Рассмотрим решение (15), заменив условие (4) требованием, чтобы $\overline{U}$ был произвольным элементом из J_{0h}. Тогда $\overline{v}_1 = \operatorname{grad}_h p$ определяется формулой:

$$\overline{v}_1 = P_{0h}^{*}\{A\overline{U}_{\text{ср}} + F\}, \text{ а } \overline{U}_t = P_{0h}\{A\overline{U}_{\text{ср}} + \overline{F}\}, \tag{18}$$

где P_{0h}^{*}, P_{0h} — операторы проектирования H_{1h} соответственно в G_{1h} и J_{0h}.

II. Условие (3) для гладкой функции p и гладкой границы области Ω эквивалентно условию [см. ([6])]:

$$\int_{\Omega} \left(\overline{U}, \operatorname{grad} p\right) d\Omega = 0 \text{ для любого } \overline{U} \in \overline{J}_1. \tag{19}$$

Для системы (15) заменим (19) условием, что

$$(\overline{U}, \operatorname{grad}_h p)_{1h} = 0 \text{ для любого } \overline{U} \in J_{1h}. \tag{20}$$

Тогда

$$\operatorname{grad}_h p = P_{1h}^{*}\{A\overline{U}_{\text{ср}} + \overline{F}\}, \quad \overline{U}_t = P_{1h}\{A\overline{U}_{\text{ср}} + \overline{F}\}, \tag{21}$$

где P_{1h}^{*}, P_{1h} — операторы проектирования H_{1h} соответственно в G_{0h} и J_{1h}.

III. Аналогично находим решение (15) для задачи Коши:

$$\operatorname{grad}_h p = P_h^{*}\{A\overline{U}_{\text{ср}} + \overline{F}\}, \quad \overline{U}_t = P_h\{A\overline{U}_{\text{ср}} + \overline{F}\}, \tag{22}$$

где P_h^{*}, P_h — операторы проектирования H_{1h} соответственно в $\overline{G}_{0h}$ и $\overline{J}_{0h}$.

Найдем решение уравнений (18) в явном виде; для уравнений (21), (22) решения находятся аналогично. Пусть $t_i = i\Delta t$ и $\Delta t \leqslant \frac{1}{2\alpha \|A\|}$; тогда,

введя в рассмотрение операторы:

$$B_h(t_i) = P_{0h}A(t_i),$$
$$D_h(t_i) = [E + \Delta t(E - \Delta t \alpha B_h(t_i))^{-1} B_h(t_i)],$$
$$K_h(t_i) = D_h(t_i) D_h(t_{i-1}) \dots D_h(\Delta t),$$

получаем решение неоднородного уравнения (18) при условии $\bar{U}|_{t=0} = \bar{U}_0$:

$$\bar{U}(t_i) = K_h(t_i)\bar{U}_0 + \\ + \Delta t \sum_{k=1}^{i} K_h(t_i)[K_h(t_k)]^{-1}[E - \Delta t \alpha B_h(t_k)]^{-1} P_{0h}\bar{F}(t_k). \tag{23}$$

Это решение единственно, так как $\bar{U}(t_k)$ выражается через $\bar{U}(t_{i-1})$ единственным образом.

Докажем сходимость приближенного решения к точному. Предварительно сделаем такое замечание, которое нужно иметь в виду при разборе всех доказательств о сходимости и о дифференциальных свойствах обобщенных решений: при доказательстве сходимости мы все известные нам функции, входящие в уравнение и в начальные и краевые условия, заменяем сначала средними функциями [см. ([7])], а затем или доказываем сходимость приближенного решения к точному решению, которое определяется этими средними функциями, или доказываем существование такого решения как предела приближенных решений при $h \to 0$, $\Delta t \to 0$. Для доказательства же существования и дифференциальных свойств решений поставленных задач мы переходим к пределу в средних функциях. Для краткости, мы не вводим новых обозначений для средних функций.

Пусть элементы матрицы A имеют ограниченные производные до порядка k включительно, величины A_i, C_i, $i = 0, 1, \dots$, обозначают положительные постоянные, зависящие от l, норм матрицы A и производных от матрицы A.

Тогда легко показать, что

$$\|K_h(t_i)\| \leqslant e^{2\|A\| t_i}, \quad \|K_h(t_i)[K_h(t_k)]^{-1}\| \leqslant e^{2\|A\|(t_i - t_k)}.$$

Из вида формул (23), (18) заключаем, что

$$\|\bar{U}(t_i)\|_{1h} \leqslant A_0 (\|\bar{U}_0\|_{1h} + \Delta t \sum_{k}^{i} \|\bar{F}(t_k)\|_{1h}), \tag{24}$$

$$\|\bar{U}_t(t_i)\|_{1h} + \|\operatorname{grad}_h p(t_i)\|_{1h} \leqslant \\ \leqslant A_1 (\|\bar{U}_0\|_{1h} + \|\bar{F}(t_i)\|_{1h} + \Delta t \sum_{k=1}^{i} \|\bar{F}(t_k)\|_{1h}). \tag{25}$$

Вычисляя разностные отношения по t от левых частей формул (18), последовательно получаем:

$$\left\| \frac{\Delta^m \operatorname{grad}_h p}{\Delta t^m} \right\|_{1h} + \left\| \frac{\Delta^m \bar{U}_t}{\Delta t^m} \right\|_{1h} \leqslant \\ \leqslant A_m \left[\|\bar{U}_0\|_{1h} + \sum_{j=0}^{m} \left(\left\| \frac{\Delta^j}{\Delta t^j} \bar{F} \right\|_{1h} + \Delta t \sum_{k=1}^{i} \left\| \frac{\Delta^j}{\Delta t^j} \bar{F}(t_k) \right\|_{1h} \right) \right], \quad m = 1, 2, \dots, k. \tag{26}$$

Оценим теперь разностные отношения по x_i в любом кубе D (не уменьшая общности, можно считать, что он определяется неравенствами $0 \leqslant x_i \leqslant m$, $i = 1, 2, 3$), целиком лежащем в Ω_{1h} вместе с кубом $D^1 (-l_1 \leqslant x_i \leqslant m + l_1$, где $l_1 \geqslant 4h)$.

Введем в рассмотрение следующие множества: $D_1 = \Omega_{1h} D$, $D_2 = \Omega_{2h} D$. Обозначим:

$$\varphi_{\text{ср}j} = \frac{1}{2} (\varphi(x_j + h) + \varphi(x_j - h)),$$
$$\Delta_j^2 \varphi(x_j) = \varphi(x_j + h) - 2\varphi(x_j) + \varphi(x_j - h).$$

Пусть $\zeta(x_1, x_2, x_3)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция такая, что $\zeta > 0$ в D и $\zeta = 0$ вне D. Для нее всюду будет выполнено неравенство

$$|\Delta_j^2 \zeta| \leqslant C_0 h^2, \quad j = 1, 2, 3,$$

где $C_0 > 0$.

Вычислим разность по x_i от системы (15) для точек $x \in D_2$:

$$\bar{U}_{x_i t} = A_{\text{ср}\, i} \bar{U}_{\text{ср}\, x_i} + A_{x_i} (\bar{U}_{\text{ср}})_{\text{ср}\, i} - \operatorname{grad}_h p_{x_i} + \bar{F}_{x_i},$$
$$\operatorname{div}_h \bar{U}_{x_i} = 0.$$

Введем в рассмотрение функции $\bar{V} = \zeta \bar{U}_{x_i}$, $q = \zeta p_{x_i}$. Тогда

$$\bar{V}_t = A_{\text{ср}\, i} \bar{V}_{\text{ср}} - \operatorname{grad}_h q + \zeta \bar{F}_{x_i} + \zeta A_{x_i} (\bar{U}_{\text{ср}})_{\text{ср}\, i} + \bar{V}',$$
$$\operatorname{div}_h \bar{V} = g,$$

где

$$v'_j = -h p_{x_i x_j} \zeta_{x_i} - \frac{\Delta_j^2 \zeta}{2h} p_{\text{ср}j x_i}, \quad j = 1, 2, 3,$$

а

$$g = \frac{1}{2} [(\Delta_2^2 \zeta - \Delta_1^2 \zeta) u_{2x_2} + (\Delta_3^2 \zeta - \Delta_1^2 \zeta) u_{3x_3}] + \sum_{j=1}^{3} \zeta_{x_j} u_{j\, \text{ср}i}.$$

Пусть $\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2$, причем

$$\operatorname{div}_h \bar{V}_2 = g, \quad \operatorname{div}_h \bar{V}_1 = 0.$$

Решение первого уравнения ищем в виде

$$\bar{V}_2 = \operatorname{grad}_h \varphi,$$

где $\varphi = 0$ вне D; тогда $\Delta_{2h} \varphi = g$ и

$$h^3 \sum_{D_2} \| \bar{V}_2 \|^2 = h^3 \sum_{D_2} \operatorname{grad}_h^2 \varphi \leqslant C_1 h^3 \sum_{D_2} g^2,$$
$$h^3 \sum_{D_2} \| \bar{V}_{2t} \|^2 = h^3 \sum_{D_2} \operatorname{grad}_h^2 \varphi_t \leqslant C_2 h^3 \sum_{D_2} g_t^2$$

[см. ([3])]. А тогда для $\bar{V}_1$, q получаем систему рассмотренного уже типа (15). Если H'_{2h} — пространство векторов, определенных на D_2, то, вводя в нем подпространства G'_{1h}, J'_{1h}, G'_{0h}, J'_{0h}, аналогичные рассмотренным, мы получим для величин $\bar{V}_{1t}$, $\operatorname{grad}_h q$ формулы, аналогичные формулам (18), (23). Из этих формул получаем следующие оценки в любом кубе D'',

строго внутреннем по отношению к кубу D:

$$\| U_{x_j}(t_i) \|' \leqslant A_0' (M_1 + \Delta t \sum_{k=1}^{i} N_1(t_k)), \tag{27}$$

$$\| \operatorname{grad}_h P_{x_j}(t_i) \|' + \| \bar{U}_{x_j t}(t_i) \|' \leqslant A_1' (M_1 + N_1(t_i) + \Delta t \sum_{k=1}^{i} N_1(t_k))$$
$$(j = 1, 2, 3). \tag{28}$$

Здесь

$$M_1 = \| \bar{U}_0 \|_{1h} + \| \bar{U}_{0x_j} \|_{2h}, \quad N_1(t_i) = \| \bar{F}(t_i) \|_{1h} + \| \bar{F}_{x_j}(t_i) \|_{2h},$$

а $\| \|'$ обозначает норму в области D''.

Введем для функции $f(x_1, x_2, x_3)$ еще такие разностные отношения:

$$\frac{1}{h\sqrt{2}}(f(x_1 + \delta_1 h, x_2 + \delta_2 h, x_3 + \delta_3 h) - f(x_1, x_2, x_3)), \tag{29}$$

где $\delta_i = 0, 1$, $i = 1, 2, 3$ и $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 2$. Тогда для разностных отношений (29) от U_h, $\operatorname{grad}_h p$ точно так же получаем оценки типа (27), (28). Аналогично оцениваются разности по x_i высших порядков. От этих разностей, так же как были получены неравенства (26), оцениваются разности по t. Теперь воспользуемся результатами работы О. А. Ладыженской ([3]).

Пусть $\bar{U}_0 \in W_2^{(k)}(\Omega)$, $\bar{F} \in W_2^{(k)}(Q)$; тогда при h, $\Delta t \to 0$ из последовательности $\bar{U}_{ht}$, $\operatorname{grad}_h p$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся в $L_2(Q)$ и в $W_2^{(k)}(Q_1)$, где $Q_1 = \Omega_1 \times [0, l]$, а Ω_1 — любая, строго внутренняя подобласть области Ω, к функциям $\frac{\partial U}{\partial t}$, $\operatorname{grad} p$. Из равенства

$$\Delta t \sum_{\Delta t}^{l} h^3 \left\{ \sum_{\Omega_{1h}} \bar{\Phi} [\bar{U}_t - A\bar{U}_{\text{ср}} + \operatorname{grad}_h p - \bar{F}] \right\} = 0,$$

в котором вектор Φ удовлетворяет требованиям, необходимым для выполнения тождества (5), приходим при h, $\Delta t \to 0$ к тождеству (5), т. е. $\bar{U}$, $\operatorname{grad} p$ есть обобщенное решение системы (1). Аналогично проверяется выполнение условий (5′) и (5″).

Таким образом, верна следующая

ТЕОРЕМА 5. *Если $\bar{F} \in W_2^{(k)}(Q)$, $\bar{U}_0 \in W_2^{(k)}(\Omega)$, то существует обобщенное решение рассмотренных задач, соответствующее функциям $\bar{U}_0$ и $\bar{F}$, причем $\operatorname{grad} p \in L_2(Q)$, $\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} \in L_2(Q)$ и для любой строго внутренней подобласти Ω_1 области Ω*

$$\operatorname{grad} p \in W_2^{(k)}(Q_1), \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} \in W_2^{(k)}(Q_1),$$

где $Q_1 = \Omega_1 \times [0, l]$, и для этих величин справедливо неравенство:

$$\| \operatorname{grad} p \|_{L_2(Q)} + \left\| \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} \right\|_{L_2(Q)} \leqslant C (\| \varphi \|_{L_2(\Omega)} + \| \psi \|_{L_2(\Omega)} + \| \bar{F} \|_{L_2(Q)}).$$

Единственность обобщеного решения получается из того факта, что за вектор $\bar{\Phi}$ мы можем сначала взять решение сопряженной к (1) системы, в которой роль $\bar{F}$ играет $\bar{U}$, $\Phi |_{t=l} = 0$, удовлетворяющее тем же краевым условиям; тогда мы получим, что $\int_Q \bar{U}^2 dQ = 0$, а затем взять за $\bar{\Phi}$ вектор $\bar{\Phi} = \operatorname{grad} p$ и тогда мы получим, что $\int_Q \operatorname{grad}^2 p \, dQ = 0$.

Перед тем как перейти к исследованию дифференциальных свойств решений смешанных задач в замкнутой области Q заметим, что мы определим дифференциальные свойства $\bar{U}$, если нам будут известны дифференциальные свойства функции p. В самом деле, так как $\bar{U}$ удовлетворяет системе (1), то

$$\left\| \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} \right\|_{W_2^{(k)}(Q)} \leqslant C_1 \left(\|\bar{U}_0\|_{W_2^{(k)}(Q)} + \|\bar{F}\|_{W_2^{(k)}(Q)} + \|\operatorname{grad} p\|_{W_2^{(k)}(Q)} \right).$$

Поэтому составим дифференциальное уравнение для функции p. Мы ограничимся случаем, когда матрица A постоянна, $|\bar{F}| < C_2 e^{\lambda_0 t}, \lambda_0 > 0$, $\bar{U}_0 \equiv 0$ и $\bar{F}|_{t=0} = \left.\frac{\partial \bar{F}}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$. Обозначим через $\widetilde{\varphi}$ результат преобразования Лапласа над функцией φ; тогда, применяя к системе (1) преобразование Лапласа, мы получим:

$$\begin{gathered} \operatorname{grad} \widetilde{p} = (A + \lambda E)\, \widetilde{\bar{U}} + \widetilde{\bar{F}}, \\ \operatorname{div} \widetilde{\bar{U}} = 0, \end{gathered} \tag{30}$$

откуда

$$|A + \lambda E|\,(A + \lambda E)^{-1} \operatorname{grad} \widetilde{p} = |A + \lambda E|\, \widetilde{\bar{U}} + |A + \lambda E|\,(A + \lambda E)^{-1} \widetilde{\bar{F}},$$

где $|A + \lambda E|$ — определитель матрицы $(A + \lambda E)$. Учитывая последнее уравнение системы (30), находим:

$$\operatorname{div} |A + \lambda E|\,(A + \lambda E)^{-1} \operatorname{grad} \widetilde{p} = \operatorname{div} |A + \lambda E|\,(A + \lambda E)^{-1} \widetilde{\bar{F}}.$$

Элементы матрицы $|A + \lambda E|\,(A + \lambda E)^{-1}$ легко вычисляются; они будут вида:

$$a'_{ik} = \delta_i^k \lambda^2 + b_{ik}\lambda + c_{ik}.$$

Совершая обратное преобразование, получим, что функция p должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta p - \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k,i=1}^{3} b_{ik} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{k,i=1}^{3} c_{ik} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_k} = f, \tag{31}$$

где

$$f = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{div} \bar{F} - \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k,i=1}^{3} b_{ik} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} + \sum_{k,j=1}^{3} c_{ik} \frac{\partial F_i}{\partial x_k}.$$

Уравнение (31) является уравнением типа Соболева и его исследование представляет самостоятельный интерес.

§ 3. Уравнение типа Соболева

Пусть функция $u(x, t)$ есть решение в области $Q = \Omega \times [0, l]$ уравнения

$$Lu \equiv \sum_{ij,=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial^3 u}{\partial x_j \partial t^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(B_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(C_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \right] = f(x, t), \tag{32}$$

удовлетворяющее следующим условиям:

$$u|_{t=0} = \varphi, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi, \quad u|_S = 0,$$

где S — граница области Ω, а $f(x, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} \overline{F}$.

Для простоты изложения ограничимся случаем, когда коэффициенты A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} непрерывны и ограничены,

$$-\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \alpha = \text{const} > 0 \text{ и } \overline{F} \in L_2(Q). \tag{33}$$

Для наших целей этого вполне достаточно.

Существование и единственность обобщенного решения поставленной задачи доказаны в работах М. И. Вишика [1], [2] и О. А. Ладыженской [9], поэтому мы остановимся на сходимости решений конечно-разностного аналога для уравнения (32) к обобщенному решению и на дифференциальных свойствах обобщенного решения (32) в замкнутой области Q. В дальнейшем мы будем придерживаться обозначений работы [3] и часто ссылаться на эту работу.

Назовем обобщенным решением поставленной задачи функцию $u(x, t)$ такую, что

$$u|_S = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial^i u}{\partial t^i} \in L_2(Q), \quad i = 0, 1, 2, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

и которая удовлетворяет тождеству

$$\int_Q \sum_{j,i=1}^{n} \left(A_{ij} \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x_j} + B_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_j} + C_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} - F_i\right) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \, dQ = 0 \tag{34}$$

ри любой функции Φ из $\overset{0}{D}_1(Q)$ и при условии, что

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u(x, \Delta t)}{\partial t} - \psi\right)^2 + (u(x, \Delta t) - \varphi)^2 \, d\Omega \to 0, \text{ когда } \Delta t \to 0.$$

Построим конечно-разностный аналог уравнения (32). Разобьем пространство $R_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ плоскостями $x_i = k_i \Delta x_i = k_i h$, $t = k_0 \Delta t$, $h > 0$, $\Delta t > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где k_i — целые числа, на параллелепипеды $Q_{k_1 \ldots k_n k_0}$, координаты точек которых удовлетворяют неравенствам:

$$k_i h \leqslant x_i \leqslant (k_i + 1) h, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad k_0 \Delta t \leqslant t \leqslant (k_0 + 1) \Delta t.$$

Точки с координатами $(k_1 h, \ldots, k_n h, k_0 \Delta t)$ назовем вершинами или точками решетки. Обозначим через Ω_h область, составленную из тех кубов $\Omega_{k_1 \ldots k_n}$ $(k_i h \leqslant x_i \leqslant (k_i + 1) h, \ i = 1, 2, \ldots, n, \ t = 0)$, которые принадлежат открытой области Ω, а через Q_h — призму $\Omega_h \times [0, m\Delta t]$, где $m = \left[\frac{l}{\Delta t}\right]$. Граничную поверхность Ω_h обозначим через S_h и положим

$$S_h \times [0, m\Delta t] = F_h.$$

Заменим уравнение (32) в точках решетки Q_h следующими разностными уравнениями:

$$L_h u \equiv \sum_{i,j=1}^{n} [(A_{ij} u_{t\bar{t}x_j})_{\bar{x}_i} + (B_{ij} u_{\overset{\circ}{t}x_j})_{\bar{x}_i} + (C_{ij} u_{x_j})_{\bar{x}_i}] = f_h, \tag{35}$$

где

$$u_{\overset{\circ}{t}} = \frac{1}{2}(u_t + u_{\bar{t}}), \quad f_h = \sum_{i=1}^{n} F_{i\bar{x}_i}.$$

Определим на точках Q_h функцию u_h, удовлетворяющую внутри Q_h уравнению (35), при $t=0$ и $t=\Delta t$ — начальным условиям:

$$u_h(k_1h, \ldots, k_nh, 0) = \varphi(k_1h, \ldots, k_nh),$$

$$u_h(k_1h, \ldots, k_nh, \Delta t) = \varphi(k_1h, \ldots, k_nh) + \Delta t\psi(k_1h, \ldots, k_nh)$$

и равную нулю в точках F_h. Разрешимость при достаточно малом Δt полученной системы является следствием основного неравенства, полученного ниже, так как из него следует, что соответствующая однородная система может иметь лишь нулевое решение.

Установим основное неравенство. Положим $u_h = 0$ вне Q_h; тогда

$$u_{ht\bar{t}}(L_hu_h - f_h) = 0 \tag{36}$$

для всех точек решетки при $\Delta t \leqslant t \leqslant (m-1)\Delta t$. В дальнейшем значок h у функций u, f мы опускаем.

Просуммируем равенство (36) по всем точкам решетки при $t = p\Delta t$, $p < m$; тогда, опуская знак суммирования по i, j, получим:

$$h^n \sum_{\Omega_h} u_{t\bar{t}}(L_hu - f) =$$

$$= -h^n \sum_{\Omega_h} (A_{ij}u_{x_j t\bar{t}} + B_{ij}u_{x_j \mathring{t}} + C_{ij}u_{x_j} - F_i)\, u_{x_i t\bar{t}} = 0. \tag{37}$$

Оценим отдельные слагаемые этой суммы; для этого введем такие обозначения:

$$\|u\|_h^2 = h^n \sum_{\Omega_h} u^2, \quad \|u\|^2_{hW_2^{(1)}} = h^n \sum_{\Omega_h} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x_i}\right)^2;$$

мы будем пользоваться также неравенством:

$$|ab| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2, \quad \varepsilon > 0;$$

тогда

$$\left| h^n \sum_{\Omega_h} B_{ij}u_{x_j\mathring{t}}\, u_{x_i t\bar{t}} \right| \leqslant C_1 \left[\varepsilon \|u_{tt}\|^2_{hW_2^{(1)}} + \frac{1}{\varepsilon}\left(\|u_{\bar{t}}\|^2_{hW_2^{(1)}} + \|u_t\|^2_{W_2^{(1)}}\right)\right] \leqslant$$

$$\leqslant C_1\varepsilon \|u_{t\bar{t}}\|^2_{hW_2^{(1)}} + \frac{C_2}{\varepsilon}\left(\|\psi\|^2_{hW_2^{(1)}} + \Delta t \sum_{\Delta t}^{p\Delta t} \|u_{t\bar{t}}\|^2_{hW_2^{(1)}}\right).$$

Аналогично,

$$\left| h^n \sum_{\Omega_h} C_{ij}u_{x_j}u_{x_i t\bar{t}} \right| \leqslant C_3 \left[\varepsilon \|u_{t\bar{t}}\|^2_{hW_2^{(1)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\varepsilon}\left(\|\varphi\|^2_{hW_2^{(1)}} + \|\psi\|^2_{hW_2^{(1)}} + \Delta t \sum_{\Delta t}^{p\Delta t} \|u_{t\bar{t}}\|^2_{hW_2^{(1)}}\right)\right],$$

$$\left| h^n \sum_{\Omega_h} F_i u_{x_i t\bar{t}} \right| \leqslant \frac{n\varepsilon}{2}\|u_{t\bar{t}}\|^2_{hW_2^{(1)}} + \frac{1}{2\varepsilon}\|\bar{F}\|_h^2,$$

и из равенств (37) при достаточно малом ε получаем:

$$\|u_{t\bar{t}}\|^2_{hW_2^{(1)}} \leqslant C_4 \left[\|\varphi\|^2_{hW_2^{(1)}} + \|\psi\|^2_{hW_2^{(1)}} + \|\bar{F}\|_h^2 + \Delta t \sum_{\Delta t}^{p\Delta t} \|u_{t\bar{t}}\|^2_{hW_2^{(1)}}\right]. \tag{38}$$

Из последнего неравенства при $\Delta t < C_4^{-1}$ получаем [см. ([3])]:

$$\Delta t \sum_{\Delta t}^{p\Delta t} \| u_{tt} \|^2_{hW_2^{(1)}} \leqslant C_5 e^{C_6 p\Delta t} \left[\| \varphi \|^2_{hW_2^{(1)}} + \| \psi \|^2_{hW_2^{(1)}} + \Delta t \sum_{\Delta t}^{p\Delta t} \| \bar{F} \|^2_h \right]. \quad (39)$$

Это и есть наше основное неравенство.

Проводя далее рассуждения, полностью совпадающие с рассуждениями, проведенными в главе III работы([3]) для доказательства сходимости приближенных решений системы (32) к точному, мы установим, что последовательность $\{u_{hx_i}\}$ вместе с последовательностями $\{u_{htx_i}\}, \{u_{ht\bar{t}x_i}\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, при h, $\Delta t \to 0$ сходится слабо в $L_2(Q)$ к функциям $\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i}, \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x_i}$, что $u(x, t)$ является обобщенным решением нашей задачи, что, кроме того, $\{u_h\}$ и $\{u_{ht}\}$ сходятся к u и $\frac{\partial u}{\partial t}$ на каждой плоскости $t = \text{const}$ в норме $L_2(\Omega)$ равномерно относительно $t \in [0, l]$ и что для предельной функции u справедливо неравенство:

$$\int_0^l \int_\Omega \sum_i \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x_i} \right)^2 d\Omega \, dt \leqslant$$

$$\leqslant C_7 e^{C_8 t} \left[\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega + \int_0^l \int_\Omega \bar{F}^2 d\Omega \, dt \right].$$

Исследуем дифференциальные свойства обобщенного решения. Мы выясним, при каких условиях, наложенных на данные в задаче функции и на гладкость границы S области Ω, найденное обобщенное решение принадлежит $W_2^{(k)}(Q)$, где k — натуральное число.

Возьмем область $\Omega_1 \subset \Omega$, примыкающую по $(n-1)$-мерному многообразию S_1 к границе области Ω. Согласно определению О. А. Ладыженской, назовем Ω_1 пограничной областью канонического вида, если в Ω существуют непрерывно дифференцируемые до порядка k функции $y_i = y_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, отображающие взаимно однозначно область Ω на некоторую область так, что области Ω_1 соответствует куб $-\delta \leqslant y_i \leqslant l_1 + \delta$, $i \neq n$, $\delta \leqslant y_n \leqslant l_1 + 2\delta$, $\delta > 0$, причем грани куба $y_n = \delta$ соответствует многообразие S_1, а всем остальным точкам куба — внутренние точки Ω; кроме того,

$$I = \frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}$$

должен быть больше нуля в $\bar{\Omega}$.

Образ области Ω в пространстве $(y_1, \ldots, y_n)$ обозначим через D, куб $-\delta \leqslant y_i \leqslant l_1 + \delta$, $i \neq n$, $\delta \leqslant y_n \leqslant l_1 + 3\delta$ — через D_1. Возьмем в D_1 куб D', определенный неравенствами $\delta \leqslant y_i \leqslant l_1 - \delta$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть образ D' в пространстве $(x_1, \ldots, x_n)$ есть Ω'; очевидно, $\Omega' \subset \Omega_1 \subset \Omega$. Считаем, что область Ω можно покрыть конечным числом перекрывающихся канонических областей $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ так, чтобы сумма соответствующих им областей $\Omega', \ldots, \Omega^N$ давала бы всю область Ω для какого-нибудь $\delta_1 > 0$.

Введем в $\overline{\Omega}$ новые координаты $y_1, y_2, \ldots, y_n$ с помощью функций $y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$; пусть каноническая область Ω_1 при этом отобразилась на куб D_1, а вся область — на область D.

Известно [см. ([8])], что если

$$L_1 v = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j}\right)$$

есть самосопряженный оператор, то в новых координатах $(y_1, \ldots, y_n)$ самосопряженным оператором будет оператор

$$L_1' v = I L_1 v.$$

Учитывая это, вместо уравнения (32) рассмотрим в новых координатах уравнение

$$ILu = If. \tag{40}$$

Уравнение (40) имеет тот же вид, что и уравнение (32), поэтому мы оставим за ним те же обозначения; независимые переменные также обозначим через x_i. Если для уравнения (40) мы построим разностный аналог, то для него будет справедлива вся изложенная теория, и в частности, оценка (39).

Пусть коэффициенты уравнения (32) и вектор $\overline{F}(x, t)$ имеют непрерывные производные до порядка $k-1$ в цилиндре $\overline{Q} = \overline{\Omega} \times [0, l]$, функции φ, ψ имеют непрерывные производные до порядка k, граница S области Ω непрерывно дифференцируема k раз и пусть

$$\left.\frac{\partial^i \overline{F}}{\partial t^i}\right|_{t=0} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Разностные отношения по t от решения (40) могут быть легко оценены, так как функция u_t удовлетворяет уравнению

$$L_h u_t = f_t - k,$$

где

$$k = \sum_{i,j=1}^{n} \left(A_{ijt}^{+\Delta t} u_{x_j t \bar{t}} + B_{ijt}^{+\Delta t} u_{x_j \mathring{t}} + C_{ijt}^{+\Delta t} u_{x_j}\right)_{\bar{x}_i},$$

и условиям:

$$u_t \big|_{F_h} = 0, \quad u_t \big|_{t=0} = \psi, \quad u_{t\bar{t}} \big|_{t=0} = \psi_1,$$

а для функции ψ_1 известна оценка (38); следовательно, для u_t мы получаем оценку типа (39); оценив u_t, мы оцениваем u_{tt}, $u_{ttt} \ldots$ и т. д. до порядка k.

Оценим в кубе D' при любом $t = p\Delta t < m\Delta t$ другие разностные отношения функции u_h; при этом мы будем учитывать то, что часть S_1 границы S области D лежит в плоскости $x_n = \delta$.

Рассмотрим области D_1, D' и D'' $(0 \leqslant x_i \leqslant l_1,\ i = 1, 2, \ldots, n)$. Очевидно $D' \subset D''$, $D' \subset D_1 \subset D$.

Зададим сетку плоскостями $x_i = k_i h$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $t = k_0 \Delta t$ и будем считать, что $\frac{l_1}{h}$ и $\frac{\delta}{h} = r$ — целые числа. Рассмотрим функцию

$$\zeta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{n} \left(\sin^2 \dfrac{\pi x_i}{l_1} + \sin^2 \dfrac{\pi (x_i + h)}{l_1}\right), & \text{если } x \in D'', \\ 0, & \text{если } x \text{ вне } D''. \end{cases}$$

Для нее справедливо неравенство [см. ([3])]:

$$\left(\frac{\Delta\zeta}{\Delta x_k}\right)^2 \leqslant C\zeta, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{41}$$

и лишь для точек решетки с координатами $x_k = -h$, $0 \leqslant x_i \leqslant l_1$, $i \neq k$, это неравенство нужно заменить таким:

$$\left(\frac{\Delta\zeta}{\Delta x_k}\right)^2 \leqslant C\zeta^{+k}.$$

Введем обозначения:

$$u_{x_k} = u_k, \quad u_{\bar{x}_k} = u_{\bar{k}}.$$

Тогда, вычисляя разность по x_k от решения (40), получим:

$$(L_h u)_{x_k} = \sum_{i,j=1}^{n} (A_{ij}^{+k} u_{kx_j t\bar{t}} + A_{ijk} u_{x_j t\bar{t}} + B_{ij}^{+k} u_{kx_j \mathring{t}} +$$

$$+ B_{ijk} u_{x_j \mathring{t}} + C_{ij}^{+k} u_{kx_j} + C_{ijk} u_{x_j})_{\bar{x}_i} = f_k;$$

аналогично определяется $(L_h u)_{\bar{x}_k}$.

Теперь рассмотрим такое равенство при $k \neq n$, $t = p\Delta t$:

$$h^n \sum_{D''} \zeta [u_{kt\bar{t}} (L_h u)_k + u_{\bar{k}t\bar{t}} (L_h u)_{\bar{k}}] = h^n \sum_{D''} \zeta (f_k u_{kt\bar{t}} + f_{\bar{k}} u_{\bar{k}t\bar{t}}).$$

Преобразуем отдельные слагаемые в этом равенстве, учитывая, что на S_1, где $x_n = hr$, u_k, $u_{\bar{k}}$ и разностные отношения по t и $x_i (i \neq n)$ от этих величин равны нулю для $k \neq n$. Через $S_{D''}$ обозначим поверхность куба D'' без грани $x_n = \delta$, а через a_{ij} — величину

$$a_{ij} = A_{ij}^{+k} u_{kx_j t\bar{t}} + A_{ijk} u_{x_j t\bar{t}}.$$

Тогда

$$h^n \sum_{D''} [A_{ij}^{+k} u_{kx_j t\bar{t}} + A_{ijk} u_{x_j t\bar{t}}]_{\bar{x}_i} \zeta u_{kt\bar{t}} = -h^n \sum_{D''} a_{ij} (\zeta u_{kt\bar{t}})_{x_i} +$$

$$+ h^{n-1} \sum_{S_{D''}} a_{ij} \zeta u_{kt\bar{t}} = -h^n \sum_{D''} a_{ij} (\zeta u_{kx_i t\bar{t}} + \zeta_{x_i} u_{kt\bar{t}}^{+i}) +$$

$$+ h^{n-1} \sum_{S_{D''}} \zeta a_{ij} u_{kt\bar{t}} = -h^n \sum_{D''} \zeta A_{ij}^{+k} u_{kx_j t\bar{t}} u_{kx_i t\bar{t}} -$$

$$- h^n \sum_{D''} (a_{ij} \zeta_{x_i} u_{kt\bar{t}}^{+i} + A_{ijk} u_{x_j t\bar{t}} \zeta u_{kx_i t\bar{t}}) + h^{n-1} \sum_{S_{D''}} \zeta a_{ij} u_{kt\bar{t}}.$$

Аналогично,

$$h^n \sum_{D''} \zeta (B_{ij}^{+k} u_{kx_j \mathring{t}} + B_{ijk} u_{x_j \mathring{t}})_{\bar{x}_i} u_{kt\bar{t}} =$$

$$= -h^n \sum_{D''} (B_{ij}^{+k} u_{kx_j \mathring{t}} + B_{ijk} u_{x_j \mathring{t}}) (\zeta u_{kx_i t\bar{t}} + \zeta_{x_i} u_{kt\bar{t}}^{+i}) +$$

$$+ h^{n-1} \sum_{S_{D''}} (B_{ij}^{+k} u_{kx_j \mathring{t}} + B_{ijk} u_{x_j \mathring{t}}) \zeta u_{kt\bar{t}}.$$

Так же преобразуется сумма с C_{ij} и слагаемые с $u_{\bar{k}}$. Далее поступаем так же, как и при выводе неравенства (39), учитывая при этом неравенства (39), (41) и то, что суммы по поверхности $S_{D''}$ можно оценить, используя малость ζ в них, через суммы такого же

вида по области D'', например

$$\left| h^{n-1} \sum_{S D''} \zeta a_{ij} u_{k t\bar{t}} \right| \leqslant C_9 h^n \sum_{S_{D''}} \left(\sum_{i=1}^{n} \zeta_{x_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} | A_{ij}^{+k} u_{k\ i t\bar{t}} + A_i\ u_{x_j t\bar{t}} | \, u_{k t\bar{t}} | \leqslant$$

$$\leqslant C_{10} h^n \sum_{D''} \left[\varepsilon \left(\sum_{i=1}^{n} \zeta_{x_i}^2 \right) \sum_{j=1}^{n} (u_{k x_j t\bar{t}})^2 + \frac{1}{\varepsilon} (u_{k t\bar{t}})^2 \right] \leqslant$$

$$\leqslant C_{11} h^n \sum_{D''} \left[\varepsilon \cdot \zeta \sum_{j=1}^{n} (u_{k x_j t\bar{t}})^2 + \frac{1}{\varepsilon} (u_{k t\bar{t}})^2 \right].$$

В результате при достаточно малом Δt получим, что

$$\Delta t \sum_{\Delta t}^{p\Delta} h^n \sum_{D''} \zeta \sum_{i=1}^{n} [(u_{k x_i t\bar{t}})^2 + (u_{\bar{k} x_i t\bar{t}})^2] \leqslant$$

$$\leqslant C_{12} e^{C_{13} p \Delta t} \Big\{ h^n \sum_{D''} \zeta \sum_{i=1}^{n} (\varphi_{k x_i}^2 + \varphi_{\bar{k} x_i}^2 + \psi_{k x_i}^2 + \psi_{\bar{k} x_i}^2 + \varphi_{x_i}^2 + \psi_{x_i}^2) +$$

$$+ \Delta t \sum_{\Delta t}^{p\Delta t} h^n \sum_{D''} \zeta \Big[\sum_{i=1}^{n} (F_{ik}^2 + F_{i\bar{k}}^2 + F_i^2) \Big] \Big\}. \tag{42}$$

Нам осталось оценить в D' $u_{x_n x_n}$, что можно сделать при помощи равенства $L_h u = f$, верного в D'. А так как в D' $\zeta \geqslant \alpha_1 > 0$, то получаем:

$$\Delta t \sum_{\Delta t}^{p\Delta t} h^n \sum_{D'} \sum_{ij=1}^{n} (u_{x_i x_j t\bar{t}})^2 < C_{14}. \tag{43}$$

Методом, аналогичным изложенному и подробно разработанным в работе ([3]), доказывается ограниченность сумм вида:

$$\Delta t \sum_{\Delta t}^{p\Delta t} h^n \sum_{D'} \left\{ u_{t\bar{t}}^2 + \sum_{s=1}^{m} \sum_{\alpha_0 \ldots \alpha_s = 0}^{n} \left(\frac{\Delta^s u_{t\bar{t}}}{\Delta t^{\alpha_0} \Delta x_{\alpha_1} \ldots \Delta x_{\alpha_s}} \right)^2 \right\}, \quad m = 1, 2, \ldots, k-1.$$

При h, $\Delta t \to 0$ $u_{h t\bar{t} x_i} \to \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x}$ слабо в $W_2^{(k-1)}(D' \times [0, l])$ и для решения u получаем такую теорему:

ТЕОРЕМА 6. *Пусть коэффициенты уравнения* (32) *имеют непрерывные производные до порядка* $k-1$, в $\bar{Q}$, $\bar{F} \in W_2^{(k-1)}(Q)$, $\left.\frac{\partial^i F}{\partial t^i}\right|_{t=0} = 0$, $i = 0, 1, \ldots, k-2$, φ, $\psi \in W_2^{(k)}(\Omega)$, *граница* S *области* Ω *непрерывно дифференцируема* k *раз и* $u|_S = 0$. *Тогда обобщенное решение и смешанной задачи для уравнения* (32) *существует, производные*

$$\frac{\partial^s}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_{\alpha_1} \ldots \partial x_{\alpha_s}} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x_i} \right), \quad s = 1, 2, \ldots, k-1, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

принадлежат $L_2(Q)$ *и для них справедливы неравенства:*

$$\left\| \frac{\partial^s}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_{\alpha_1} \ldots \partial x_{\alpha_s}} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x_i} \right) \right\|_{L_2(Q)}^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_{16} \left(\| \bar{F} \|_{W_2^{(k-1)}(Q)}^2 + \| \varphi \|_{W_2^{(k)}(\Omega)}^2 + \| \psi \|_{W_2^{(k)}(\Omega)}^2 \right). \tag{44}$$

Учитывая неравенство (44), мы получаем оценки норм $\left\| \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} \right\|$, $\|\mathrm{grad}\, p\|$ в смешанной задаче для системы (1) с условием (3).

Заметим, наконец, что все проведенные доказательства нуждаются лишь в незначительных добавлениях для того, чтобы они стали справедливыми и для уравнений более общего вида:

$$\sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial^3 u}{\partial x_j \partial t^2} + B_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial t} + C_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(b_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} + c_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + a_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b_0 \frac{\partial u}{\partial t} + c_0 u = \mathrm{div}\, \bar{F}. \qquad (45)$$

Предполагается, что для уравнения (45) выполнено условие (33) и $a_0 > 0$. Относительно разностной схемы, использованной для приближенного решения системы (1), отметим, что она может быть применена к уравнениям Максвелла и уравнениям гидродинамики.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю С. Л. Соболеву за постоянное внимание и ценные замечания к работе.

Поступило
7. I. 1957

ЛИТЕРАТУРА

[1] Вишик М. И., Смешанная краевая задача для дифференциальных уравнений, содержащих вторую производную по времени, и приближенный метод их решения, Доклады Ак. наук СССР, 100, № 3 (1955), 409—412.

[2] Вишик М. И., Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения, Матем. сборн., 39 (81) : 1 (1956), 51—148.

Ладыженская О. А., Смешанная задача для гиперболического уравнения, М—Л., 1953.

[4] Лебедев В. И. Метод ортогональных проекций для конечно-разностного аналога одной системы уравнений, Доклады Ак. наук СССР, 113, № 6 (1957), 1206—1209.

[5] Лебедев В. И., Метод сеток для уравнений типа Соболева, Доклады Ак. наук СССР, 114, № 6 (1956), 1166—1169.

[6] Соболев С. Л., Об одной новой задаче математической физики, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 18 (1954), 3—50.

[7] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. ЛГУ, 1950.

[8] Соболев С. Л., Уравнения математической физики, М—Л., 1950.

[9] Ладыженская О. А., О решении нестационарных операторных уравнений, Математ. сборн., 39 (81) : 4 (1956), 491—524.

[10] Лебедев В. И., О системе уравнений типа С. Л. Соболева, Успехи матем. наук, т. XIII, 1 (79) (1958), 215—216.

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

В моей работе «Асимптотические разложения для критериев согласия А. Н. Колмогорова и Н. В. Смирнова» (Известия Ак. наук СССР, серия матем., 19 (1955), 103 — 124) допущены существенные ошибки в определении граничных условий для членов разложений, определяемых уравнениями (17) (стр. 110). Поэтому результаты работы требуют дальнейших уточнений.

Приведенные в работе доказательства оставляют верными утверждения: теоремы 1 при $m = kn$ (k — целое число), теорем 2 и 3 при $m = n$ (симметричный случай). Теорема 4 неверна.

Асимптотические разложения статистики А. Н. Колмогорова получил Чжан Лицянь (Acta Math. Sinica, 6, № 2 (1956), 55 81) из точных формул для распределения статистики. Именно эта работа и обратила мое внимание на ошибочность рассуждений, приведенных в моей работе.

Так как моя заметка «Асимптотические разложения максимальных уклонений в схеме Бернулли» (Доклады Ак. наук СССР, 108, № 2 (1956), 183 — 186) использует результаты рассматриваемой работы, то приведенные здесь замечания относятся также и к ней.

В. С. Королюк

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

В моей работе «Асимптотическое распределение целых точек на некоторых эллипсоидах» (Известия Ак. наук СССР, серия матем., 21 (1957), 457 — 500) замечание 17 (на стр. 477) формулировано неточно. Его следует формулировать так:

Пусть

$$\varphi(x, y) = \delta(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2)$$

— положительная целочисленная бинарная крадратичная форма определителя d и делителя $\delta\omega$, где $\omega =$ о. н. д. (α, β, γ). Тогда количество представлений $\varphi(x, y)$ суммой трех целочисленных квадратов,

$$\varphi(x, y) = \sum_{j-1}^{3} (a_j x + b_j y)^2,$$

при условии, что $\delta \setminus$ о. н. д. $(a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1)$, будет

$$< \varkappa_8^{(\varepsilon)} d^\varepsilon \sqrt{\omega} \sqrt{\text{о. н. д.}\left(\frac{d}{\delta^2}, \delta\right)}, \qquad (29$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число, а $\varkappa_8^{(\varepsilon)} > 0$ — постоянная, зависящая только от ε

Именно это неравенство доказывают приведенные там рассуждения.

Дальнейшие оценки остаются верными, ибо (см. стр. 480 — 481) из

$$H_1 H_2 \equiv 0 \pmod{r^s}$$

следует, что $r^s \setminus$ о. н. д. $(g_2' g_3'' - g_3' g_2'',\ g_3' g_1'' - g_1' g_3'',\ g_1' g_2'' - g_2' g_1'')$, и неравенство (40) сохраняет свою силу.

А. В. Малышев

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 737—756

Ю. И. МАНИН

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ НАД ПОЛЯМИ С ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕМ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе строится дифференциально-алгебраический гомоморфизм группы классов дивизоров нулевой степени кривой, определенной над полем констант с дифференцированием, в аддитивную группу векторного пространства конечной размерности над полем констант; частично исследуется ядро этого гомоморфизма.

Введение. Теория алгебраических кривых сейчас гораздо более разработана, чем теория многообразий высших размерностей. Один из методов изучения этих последних, нашедший много полезных применений, как раз и заключается в изучении общих кривых линейных пучков на таких многообразиях. Эти кривые определены над некоторыми функциональными полями, и естественно ожидать, что свойства их должны существенно зависеть от свойств поля определения. Однако, как заметил А. Вейль, большая общность методов современной теории алгебраических кривых, позволяющая получать результаты этой теории единообразно над произвольными полями констант, здесь, именно в силу этого свойства, становится в какой-то степени бесполезной; в функциональном основном поле параметры остаются замороженными, если не изучать специализации общей кривой. В самом деле, изучение специализаций дает очень много, но мы имеем еще одну возможность воспользоваться параметрами функционального основного поля, притом оставаясь в рамках теории общей кривой. Эта возможность — дифференцирование по параметру. Поясним, что мы имеем в виду, на примере пучка C_u кривых над комплексным полем $F(X, Y; u) = 0$, где u — параметр пучка. Пусть род общей кривой равен g. Выберем на ней g линейно независимых дифференциалов первого рода $\omega_1, \ldots, \omega_g$ и зафиксируем на римановой поверхности C_u базис одномерных гомологий $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$. Этот выбор определит совокупность периодов

$$\Omega_\alpha^\beta = \int\limits_{\gamma_\beta} \omega_\alpha.$$

Любой период есть однозначная аналитическая функция от u в произвольной односвязной области u-плоскости, не содержащей критических точек, т. е. точек u^0 таких, что специализация $u \to u^0$ понижает род кривой C_u, в окрестности же критической точки часть периодов приобретает многозначность (подробности см. в книге [3], гл. VI—VII). Для нас сейчас важно заметить, что $2g$ периодов данного дифференциала ω_α

удовлетворяют линейному дифференциальному однородному уравнению с коэффициентами, рационально зависящими от u:

$$p_{2g}^{\alpha}(u)\,\frac{d^{2g}}{du^{2g}}\,\Omega_{\alpha}^{\beta}+\ldots+p_1^{\alpha}\,\frac{d}{du}\,\Omega_{\alpha}^{\beta}+p_0^{\alpha}(u)\,\Omega_{\alpha}^{\beta}=0,\quad 1\leqslant\beta\leqslant 2g. \qquad (A)$$

Этот факт заметил и подробно изучил Фукс [1]. Алгебраический смысл соотношения (A) заключается в том, что естественным образом определяя в поле функций на C_u дифференцирование D по параметру u и распространяя его на дифференциалы ω, мы получим, что существует такая функция y_{α} на C_u, что

$$p_{2g}^{\alpha}\,D^{2g}\omega_{\alpha}+\cdots+p_0^{\alpha}\,\omega_{\alpha}=dy_{\alpha},$$

ибо только у полного дифференциала периоды по всем одномерным циклам обращаются в нуль. Последнее же линейное соотношение обусловлено двумя обстоятельствами: во-первых, тем, что производная по параметру от дифференциала, не имеющего ненулевых вычетов, сама не имеет ненулевых вычетов, а во-вторых, тем, что фактор-пространство пространства таких дифференциалов по пространству полных дифференциалов над основным полем имеет конечную размерность $2g$. Отсюда и следует, что любой дифференциал первого рода и его $2g$ производных по параметру, подходящим образом линейно скомбинированные, дадут полный дифференциал.

Рассмотрим интегралы $\int^{\mathfrak{a}}\omega_{\alpha}$, где $\mathfrak{a}$ — какой-нибудь рациональный дивизор нулевой степени на кривой C_u. Эти интегралы, понимаемые как

$$\sum\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})\int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}}\omega_{\alpha}$$

(сумма, очевидно, не зависит от выбора точки $\mathfrak{p}_0$), являются так называемыми нормальными функциями Пуанкаре и определены с точностью до целого кратного периодов. Так как периоды обращаются в нуль линейным дифференциальным оператором (A), то естественно применить этот оператор к интегралу $\int^{\mathfrak{a}}\omega_{\alpha}$. Мы получим однозначную функцию от u:

$$Z_{\alpha}=(p_{2g}^{\alpha}D^{2g}+\cdots+p_0^{\alpha})\int^{\mathfrak{a}}\omega_{\alpha},$$

определяемую дивизором $\mathfrak{a}$ или, точнее, в силу теоремы Абеля, классом дивизоров, к которому принадлежит $\mathfrak{a}$. Естественно ожидать, что эта функция будет рационально зависеть от u; прямой подсчет показывает, что так оно и есть; в окончательном выражении Z_{α} знак интеграла стоит над полным дифференциалом

$$(p_{2g}^{\alpha}D^{2g}+\cdots+p_0^{\alpha})\,\omega_{\alpha}$$

и имеются еще некоторые члены, возникающие из-за необходимости учитывать зависимость от u пределов интегрирования. Во всяком случае, Z_{α} зависит алгебраически-дифференциально от значений в точках $\mathfrak{a}$ некоторых функций на кривой C_u. Абелевы интегралы

$$\int^{\mathfrak{a}}\omega_{\alpha}$$

играют важнейшую роль в трансцендентной теории кривых, в частности, с их помощью строится якобиево многообразие кривой: многообразие классов дивизоров нулевой степени. Соответственно, функции Z_α определяют гомоморфизмы группы классов дивизоров нулевой степени в аддитивную группу поля функций от u. Уже само по себе существование таких алгебраически-дифференциальных гомоморфизмов представляет интерес, ибо чисто алгебраически их существование невозможно. Весьма интересно и то, что, как доказано в п. 10, пересечение ядер всех таких гомоморфизмов фактически совпадает с хорошо известным многообразием Пикара для C_u.

Основная цель этой работы — построить для случая основного поля нулевой характеристики дифференциально-алгебраический гомоморфизм, частный случай которого описан выше. Гомоморфизм строится алгебраически и так же доказываются все его элементарные свойства, подсказанные аналогией с классическим случаем. Исследование ядра гомоморфизма, однако, не совсем тривиально уже для простейшего случая пучка C_u над комплексным полем. Мы излагаем это исследование, вскрывающее характерные связи изучаемого вопроса в общей постановке с другими вопросами алгебраической геометрии. В частности, идя этим путем, следует ожидать, что для определения ядра в случае кривой над алгебраическим функциональным полем от многих переменных окажется полезной абстрактная теория групп монодромий [см. ([5])] и дифференциальных полей.

В качестве приложения общей теории мы даем критерий линейной зависимости точек на эллиптической кривой над полем рациональных функций. Этот критерий может оказаться полезным в связи с работами Нерона о ранге алгебраических кривых.

Нам представляется, однако, что наиболее интересно было бы найти аналог рассмотренных здесь объектов, когда поле констант имеет конечную характеристику или является полем алгебраических чисел. Хотя в последнем нетривиальных дифференцирований не существует, а в аддитивной группе полей ненулевой характеристики все элементы имеют конечный порядок, так что неразумно было бы ожидать существования какого-то интересного гомоморфизма, в точности подобного построенному здесь, тем не менее изученные здесь явления кажутся достаточно «алгебраичными», чтобы ожидать их более широкой распространенности. Прежде всего, конечно, нужно найти подходящий аналог дифференцирования.

1. Основные обозначения и понятия. Во всем дальнейшем изложении мы будем пользоваться следующими обозначениями:

K — основное поле характеристики нуль, над которым, как над полем констант, определено поле алгебраических функций одной переменной R. Поле K обладает (по крайней мере одним) нетривиальным дифференцированием D, т. е. отображением K в себя со следующими свойствами:

$$\left.\begin{aligned} &D(a+b) = Da + Db, \\ &D(ab) = aDb + Da\cdot b, \\ &Da \not\equiv 0 \quad (a, b \in K). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Дифференцирования поля K, очевидно, образуют над ним линейное пространство.

Нам придется продолжать дифференцирование поля K до дифференцирования его расширений, а также некоторых векторных пространств, определенных над K и R. Не оговаривая этого в дальнейшем, мы будем обозначать продолженное дифференцирование той же буквой, что и продолжаемое дифференцирование, если продолжение строится однозначно.

Дифференцирование D поля K однозначно продолжается до дифференцирования алгебраического расширения K [см. (2), стр. 112, лемма 2].

Дифференцирование D поля K однозначно продолжается до дифференцирования D_v поля R, определенного условием $D_v v = 0$, где v — произвольный элемент R, трансцендентный над K [см. (2), стр. 116, лемма 7].

Дифференцирование D_v поля R однозначно продолжается до дифференцирования $\mathfrak{p}$-адического замыкания R, где $\mathfrak{p}$ — простой дивизор, если требовать непрерывности продолжения по $\mathfrak{p}$-адической метрике [см. (2), стр. 115].

Дифференцирование D_v поля R однозначно продолжается до дифференцирования векторного пространства дифференциалов ω поля R при помощи равенства:

$$D_v \omega = D_v\left(\frac{\omega}{dv}\right)\cdot dv$$

(во избежание путаницы и усложнения обозначений символами d и $\frac{d}{dv}$ мы обозначаем взятие дифференциала и производной по v в поле R, определенное обычным образом. О связи этих двух типов дифференцирований см. подробно в книге (2), гл. VI). Дифференцирование векторного пространства определяется как отображение его в себя, удовлетворяющее соотношениям (1), где сложение следует понимать как сложение векторов, а умножение — как умножение вектора на элемент поля определения.

Род поля R обозначается через g; $\omega_1, \ldots, \omega_g$ — базис дифференциалов первого рода, $\mathfrak{W}$ — линейное пространство дифференциалов R, не имеющих отличных от нуля вычетов, $\mathfrak{V}$ — линейное пространство полных дифференциалов R. Пространства $\mathfrak{W}$ и $\mathfrak{V}$ строятся над полем констант R.

Обозначим $\overline{\mathfrak{W}} = \mathfrak{W}/\mathfrak{V}$ и для любого дифференциала ω через $\overline{\omega}$ будем обозначать класс ω в фактор-пространстве $\overline{\mathfrak{W}}$.

$\mathfrak{p}$ — простые дивизоры (точки), $\mathfrak{a}$ — составные дивизоры поля R; предполагается, что $\mathfrak{p}$ имеет над K первую степень,

$\nu_{\mathfrak{p}}$ — показатель функции или дивизора, соответствующий $\mathfrak{p}$,

$\overline{\mathfrak{a}}$ — класс дивизоров, к которому принадлежит $\mathfrak{a}$,

$v_{\mathfrak{p}}$ — значение элемента $v \in R$ в точке $\mathfrak{p}$.

2. Основные леммы.

ЛЕММА 1. *Пусть v, w — любые элементы R, трансцендентные над K, u — произвольный элемент R. Тогда для любого дифференцирования D поля K и его продолжений D_v, D_w имеем:*

$$(D_v - D_w)(u\,dv) = -d\,(uD_wv).$$

Доказательство. Оператор

$$D_v - D_w + (D_w v)\frac{d}{dv}$$

есть дифференцирование R, обращающееся в нуль на $K(v)$ и, следовательно, на всем R. В частности,

$$(D_v - D_w)\,u = -D_w v \cdot \frac{du}{dv}.$$

Далее,

$$(D_v - D_w)(udv) = (D_v - D_w)\,u \cdot dv + u\,(D_v - D_w)\,dv.$$

Но

$$D_v\,dv = D_v\left(\frac{dv}{dv}\right)dv = 0,$$

$$D_w\,dv = D_w\left(\frac{dv}{dw}\right)dw = \frac{d}{dw}(D_w v)\,dw = d\,(D_w v),$$

ибо

$$\frac{d}{dw}D_w = D_w\frac{d}{dw}$$

[см. (2), стр. 125, лемма 1]. Следовательно,

$$(D_v - D_w)(udv) = -\left(D_w v \cdot \frac{du}{dv}\,dv + ud\,(D_w v)\right) = -d\,(uD_w v).$$

Примечание. Эта лемма принадлежит Шевалле [см. (2), стр. 125—126, лемма 3]. Мы привели ее доказательство ввиду его простоты и важности леммы в последующих рассмотрениях. Смысл леммы заключается в том, что, как из нее следует, все дифференцирования D_v, где v — произвольный трансцендентный элемент R, пространства $\mathfrak{W}$ совпадают друг с другом на фактор-пространстве $\overline{\mathfrak{W}}$, чем однозначно и определяется продолжение D на $\overline{\mathfrak{W}}$. Кроме того, в вычислениях эта лемма играет роль, подобную роли формулы дифференцирования интеграла по параметру в классическом случае.

ЛЕММА 2. *Пусть v, w — любые элементы R, трансцендентные над K, $\mathfrak{p}$ — простой дивизор R, а D — дифференцирование такие, что выполняются условия: $\nu_\mathfrak{p}(v) \geqslant 0$ и либо $\nu_\mathfrak{p}(w) < 0$, либо $D(w_\mathfrak{p}) = 0$. Тогда*

$$D(v_\mathfrak{p}) = (D_w v)_\mathfrak{p}.$$

Доказательство. Пусть t — униформизирующая переменная в точке $\mathfrak{p}$,

$$v = v_\mathfrak{p} + \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_\alpha t^\alpha, \quad w = \sum_{\alpha=\alpha_0}^{\infty} b_\alpha t^\alpha.$$

Имеем:

$$D_w w = 0,$$

откуда следует:

$$D_w t = -\frac{\sum\limits_{\alpha=\alpha_0}^{\infty} Db_\alpha \cdot t^\alpha}{\dfrac{dw}{dt}},$$

и ясно, что в предположениях леммы $\nu_\mathfrak{p}(D_w t) \geqslant 1$. Но

$$D_w v = D(v_\mathfrak{p}) + \sum_{\alpha=1}^{\infty} Da_\alpha t^\alpha + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \alpha a_\alpha t^{\alpha-1} D_w t,$$

так что действительно

$$(D_w v)_\mathfrak{p} = D(v_\mathfrak{p}),$$

ибо

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{\infty} Da_\alpha \cdot t^\alpha + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \alpha a_\alpha t^{\alpha-1} D_w t\right)_\mathfrak{p} = 0.$$

Доказанная лемма устанавливает связь между двумя основными инструментами исследования — дифференцированием и специализацией — и вместе с предыдущей леммой составляет основу последующих рассмотрений.

3. Линейно дифференциальные соотношения в пространстве $\overline{\mathfrak{W}}$. Пусть $D_1, \ldots, D_n$ — n линейно независимых дифференцирований поля констант K, которые мы не будем предполагать перестановочными. Обозначим через $\mathcal{D}_\lambda^\mu$, $1 \leqslant \lambda \leqslant \varkappa(\mu)$, пронумерованные в произвольном, но раз навсегда фиксированном порядке, дифференциальные одночлены порядка μ, т. е. операторы вида

$$D_{\lambda_1}^{\mu_1} D_{\lambda_2}^{\mu_2} \ldots D_{\lambda_m}^{\mu_m},$$

где

$$1 \leqslant \lambda_i \leqslant n, \quad \mu_1 + \ldots + \mu_m = \mu.$$

Пусть задана система линейных дифференциальных операторов

$$L_\alpha = \sum_\mu \sum_{\lambda=1}^{\varkappa(\mu)} p_{\lambda\mu}^\alpha \mathcal{D}_\lambda^\mu, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant g, \quad p_{\lambda\mu}^\alpha \in K,$$

которую, как было замечено, можно считать действующей в векторном пространстве $\overline{\mathfrak{W}}$ и которая в этом пространстве удовлетворяет соотношению

$$\sum_{\alpha=1}^{g} L_\alpha \overline{\omega}_\alpha = 0. \qquad (2)$$

Такие соотношения всегда существуют, ибо для любого L_α $L_\alpha \overline{\omega}_\alpha \in \overline{\mathfrak{W}}$, что следует из теоремы 13 книги (²) (стр. 126), и, кроме того, размерность $\overline{\mathfrak{W}}$ конечна и равна $2g$ [см. (²), стр. 112, лемма 2]. Более того, над кольцом дифференциальных многочленов соотношения (2) образуют левый модуль, имеющий конечный базис. Иными словами, существует конечная совокупность дифференциальных многочленов $(L_{\alpha\beta})$, $1 \leqslant \alpha \leqslant g$, $1 \leqslant \beta \leqslant N$, таких, что, во-первых,

$$\sum_{\alpha=1}^{g} L_{\alpha\beta} \overline{\omega}_\alpha = 0, \quad 1 \leqslant \beta \leqslant N, \qquad (3)$$

и, во-вторых, для любых L_α, удовлетворяющих (2), существуют дифференциальные многочлены L'_β такие, что

$$L_\alpha = \sum_{\beta=1}^{N} L'_\beta L_{\alpha\beta}, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant g.$$

Совокупность $(L_{\alpha\beta})$ порождает систему соотношений (3), которую мы назовем базисной системой линейно дифференциальных соотношений пространства $\overline{\mathfrak{W}}$ или просто базисной системой. Укажем эффективный способ нахождения базисной системы, который понадобится нам в дальнейшем.

Выпишем последовательность

$$\begin{gathered}\bar\omega_1, \ \ldots, \ \bar\omega_g; \ \mathscr{D}_1^1\bar\omega_1, \ \ldots, \ \mathscr{D}_n^1\bar\omega_1, \ \ldots, \ \mathscr{D}_1^1\bar\omega_g, \ \ldots, \ \mathscr{D}_n^1\bar\omega_g; \ \ldots \\ \ldots \mathscr{D}_1^\mu\omega_1, \ \ldots, \ \mathscr{D}_{\varkappa(\mu)}^\mu\bar\omega_1, \ \ldots, \ \mathscr{D}_1^\mu\omega_g, \ \ldots, \ \mathscr{D}_{\varkappa(\mu)}^\mu\bar\omega_g, \ \ldots\end{gathered} \tag{4}$$

Назовем μ-м периодом последовательности отрезок $\mathscr{D}_1^\mu\bar\omega_1, \ldots, \mathscr{D}_{\varkappa(\mu)}^\mu\bar\omega_g$. На первом шаге испытаем $\mathscr{D}_1^1\bar\omega_1$ на линейную зависимость с $\bar\omega_1, \ldots, \bar\omega_g$ (на самом деле, конечно, следует испытывать просто дифференциалы $\mathscr{D}_{\lambda v}^\mu\omega$, отбрасывая полные дифференциалы. Здесь $v \in R$ — произвольный элемент, а $\mathscr{D}_{\lambda v}^\mu$ получается из $D_{1v}, \ldots, D_{nv}$ так же, как $\mathscr{D}_\lambda^\mu$ из $D_1, \ldots, D_n$). Если такая линейная зависимость существует, запишем ее и вычеркнем $\mathscr{D}_1^1\bar\omega$ из последовательности (4). В противном случае оставляем $\mathscr{D}_1^1\bar\omega_1$ и переходим к следующему дифференциалу. На очередном шаге испытаем очередной член последовательности на его линейную зависимость с теми невычеркнутыми членами, которые стоят слева от него; если такая линейная зависимость существует, выписываем ее и вычеркиваем испытуемый член, если нет — переходим к следующему члену. Шагов без вычеркивания может быть не более g, так как размерность $\overline{\mathfrak{W}}$ есть $2g$. Следовательно, рано или поздно мы вычеркнем целиком какой-нибудь период. После этого процесс заканчивается, ибо, как легко видеть, выписанная система соотношений будет базисной. Заметим, что в определении мы не требовали линейной независимости базисных соотношений, и на самом деле, если действовать в точности так, как описано, среди выписанных соотношений, вообще говоря, будут лишние. Однако в действительности легко уточнить предписания так, чтобы результатом процесса оказалась линейно независимая базисная система (имеется в виду линейная зависимость над кольцом дифференциальных многочленов). Мы проделаем это для частного случая в п. 9.

Заметим еще, что интересно было бы выяснить смысл количества невычеркнутых элементов последовательности (4), которое не зависит от выбора базиса дифференциалов первого рода и является инвариантом поля и совокупности дифференцирований $D_1, \ldots, D_n$. Например, легко видеть, что если в поле R есть пара образующих, связанных соотношением над полем $k \in K$, в котором все дифференцирования $D_1, \ldots, D_n$ обращаются в нуль, то в последовательности (4) невычеркнутыми останутся лишь первые g членов.

4. **Функция $Z^v(\mathfrak{a})$. Построение.** В ближайших трех пунктах мы будем рассматривать фиксированную систему линейных дифферен-

циальных операторов

$$L_\alpha = \sum_\mu \sum_{\lambda=1}^{\varkappa(\mu)} p^\alpha_{\lambda\mu} \mathscr{D}^\mu_\lambda, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant p, \quad p^\alpha_{\lambda\mu} \in K,$$

удовлетворяющую соотношению (2).

Соотношение (2) означает, что для любого элемента $v \in R$, трансцендентного над K, существует такой элемент $y^v \in R$, что

$$\sum_{\alpha=1}^{g} L_{\alpha v} \omega_\alpha = dy^v,$$

где

$$L_{\alpha v} = \sum_\mu \sum_{\lambda=1}^{\varkappa(\mu)} p^\alpha_{\lambda\mu} \mathscr{D}^\mu_{\lambda v}.$$

Введем на множестве простых дивизоров $\mathfrak{p}$ поля R функцию $Z^v(\mathfrak{p})$ со значениями в $K(\mathfrak{p})$:

$$Z^v(\mathfrak{p}) = y^v_\mathfrak{p} + \sum_{\alpha=1}^{g} \sum_\mu \sum_{\lambda=1}^{\varkappa(\mu)} p^\alpha_{\lambda\mu} V^{\mu\alpha}_{\lambda v}(\mathfrak{p}), \tag{5}$$

где $V^{\mu\alpha}_{\lambda v}(\mathfrak{p})$ определяются индуктивно:

$$V^{1\alpha}_{\lambda v}(\mathfrak{p}) = (u_\alpha)_\mathfrak{p} D_\lambda(v_\mathfrak{p}), \quad u_\alpha = \frac{\omega_\alpha}{dv}, \tag{6}$$

и если $\mathscr{D}^{\mu+1}_\pi = D_\rho \mathscr{D}^\mu_\sigma$, а функция $V^{\mu\alpha}_{\sigma v}(\mathfrak{p})$ уже определена, то

$$V^{\mu+1,\alpha}_{\pi v}(\mathfrak{p}) = D_\rho V^{\mu\alpha}_{\sigma v}(\mathfrak{p}) + (\mathscr{D}^\mu_{\sigma v} u_\alpha)_\mathfrak{p} D_\rho(v_\mathfrak{p}). \tag{6a}$$

В такой записи функция $Z^v(\mathfrak{p})$ остается неопределенной в конечном множестве полюсов элементов R, входящих в формулах (6) и (6а) под знак $(\ )_\mathfrak{p}$. Обозначим это множество через $\mathfrak{N}_v$, а через $\widetilde{\mathfrak{N}}_v$ — множество всех тех дивизоров нулевой степени $\mathfrak{a}$ поля R, для которых $\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) = 0$, если $\mathfrak{p} \in \mathfrak{N}_v$. На $\widetilde{\mathfrak{N}}_v$ определим по аддитивности функцию $Z^v(\mathfrak{a})$:

$$Z^v(\mathfrak{a}) = \sum \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) Z^v(\mathfrak{p}). \tag{7}$$

Заметим, что элемент y^v определен с точностью до аддитивной произвольной постоянной; то же, следовательно, справедливо и относительно $Z^v_\mathfrak{p}$; но мы будем рассматривать функцию Z^v на дивизорах ненулевой степени лишь в качестве подсобного средства для получения данных о Z^v на дивизорах нулевой степени, где значение Z^v не зависит от выбора постоянной. Поэтому в дальнейшем, не оговаривая этого специально, мы будем в выборе y^v исходить из соображений удобства.

5. **Функция $Z^v(\mathfrak{a})$ на главных дивизорах.** Мы докажем сейчас, что для любого главного дивизора $\mathfrak{a} \in \widetilde{\mathfrak{N}}_v$

$$Z^v(\mathfrak{a}) = 0.$$

ЛЕММА 3. *Пусть для элемента $w \in R$, трансцендентного над K, элемент y^w определяется так же, как y^v для v. Тогда*

$$\sum \nu_{\mathfrak{p}}(w)\, y^w_{\mathfrak{p}} = 0.$$

Доказательство. Обозначим через S_w оператор взятия следа элементов поля R над подполем $K(w)$. Для всех $1 \leqslant \lambda \leqslant n$ имеем:

$$D_{\lambda w} S_w = S_w D_{\lambda w}, \quad \frac{d}{dw} S_w = S_w \frac{d}{dw}$$

[см. (²), стр. 113, лемма 3 и стр. 125, лемма 1]. Поэтому

$$S_w\left(\frac{d}{dw}\, y^w\right) = \frac{d}{dw} S_w(y^w) = S_w\left(\sum_{\alpha=1}^{g} L_{\alpha w} \frac{\omega_\alpha}{dw}\right) = \sum_{\alpha=1}^{g} L_{\alpha w} S_w\left(\frac{\omega_\alpha}{dw}\right) = 0,$$

ибо все дифференциалы ω_α — первого рода. Отсюда следует, что $S_w y^w \in K$. Но

$$\sum \nu_{\mathfrak{p}}(w)\, y^w_{\mathfrak{p}} = S_w y^w\big|_{w=\infty} - S_w y^w\big|_{w=0} = 0.$$

Лемма доказана.

Пусть теперь $\mathfrak{a} \in \widetilde{\mathfrak{R}}_v$, $\mathfrak{a} = \{w\}$, где $\{w\}$ обозначает дивизор элемента $w \in R$. Подсчитаем $y^v - y^w$. Имеем:

$$d(y^v - y^w) = \sum_{\alpha=1}^{g} (L_{\alpha v} - L_{\alpha w})\,\omega_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{g} \sum_{\mu} \sum_{\lambda=1}^{\varkappa(\mu)} p^{\alpha}_{\lambda\mu} (\mathscr{D}^{\mu}_{\lambda v} - \mathscr{D}^{\mu}_{\lambda w})\,\omega_\alpha. \tag{8}$$

Пусть

$$(\mathscr{D}^{\mu}_{\sigma v} - \mathscr{D}^{\mu}_{\sigma w})\,\omega_\alpha = dt^{\mu\alpha}_{\sigma v w}, \quad t^{\mu\alpha}_{\sigma v w} \in R. \tag{9}$$

В силу леммы 1,

$$t^{1\alpha}_{\lambda v w} = -u_\alpha D_{\lambda w} v. \tag{10}$$

Пусть $\mathscr{D}^{\mu+1}_{\pi} = D_\rho \mathscr{D}^{\mu}_{\sigma}$. Установим связь между $t^{\mu+1,\alpha}_{\pi v w}$ и $t^{\mu\alpha}_{\sigma v w}$. Пользуясь формулой (9) и леммой 1, получаем:

$$\mathscr{D}^{\mu+1}_{\pi v}\omega_\alpha = (D_{\rho v} - D_{\rho w})(\mathscr{D}^{\mu}_{\sigma v} u_\alpha \cdot dv) + D_{\rho w}\mathscr{D}^{\mu}_{\sigma v}\,\omega_\alpha =$$

$$= -d(\mathscr{D}^{\mu}_{\sigma v} u_\alpha \cdot D_{\rho w} v) + \mathscr{D}^{\mu+1}_{\pi w}\,\omega_\alpha + d(D_{\rho w} t^{\mu\alpha}_{\sigma v w}),$$

откуда

$$t^{\mu+1,\alpha}_{\pi v w} = D_{\rho w} t^{\mu\alpha}_{\sigma v w} - \mathscr{D}^{\mu}_{\sigma v} u_\alpha \cdot D_{\rho w} v. \tag{11}$$

Формулы (5), (8) и (9) дают:

$$Z^v(\mathfrak{p}) - y^w_{\mathfrak{p}} = \sum_{\alpha=1}^{g} \sum_{\mu} \sum_{\lambda=1}^{\varkappa(\mu)} p^{\alpha}_{\lambda\mu} (V^{\mu\alpha}_{\lambda v}(\mathfrak{p}) + (t^{\mu\alpha}_{\lambda v w})_{\mathfrak{p}}). \tag{12}$$

Докажем, что если $\nu_{\mathfrak{p}}(w) \neq 0$, то $V^{\mu\alpha}_{\lambda v}(\mathfrak{p}) + (t^{\mu\alpha}_{\lambda v w})_{\mathfrak{p}} = 0$. Проведем индукцию по μ. Так как $\{w\} \in \widetilde{\mathfrak{R}}_v$ и $\nu_{\mathfrak{p}}(w) \neq 0$, то, пользуясь леммой 2 и формулами (6), (10), имеем для $\mu = 1$:

$$V^{1\alpha}_{\lambda v}(\mathfrak{p}) = (u_\alpha)_{\mathfrak{p}} D_\lambda(v_{\mathfrak{p}}) = (u_\alpha D_{\lambda w} v)_{\mathfrak{p}} = -(t^{1\alpha}_{\lambda v w})_{\mathfrak{p}}.$$

Пусть снова $\mathscr{L}_{\pi}^{\mu+1} = D_{\rho}\mathscr{L}_{\sigma}^{\mu}$ и пусть утверждение уже доказано для μ, т. е., в частности,

$$V_{\sigma v}^{\mu\alpha}(\mathfrak{p}) + (t_{\sigma v w}^{\mu\alpha})_{\mathfrak{p}} = 0. \tag{13}$$

Тогда формулы (6а) и (11) дают:

$$V_{\pi v}^{\mu+1,\alpha}(\mathfrak{p}) + (t_{\pi v w}^{\mu+1,\alpha})_{\mathfrak{p}} =$$
$$D_{\rho}V_{\sigma v}^{\mu\alpha}(\mathfrak{p}) + (\mathscr{L}_{\sigma v}^{\mu}u_{\alpha})_{\mathfrak{p}}D_{\rho}(v_{\mathfrak{p}}) + (D_{\rho w}t_{\sigma v w}^{\mu\alpha})_{\mathfrak{p}} - (\mathscr{L}_{\sigma v}^{\mu}u_{\alpha})_{\mathfrak{p}}(D_{\rho w}v)_{\mathfrak{p}} =$$
$$= D_{\rho}(V_{\sigma v}^{\mu\alpha}(\mathfrak{p}) + (t_{\sigma v w}^{\mu\alpha})_{\mathfrak{p}}) + (\mathscr{L}_{\sigma v}^{\mu}u_{\alpha})_{\mathfrak{p}}(D_{\rho}(v_{\mathfrak{p}}) - (D_{\rho w}v)_{\mathfrak{p}}) = 0\,.$$

Возможность применения леммы 2 обеспечивается здесь условием $\{w\}\in\widetilde{\mathfrak{N}}_v$ и индуктивным предположением (13). Из формул (12) и (13) получаем:

$$Z^{v}(\mathfrak{p}) - y_{\mathfrak{p}}^{w} = 0, \tag{14}$$

если $\nu_{\mathfrak{p}}(w) \neq 0$. Пользуясь равенством (14) и леммой 3, находим, что для $\mathfrak{a} = \{w\}$

$$Z^{v}(\mathfrak{a}) = \sum \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})Z^{v}(\mathfrak{p}) = \sum \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})\,(Z^{v}(\mathfrak{p}) - y_{\mathfrak{p}}^{w}\,) = 0.$$

6. **Доопределение $Z^v(\mathfrak{a})$. Независимость от выбора v.** По доказанному, функция $Z^v(\mathfrak{a})$ обращается в нуль в любом главном дивизоре, где она определена. Естественно поэтому доопределить ее следующим образом. Пусть $\mathfrak{N}_v$ состоит из точек $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_h$. Подберем элементы $w_\alpha\in R$, удовлетворяющие условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\nu_{\mathfrak{p}_\alpha}(w_\alpha) \geqslant 1, \qquad 1 \leqslant \alpha \leqslant h\,.\\ &\nu_{\mathfrak{p}_\alpha}(w_\beta - 1) \geqslant 1, \quad \beta \neq \alpha. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Это, как хорошо известно, всегда можно сделать. Пусть

$$\{w_\alpha\} = \mathfrak{p}_\alpha^{\nu_{\mathfrak{p}_\alpha}(w_\alpha)}\,\mathfrak{a}_\alpha\,.$$

Очевидно, для $\mathfrak{p}\in\mathfrak{N}_v$

$$\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_\alpha) = 0\,,$$

так что $Z^v(\mathfrak{a}_\alpha)$ определена (по аддитивности); положим

$$Z^{v}(\mathfrak{p}_\alpha) = -\frac{1}{\nu_{\mathfrak{p}_\alpha}(w_\alpha)}\,Z^{v}(\mathfrak{a}_\alpha)\,. \tag{16}$$

От выбора w_α это определение не зависит. В самом деле, пусть w'_α — другие элементы R, удовлетворяющие (15). Пусть

$$\{w'_\alpha\} = \mathfrak{p}_\alpha^{\nu_{\mathfrak{p}_\alpha}(w'_\alpha)}\,\mathfrak{a}'_\alpha\,.$$

Тогда, очевидно,

$$\frac{\mathfrak{a}_\alpha^{\nu_{\mathfrak{p}_\alpha}(w'_\alpha)}}{\mathfrak{a}'^{\,\nu_{\mathfrak{p}_\alpha}(w_\alpha)}_\alpha} \in \widetilde{\mathfrak{N}}_v\,,$$

и этот дивизор является главным, так что

$$\nu_{\mathfrak{p}_\alpha}(w'_\alpha)Z^v(\mathfrak{a}_\alpha)-\nu_{\mathfrak{p}_\alpha}(w_\alpha)Z^v(\mathfrak{a}'_\alpha)=0$$

и

$$-\frac{1}{\nu_{\mathfrak{p}_\alpha}(w_\alpha)}Z^v(\mathfrak{a}_\alpha)=-\frac{1}{\nu_{\mathfrak{p}_\alpha}(w'_\alpha)}Z^v(\mathfrak{a}'_\alpha),$$

что доказывает корректность (16); $Z^v(\mathfrak{a})$ доопределяется теперь по аддитивности.

Понимая под $Z^v(\mathfrak{a})$ доопределенную таким образом функцию, докажем, что $Z^v(\{w\})=0$ для произвольного $w\in R$. В самом деле, пусть w_α удовлетворяют условиям (15). Положим

$$\nu_\alpha=v_{\mathfrak{p}_\alpha}(w_\alpha),\quad \nu=\text{н. о. к.}(\nu_1,\ldots,\nu_h).$$

Пусть

$$w'=w^\nu\prod_{i=0}^{h}w_\alpha^{-\frac{\nu}{\nu_\alpha}\nu_{\mathfrak{p}_\alpha}(w)}.$$

Очевидно, $\{w'\}\in\widetilde{\mathfrak{R}}_v$, так что

$$Z^v(\{w'\})=\nu Z^v(\{w\})-\sum_{\alpha=1}^{h}\frac{\nu}{\nu_\alpha}\nu_{\mathfrak{p}_\alpha}(w)\;Z^v(\{w_\alpha\})=0.$$

Но, в силу (16), $Z^v(\{w_\alpha\})=0$, поэтому

$$Z^v(\{w\})=0.$$

Докажем, что на совокупности дивизоров нулевой степени функция Z^v не зависит от выбора v. В самом деле, пусть

$$\nu_{\mathfrak{p}}(w)\neq 0,\quad \mathfrak{p}\,\bar{\in}\,\mathfrak{R}_{v_1}\cup\mathfrak{R}_{v_2}.$$

Тогда, как было доказано выше,

$$Z^{v_1}(\mathfrak{p})=Z^{v_2}(\mathfrak{p})=y^w_{\mathfrak{p}}.$$

Отсюда следует, что функции $Z^{v_1}(\mathfrak{a})$ и $Z^{v_2}(\mathfrak{a})$ совпадают для $\mathfrak{a}\in\widetilde{\mathfrak{R}}_{v_1}\cap\widetilde{\mathfrak{R}}_{v_2}$. Но рассуждения этого раздела показывают, что $Z^v(\mathfrak{a})$ полностью определяется своими значениями во всех, кроме конечного числа, точках, и это определение однозначно, если мы хотим, чтобы $Z^v(\mathfrak{a})$ обращалась на главных дивизорах в нуль. Поэтому $Z^{v_1}(\mathfrak{a})$ и $Z^{v_2}(\mathfrak{a})$ совпадают полностью. В дальнейших обозначениях, следовательно, индекс v можно отбросить, постоянно помня, однако, что функция $Z(\mathfrak{a})$ порождена некоторым соотношением (2).

7. Гомоморфизм ζ. Его рациональность. Инвариантность ядра. Пусть функция $Z(\mathfrak{a})$ определена соотношением (2). Обозначим буквой ζ отображение $\bar{\mathfrak{a}}\to Z(\mathfrak{a})$, где $\mathfrak{a}\in\bar{\mathfrak{a}}$, группы $C(K^*)$ классов дивизоров нулевой степени, рациональных над некоторым расширением K^* поля K (алгебраическим). Это отображение (по доказанному, не зависящее от выбора дивизора $\mathfrak{a}$ в классе $\bar{\mathfrak{a}}$) есть гомоморфизм $C(K^*)$ в аддитивную группу K^*. В самом деле, достаточно доказать, что $Z(\mathfrak{a})\in K^*$. Пусть над полем $\widetilde{K}\supset K^*$ все простые делители $\mathfrak{a}\in\bar{\mathfrak{a}}$ рациональны.

Пусть σ — произвольный автоморфизм $\widetilde{K}/K^*$, $\mathfrak{a}^\sigma$ — образ $\mathfrak{a}$ при автоморфизме, порожденном σ в группе дивизоров R. Так как класс $\bar{\mathfrak{a}}$ рационален над K^*, $\mathfrak{a}^\sigma \in \bar{\mathfrak{a}}$ (т. е. $\mathfrak{a}^\sigma \mathfrak{a}^{-1}$ есть главный дивизор), то

$$Z(\mathfrak{a}^\sigma) = Z(\mathfrak{a}).$$

С другой стороны, формулы (5) и (6) показывают, что

$$\sigma(Z(\mathfrak{a})) = Z(\mathfrak{a}^\sigma).$$

Будучи инвариантным при всех автоморфизмах $\widetilde{K}/K^*$, $Z(\mathfrak{a}^\sigma)$ принадлежит K^*, что и требовалось доказать.

Построим базисную систему соотношений пространства $\overline{\mathfrak{W}}$ и μ-му соотношению сопоставим функцию $Z_\mu(\mathfrak{a})$, $1 \leqslant \mu \leqslant N$. Обозначим через $\bar{\zeta}$ гомоморфизм

$$\bar{\mathfrak{a}} \to (Z_1(\mathfrak{a}), \ldots, Z_N(\mathfrak{a}))$$

группы $C(K^*)$ в аддитивную группу N-мерного векторного пространства над полем K^*. Ядро гомоморфизма $\bar{\zeta}$ обладает свойством минимальности: если $\bar{\mathfrak{a}}$ принадлежит этому ядру и если функция $Z(\mathfrak{a})$ соответствует соотношению (2), то (для $\bar{\mathfrak{a}} \in \mathfrak{a}$) $Z(\mathfrak{a}) = 0$.

В самом деле, выберем $v \in R$ так, чтобы $\nu_\mathfrak{p}(v) > 0$ для всех $\mathfrak{p}$ с $\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) \neq 0$. Пусть, далее, (3) является базисной системой, так что

$$\sum_{\alpha=1}^{g} L_{\alpha\beta v}\omega_\alpha = dy_\beta^v, \quad 1 \leqslant \beta \leqslant N,$$

$$\sum_{\beta=1}^{N} L'_\beta L_{\alpha\beta} = L_\alpha, \qquad 1 \leqslant \alpha \leqslant g,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{g} L_{\alpha v}\omega_\alpha = dy^v.$$

Пользуясь этими соотношениями и леммой 2, получим:

$$Z(\mathfrak{a}) = \sum \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) y_\mathfrak{p}^v = \sum \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) \Big(\sum_{\beta=1}^{N} L'_{\beta v} y_\beta^v \Big)_\mathfrak{p} =$$
$$= \sum_{\beta=1}^{N} L'_\beta \Big(\sum \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) (y_\beta^v)_\mathfrak{p} \Big) = \sum_{\beta=1}^{N} L'_\beta Z_\beta(\mathfrak{a}) = 0,$$

что и требовалось доказать. Отсюда непосредственно следует, что ядро $\bar{\zeta}$ не зависит от выбора базисных соотношений и, следовательно, также является инвариантом поля K и совокупности дифференцирований $D_1, \ldots, D_n$. Можно еще уточнить это утверждение. Пусть $k \subset K$ — подполе K, над которым K является конечным расширением степени трансцендентности n. Тогда существует ровно n линейно независимых над K дифференцирований, обращающихся в нуль на k. Легко доказать, что ядро $\bar{\zeta}$ не зависит также и от выбора базиса дифференцирований K над k; таким образом, это ядро инвариантно определяется парой (K, k). Ниже мы изучим ядро $\bar{\zeta}$ для простейшего, но важного и характерного частного

случая — однопараметрического семейства кривых над комплексным полем. Результат исследования этого случая наводит на мысль, что ядро, определяемое парой (K, k), должно состоять из классов дивизоров, в каком-то смысле определенных над k. Более точный смысл этого будет ясен из последующего.

8. Кривая C_u. Периоды дифференциалов. Пусть над полем k комплексных чисел определена неособая проективная алгебраическая поверхность V. Обозначим через C_u неприводимую общую кривую линейного пучка кривых на V рода g, через R — поле функций на C_u, через $K = k(u)$ — поле определения C_u. Здесь u — параметр пучка, трансцендентный над k. Мы будем предполагать, что при любой специализации $u \to a \in k$ кривая C_u остается неприводимой, но может приобрести одну двойную точку, что понизит ее род до $g - 1$ (над k). Таких специализаций, очевидно, конечное число. D будет означать дифференцирование K (и его расширений), определенное условиями $Du = 1$, $Dc = 0$, если $c \in k$, т. е. попросту дифференцирование по u функций от u.

Пусть $u \to a_\nu$, $\nu = 1, \ldots, r$, — все специализации, понижающие род C_u. Обозначим через σ_ν автоморфизм одномерной группы гомологий C_u, порожденный обходом на u-плоскости вокруг точки $u = a_\nu$, а через ε — единичный автоморфизм. Тогда можно выбрать базис одномерных гомологий на C_u:

$$(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2q};\quad \gamma_{2q+1}, \ldots, \gamma_{2g})$$

таким образом, чтобы выполнялись соотношения:

$$(\sigma_\nu - \varepsilon)(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2q}) = (0, \ldots, 0),$$

$$(\sigma_\nu - \varepsilon)(\gamma_{2q+1}, \ldots, \gamma_{2g}) = (\gamma_{2q+1}, \ldots, \gamma_{2g})S_\nu,$$

где S_ν — целочисленные квадратные матрицы порядка $2g - 2q$. Циклы $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2q})$ образуют базис инвариантных циклов, а $(\gamma_{2q+1}, \ldots, \gamma_{2g})$ — базис «исчезающих» циклов, т. е. гомологичных нулю на V [см. ([3]), гл. VI].

Нам понадобится следующее простое предложение.

ЛЕММА 4. *Система уравнений* $(x_{2q+1}, \ldots, x_{2g})\, S_\nu^* = 0$, $1 \leqslant \nu \leqslant r$ *(где* * *обозначает транспонирование), не имеет ненулевых решений.*

Доказательство. В самом деле, в противном случае эта система имела бы целочисленное ненулевое решение $(x^0_{2q+1}, \ldots, x^0_{2g})$. Положим

$$\gamma^0 = x^0_{2q+1}\gamma_{2q+1} + \cdots + x^0_{2g}\gamma_{2g},$$

или, обозначая

$$\bar{x}^0 = (x^0_{2q+1}, \ldots, x^0_{2g}) \quad \text{и} \quad \bar{\gamma} = (\gamma_{2q+1}, \ldots, \gamma_{2g}),$$

запишем это в виде формального скалярного произведения $\gamma^0 = (\bar{x}^0, \bar{\gamma})$. Тогда имеем:

$$(\sigma_\nu - \varepsilon)\gamma^0 = (\bar{x}^0, \bar{\gamma}S_\nu) = (\bar{x}^0 S_\nu^*, \bar{\gamma}) = 0, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant r.$$

Следовательно, цикл γ^0 инвариантен, чего не может быть, так как он есть линейная комбинация исчезающих циклов. Лемма доказана.

На поверхности V существует q линейно независимых одномерных дифференциалов первого рода, так называемых дифференциалов Пикара.

Их можно рассматривать как дифференциалы первого рода $\omega_1, \ldots, \omega^q$ на кривой C_u, где они останутся линейно независимыми. Периоды этих дифференциалов по исчезающим циклам равны, очевидно, нулю, ибо эти последние гомологичны нулю на V. Поэтому, в силу теоремы полной приводимости Пуанкаре, на кривой C_u существует дополнительная система из $g-q$ дифференциалов первого рода $\omega_{q+1}, \ldots, \omega_g$ таких, что дифференциалы $\omega_1, \ldots, \omega_g$ линейно независимы, а их матрица периодов $\Omega_\alpha^\beta = \int\limits_{\gamma_\beta} \omega_\alpha$ имеет следующий вид:

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc} \Omega_1^1 & \ldots & \Omega_1^{2q} & & & \\ \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot & & 0 & \\ \Omega_q^1 & \ldots & \Omega_q^{2q} & & & \\ \hline & & & \Omega_{q+1}^{2q+1} & \ldots & \Omega_{q+1}^{2g} \\ & 0 & & \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot \\ & & & \Omega_g^{2q+1} & \ldots & \Omega_g^{2g} \end{array}\right\|$$

[ср. (4)]. При этом периоды Ω_α^β дифференциалов Пикара, инвариантные относительно обходов вокруг критических точек на u-плоскости, являются рациональными функциями от u. С помощью подходящего линейного преобразования $(\omega_1, \ldots, \omega_q)$ над K мы можем добиться того, чтобы эти периоды оказались постоянными; в дальнейшем будем считать это выполненным.

9. Построение базисной системы. Заметим прежде всего, что дифференциалы $D_v\omega_\alpha$, $1 \leqslant \alpha \leqslant q$, имеют только нулевые периоды и поэтому являются полными; следовательно в пространстве $\overline{\mathfrak{W}}$ мы имеем q соотношений:

$$D\overline{\omega}_\alpha = 0, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant q. \tag{17}$$

Обозначим, далее,

$$\overline{\Omega}_\alpha = (\Omega_\alpha^{2q+1}, \ldots, \Omega_\alpha^{2g}), \quad q+1 \leqslant \alpha \leqslant g,$$

$$\overline{\Omega}^\beta = (\Omega_{q+1}^\beta, \ldots, \Omega_g^\beta), \quad 2q+1 \leqslant \beta \leqslant 2g; \quad \overline{\mathfrak{W}}_0 = \mathfrak{W}_0/\mathfrak{B},$$

где $\mathfrak{W}_0$ обозначает пространство дифференциалов R с нулевыми вычетами и нулевыми периодами по инвариантным циклам. Очевидно, $\overline{\mathfrak{W}}$ распадается в прямую сумму $\overline{\mathfrak{W}}_0$ и дополнительного пространства; базисная система $\overline{\mathfrak{W}}$ может состоять из соотношений (17) и базисной системы $\overline{\mathfrak{W}}_0$. В этом виде мы и будем ее строить.

Заметим, что любому соотношению в $\overline{\mathfrak{W}}_0$

$$\sum_{\alpha=q+1}^{g} L_\alpha \overline{\omega}_\alpha = 0 \tag{18}$$

соответствует соотношение

$$\sum_{\alpha=q+1}^{g} L_\alpha \overline{\Omega}_\alpha = \overline{0}, \tag{19}$$

где $\bar{0}$ есть нулевой вектор, а дифференцирование применяется покоординатно. Точно так же всякое соотношение (19), означающее, что дифференциал

$$\sum_{\alpha=q+1}^{g} L_{\alpha v}\omega_\alpha$$

имеет лишь нулевые периоды, равносильно соотношению (18). Поэтому базисной системе $\overline{\mathfrak{W}}_0$ соответствует некоторая однородная система (Σ) линейных дифференциальных уравнений относительно $g-q$ неизвестных над полем $k(u)$, имеющая $2g-2q$ решений $\overline{\Omega}^\beta$.

Построим такую систему (Σ), ставя своей целью добиться того, чтобы некоторая часть векторов $\overline{\Omega}^\beta$ составляла совокупность фундаментальных решений (Σ). Для этого воспользуемся способом, описанным в п.3, с некоторыми уточнениями.

Пусть p — максимальное число линейно независимых над k векторов $\overline{\Omega}^\beta$. Рассмотрим последовательность

$$\overline{\Omega}_{q+1}, \ \ldots, \ \overline{\Omega}_g, \quad D\overline{\Omega}_{q+1}, \ \ldots, \ D\overline{\Omega}_g, \ \ldots, \ D^p\overline{D}_{q+1}, \ \ldots, \ D^p\overline{\Omega}_g. \qquad (20)$$

Над полем K^*, которое получается присоединением к K всех периодов Ω_β^α и их производных до p-й включительно (это будет не алгебраическое расширение, но и дифференцирование мы здесь понимаем как операцию анализа), в этой последовательности есть не более p линейно независимых векторов (конечно, $p \geqslant g-q$). В самом деле, расписывая покоординатно друг под другом векторы (20), мы получим матрицу, имеющую, очевидно, не более p линейно независимых столбцов и, следовательно, строк. Пусть количество линейно независимых векторов (20) равно $p_1 \leqslant p$. Если применить к последовательности (20) описанный в п.3 процесс, то, избегая выписывать лишние соотношения, мы при подходящей нумерации $\overline{\Omega}_{q+1}, \ldots, \overline{\Omega}_g$ получим следующее. Существует такая последовательность целых чисел $g-q=r_0 \geqslant r_1 \geqslant \ldots \geqslant r_t > r_{t+1}=0$, что

а) $r_0+r_1+\ldots+r_t=p_1$;

б) линейно независимыми (т. е. невычеркнутыми) членами последовательности (20) являются векторы

$$\overline{\Omega}_{q+1}, \ \ldots, \ \overline{\Omega}_{q+r_0}; \quad D\overline{\Omega}_{q+1}, \ \ldots, \ D\overline{\Omega}_{q+r_1}, \ \ldots, \ D^t\overline{\Omega}_{q+1}, \ \ldots, \ D^t\overline{\Omega}_{q+r_t};$$

в) в μ-м периоде будут выписаны $r_{\mu-1}-r_\mu$ соотношений для испытуемых векторов $D^\mu\overline{\Omega}_{q+r_{\mu-1}+1}, \ \ldots, \ D^\mu\overline{\Omega}_{q+r_\mu}$ (и ни одного, если $r_{\mu-1}=r_\mu$), все остальные соотношения будут следствиями этих.

Заменяя в выписанных соотношениях $\overline{\Omega}_\alpha$ на знаки неизвестных, мы получим искомую систему уравнений (Σ). В самом деле, с одной стороны, эта система имеет p линейно независимых решений $\overline{\Omega}^\beta$, с другой стороны, число ее фундаментальных решений должно быть не больше, чем

$$(r_0-r_1)+2(r_1-r_2)+\cdots+(t+1)(r_t-r_{t+1})=p_1.$$

Следовательно, это число есть в точности $p_1=p$, и мы можем считать, что $\overline{\Omega}^{2q+1}, \ \ldots, \ \overline{\Omega}^{2q+p}$ образуют фундаментальную систему решений (Σ).

Но, по сделанному выше замечанию, каждому уравнению (Σ) соответствует некоторая линейно дифференциальная зависимость в пространстве $\overline{\mathfrak{W}}_0$; коэффициенты этой зависимости, по построению (Σ), принадлежат K^*, однако вовсе не обязаны принадлежать K. На самом же деле, векторы $\mathfrak{W}_0$, линейно независимые над K, остаются таковыми и над любым расширением K, способным служить полем констант кривой C_u; это почти тривиальное замечание позволяет заключить, что линейные зависимости $\overline{\mathfrak{W}}_0$, соответствующие (Σ), имеют коэффициенты в K (если при необходимости разделить их на некоторые элементы K^*). Тот факт, что полученные зависимости составляют базисную систему $\overline{\mathfrak{W}}_0$, следует из способа построения (Σ).

10. Ядро гомоморфизма $\bar{\zeta}$. Как уже было упомянуто во введении, функция $Z(\mathfrak{a})$, соответствующая соотношению

$$\sum_{\alpha=q+1}^{g} L_\alpha \overline{\omega}_\alpha = 0,$$

определяется формулой

$$Z(\mathfrak{a}) = \sum_{\alpha=q+1}^{g} L_\alpha \int^{\mathfrak{a}} \omega_\alpha, \tag{21}$$

где интеграл

$$\int^{\mathfrak{a}} \omega_\alpha = \sum \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) \int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}} \omega_\alpha,$$

очевидно, не зависит (для дивизора нулевой степени) от выбора точки $\mathfrak{p}_0$ и определен с точностью до периодов. Соответствие формулы (21) определению, заданному формулами (5), (6), (6а) и (7), легко проверяется; в действительности, конечно, эти последние формулы выписывались, исходя из (21). Отсюда непосредственно следует, что если $\bar{\mathfrak{a}}$ принадлежит ядру гомоморфизма $\bar{\zeta}$, построенного для всех базисных соотношений, то $\left(\int^{\mathfrak{a}} \omega_\alpha\right)$ удовлетворяет системе (Σ) для $q+1 \leqslant \alpha \leqslant g$ и уравнениям (17) для $1 \leqslant \alpha \leqslant q$. Последнее же означает, что

$$\int^{\mathfrak{a}} \omega_\alpha = \text{const}, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant q,$$

$$\int^{\mathfrak{a}} \omega_\alpha = \sum_{\beta=2q+1}^{2g} c_\beta \Omega_\alpha^\beta, \quad q+1 \leqslant \alpha \leqslant g, \quad c_\beta \in k, \tag{22}$$

где мы положили $c_\beta = 0$ для $2q+p+1 \leqslant \beta \leqslant 2g$. Положим $\bar{c} = (c_{2q+1}, \ldots, \ldots, c_{2g})$ и запишем (22) в виде формального скалярного произведения:

$$\int^{\mathfrak{a}} \omega_\alpha = (\bar{c}, \overline{\Omega}_\alpha). \tag{23}$$

Совершая обход вокруг ν-й критической точки на u-плоскости и пользуясь тем, что периоды преобразуются как соответствующие циклы, мы

получим для интеграла (23) приращение вида:

$$(\bar{c}, (\sigma_\nu - \varepsilon)\,\overline{\Omega}_\alpha) = (\bar{c}, \overline{\Omega}_\alpha S_\nu) = (cS_\nu^*, \overline{\Omega}_\alpha).$$

Если класс $\mathfrak{a}$ рационален над K, то это приращение должно быть целочисленной линейной комбинацией периодов. Иначе говоря, существуют такие целочисленные векторы $\bar{f}_\nu$, что $\bar{c}$ удовлетворяет системе уравнений

$$\bar{c}S_\nu^* = \bar{f}_\nu, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant N.$$

Так как соответствующая однородная система, в силу леммы 4, не имеет ненулевых решений, то $\bar{c}$ определяется векторами $\bar{f}_\nu$ однозначно и, следовательно, имеет рациональные координаты. Обозначая буквой d общий знаменатель этих координат, получим окончательно:

$$\begin{gathered} \int^{\mathfrak{a}^d} \omega_\alpha = \text{const}, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant q, \\ \left(\int^{\mathfrak{a}^d} \omega_\alpha\right) \equiv 0\ (\text{mod периодов}), \quad q+1 \leqslant \alpha \leqslant g. \end{gathered} \tag{24}$$

В силу теоремы Севери [см. ([3]), гл. VII, 4, с] это дает следующий результат:

Если рациональный над $k(u)$ класс дивизоров нулевой степени $\bar{\mathfrak{a}}$ кривой C_u принадлежит ядру гомоморфизма $\bar{\zeta}$, то существует такое целое число d, что класс $\bar{\mathfrak{a}}^d$ алгебраически эквивалентен нулю.

Очевидно, обратное утверждение также справедливо.

В якобиевом многообразии J_u кривой C_u классы дивизоров, алгебраически эквивалентные нулю, образуют абелево подмногообразие, бирационально эквивалентное абелеву многообразию, которое определено над k. Это последнее называется многообразием Пикара поверхности V и, как мы выяснили, фактически совпадает с ядром $\bar{\zeta}$. Оговорку относительно d можно было бы предвидеть заранее, учитывая, что в аддитивной группе основного поля нет элементов конечного порядка. В этом смысле, действительно, ядро гомоморфизма, соответствующего паре (K, k), состоит из классов дивизоров, «определенных» над k.

11. Эллиптические кривые. Случай вырождения. Ниже мы в общих чертах проведем вычисления гомоморфизма $\bar{\zeta}$ для случая эллиптической кривой C_u.

Пусть эллиптическая кривая C_u задана каноническим уравнением

$$Y^2 = X^3 + aX + b, \quad 4a^3 + 27b^2 \neq 0. \tag{25}$$

Род C_u равен единице, единственный дифференциал первого рода есть $\omega = \frac{dX}{Y}$; базис пространства $\overline{\mathfrak{W}}$ задается векторами $(\bar{\omega}, \bar{\omega}')$, где $\omega' = \frac{XdX}{Y}$; D в K обозначает дифференцирование по u; продолжение D на R, обозначаемое для простоты той же буквой, соответствует D_X в прежних обозначениях.

Так как размерность пространства $\overline{\mathfrak{W}}$ равна двум, то следует ожидать, что в общем случае $\bar{\omega}$ и $D\bar{\omega}$ должны быть линейно независимы. В действительности так оно и есть; исследуем сначала случай вырождения, когда между $\bar{\omega}$ и $D\bar{\omega}$ линейная зависимость существует.

Пусть

$$X^3 + aX + b \equiv (X - e_1)(X - e_2)(X - e_3),$$

e_α принадлежат алгебраическому расширению K,

$$\delta = [(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)]^2 = -(4a^3 + 27b^2).$$

Тогда имеем:

$$D\omega = -\frac{1}{2}\frac{Da\cdot X + Db}{Y^3}dX,$$

$$D\omega - d\left(\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{Dae_\alpha + Db}{3e_\alpha^2 + a}\frac{Y}{X - e_\alpha}\right) = \frac{2a^2Da + 9bDb}{2\delta}\frac{dX}{Y} - \frac{9bDa - 6aDb}{2\delta}\cdot\frac{XdX}{Y}.$$

Следовательно, для линейной зависимости $\overline{\omega}$ и $D\overline{\omega}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:

$$9bDa - 6aDb = 0.$$

Общее решение этого простого дифференциального уравнения задается условием

$$\xi a^3 + \eta b^2 = 0,$$

где ξ, η — произвольные постоянные (заметим, что это условие равносильно независимости от u абсолютного инварианта кривой). Здесь может представиться три случая:

а) $b = 0$. Уравнение кривой: $Y^2 = X^3 + aX$.

$$D\overline{\omega} + \frac{Da}{4a}\overline{\omega} = 0,$$

$$Z(\mathfrak{p}) = \frac{Da\cdot X_\mathfrak{p} - 2aD(X_\mathfrak{p})}{2aY_\mathfrak{p}}. \tag{26а}$$

б) $a = 0$. Уравнение кривой: $Y^2 = X^3 + b$.

$$D\overline{\omega} + \frac{Db}{6b}\overline{\omega} = 0,$$

$$Z(\mathfrak{p}) = \frac{Db\cdot X_\mathfrak{p} - 3bD(X_\mathfrak{p})}{3bY_\mathfrak{p}}. \tag{26б}$$

в) $ab \neq 0$; $\lambda = \frac{\eta}{\xi} \neq \frac{27}{4}$. Уравнение кривой: $Y^2 = X^3 + c^2X + \lambda c^3$.

$$D\overline{\omega} + \frac{Dc}{2c}\overline{\omega} = 0,$$

$$Z(\mathfrak{p}) = \frac{DcX_\mathfrak{p} - cD(X_\mathfrak{p})}{cY_\mathfrak{p}}. \tag{26в}$$

Чрезвычайная простота формул (26а), (26б), (26в) делает их удобными для практической проверки линейной зависимости конкретных точек на кривой C_u. Как легко видеть, если a не есть квадрат, b не есть куб, c не есть квадрат, то формулы (26а), (26б), (26в) могут терять смысл лишь в тривиальных случаях $Y_\mathfrak{p} = 0$ и ни в каких рациональных точках над $k(u)$ в нуль не обращаются.

12. Эллиптические кривые. Общий случай. В общем случае формулы получаются гораздо более громоздкими, если не накладывать на a и b никаких специальных ограничений.

Ищем линейное соотношение

$$D^2\bar{\omega} + p^1 D\bar{\omega} + p^0\bar{\omega} = 0$$

с неопределенными коэффициентами p^1, p^0. Выделение полных дифференциалов дает:

$$D^2\omega + p^1 D\omega + p^0\omega = d\Bigg[-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{(De_\alpha)^2}{(3e_\alpha^2+a)^2}\frac{Y^3}{(X-e_\alpha)^3} +$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{-\frac{3}{2}(f_2e_\alpha^2+f_1e_\alpha+f_0)+p^1(e_\alpha Da+Db)+e_\alpha D^2a+D^2b}{(3e_\alpha^2+a)^2}\cdot\frac{Y}{X-e_\alpha}+\frac{1}{2}g_2Y\Bigg] +$$

$$+\left[p^0+\frac{3}{4}\left(g_0+h_0-\frac{ag_2}{3}\right)-\frac{1}{2}p^1k_0-\frac{1}{2}l_0\right]\frac{dX}{Y} +$$

$$+\left[\frac{3}{4}(g_1+h_1)-\frac{1}{2}p^1k_1-\frac{1}{2}l_1\right]\frac{XdX}{Y}.$$

Здесь введены обозначения:

$$g_2=\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{(De_\alpha)^2}{(3e_\alpha^2+a)^2},\qquad f_2=-3\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{e_\alpha(De_\alpha)^2}{3e_\alpha^2+a},\qquad h_1=\frac{2a^2f_2+9bf_1-6af_0}{\delta},$$

$$g_1=\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{e_\alpha(De_\alpha)^2}{(3e_\alpha^2+a)^2},\qquad f_1=-\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{(6e_\alpha^2+a)(De_\alpha)^2}{3e_\alpha^2+a},\qquad h_0=\frac{3abf_2-2a^2f_1-9bf_0}{\delta},$$

$$g_0=-2\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{e_\alpha^2(De_\alpha)^2}{(3e_\alpha^2+a)^2},\quad f_0=-\frac{a}{b}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{(De_\alpha)^2e_{\alpha+1}^2e_{\alpha+2}^2}{3e_\alpha^2+a}+\frac{(Db)^2}{b},$$

$$k_1=\frac{9bDa-6aDb}{\delta},\qquad l_1=\frac{9bD^2a-6aD^2b}{\delta},$$

$$k_0=-\frac{2a^2Da+9bDb}{\delta},\quad l_0=-\frac{2a^2D^2a+9bD^2b}{\delta}.$$

Коэффициенты p^1 и p^0 находятся из уравнений:

$$p^0+\frac{3}{4}\left(g_0+h_0-\frac{ag_2}{3}\right)-\frac{1}{2}p^1k_0-\frac{1}{2}l_0=0,$$

$$\frac{3}{4}(g_1+h_1)-\frac{1}{2}p^1k_1-\frac{1}{2}l_1=0.$$

Для кривой C_u в частном виде $Y^2=X(X-1)(X-u)$ [см. ([1])] уравнение для дифференциала приобретает простую форму:

$$D^2\bar{\omega}+\frac{2u-1}{u(u-1)}D\bar{\omega}+\frac{1}{4u(u-1)}\bar{\omega}=0,$$

однако $Z(\mathfrak{p})$ и здесь выглядит достаточно сложно.

В заключение приношу благодарность И. Р. Шафаревичу за постоянное внимание к этой работе.

Поступило
20.III.1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Fuchs L., Gesammelte mathematische Werke, Bd. 1, S. 241—281, 285—292, 343—360; Bd 3, S. 251—264, 283—293, Berlin, 1904—1909.
2. Chevalley C., Introduction to the theory of algebraic functions of one variable, New York, 1951.
3. Zarisski O., Algebraic surfaces, Berlin, 1935.
4. Igusa J.— I., On the Picard varieties attached to algebraic varieties, Am. Journn. Math., 74, № 1 (1952), 1—22.
5. Igusa J.— I., Fibre systems of Jacobian varieties. I—II, Am. Journ. Math., 78, № 1 (1956), 171—199; № 4 (1956), 745—760.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 757–770

Л. П. СТАРЧЕНКО

О ПОСТРОЕНИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, СОВМЕСТНО НОРМАЛЬНЫХ С ДАННОЙ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе решается вопрос о построении любого числа последовательностей, совместно нормальных с данной нормальной последовательностью.

Введение

Пусть $g \geqslant 2$ — натуральное число, и пусть имеется бесконечная последовательность

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \tag{1}$$

где каждое ε_k может быть одним из символов $0, 1, 2, \ldots, g-1$. Возьмем натуральные s и P и выпишем первые $P+s-1$ знаков последовательности (1) в следующем порядке:

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_s)(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{s+1}) \ldots (\varepsilon_P, \varepsilon_{P+1}, \ldots, \varepsilon_{P+s-1}).$$

Последовательность таких скобок назовем гусеницей ранга s длиной P соответствующей последовательности (1). Пусть задана какая-либо комбинация знаков $\Delta_s = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s)$; через $N_P(\Delta_s)$ обозначим количество появлений Δ_s среди $P+s-1$ первых знаков последовательности (1).

Последовательность (1) называется нормальной, если для любого s и для любой комбинации Δ_s

$$\lim_{P\to\infty} \frac{N_P(\Delta_s)}{P} = \frac{1}{g^s}. \tag{2}$$

Возьмем число $\alpha = 0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots$, записанное в g-ичной системе счисления.

Как известно, нормальность последовательности (1) эквивалентна тому, что дробные доли $\{\alpha g^x\}$ $(x = 0, 1, 2, \ldots)$ равномерно распределены [см., например, ([1]), стр. 233, лемма].

Справедлив следующий критерий: если существует такое постоянное c, что для любого s и для любой комбинации Δ_s

$$\overline{\lim_{P\to\infty}} \frac{N_P(\Delta_s)}{P} < \frac{c}{g^s},$$

то последовательность (1) является нормальной (доказательство содержится в работе ([2]); можно также взять доказательство теоремы 2 из работы ([3]) с $p = q = \frac{1}{2}$ и обобщить его на произвольное натуральное g).

Пусть дано l последовательностей:

$$\begin{matrix} \varepsilon_1^{(1)}, & \varepsilon_2^{(1)}, & \varepsilon_3^{(1)}, & \ldots, \\ \varepsilon_1^{(2)}, & \varepsilon_2^{(2)}, & \varepsilon_3^{(2)}, & \ldots, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon_1^{(l)}, & \varepsilon_2^{(l)}, & \varepsilon_3^{(l)}, & \ldots. \end{matrix} \tag{3}$$

где последовательность $\{\varepsilon_i^{(k)}\}$ состоит из знаков $0, 1, 2, \ldots, g_k - 1$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, l)$.

Возьмем натуральные s и P и выпишем первые $P + s - 1$ знаков каждой последовательности в следующей форме:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1^{(1)}, & \varepsilon_2^{(1)}, & \ldots, & \varepsilon_s^{(1)} \\ \varepsilon_1^{(2)}, & \varepsilon_2^{(2)}, & \ldots, & \varepsilon_s^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon_1^{(l)}, & \varepsilon_2^{(l)}, & \ldots, & \varepsilon_s^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_2^{(1)}, & \varepsilon_3^{(1)}, & \ldots, & \varepsilon_{s+1}^{(1)} \\ \varepsilon_2^{(2)}, & \varepsilon_3^{(2)}, & \ldots, & \varepsilon_{s+1}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon_2^{(l)}, & \varepsilon_3^{(l)}, & \ldots & \varepsilon_{s+1}^{(l)} \end{pmatrix} \ldots$$

$$\ldots \begin{pmatrix} \varepsilon_P^{(1)}, & \varepsilon_{P+1}^{(1)}, & \ldots, & \varepsilon_{P+s-1}^{(1)} \\ \varepsilon_P^{(2)}, & \varepsilon_{P+1}^{(2)}, & \ldots, & \varepsilon_{P+s-1}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon_P^{(l)}, & \varepsilon_{P+1}^{(l)}, & \ldots, & \varepsilon_{P+s-1}^{(l)} \end{pmatrix}$$

Последовательность таких матриц назовем гусеницей ранга s длиной P соответствующей системы последовательностей (3).

Возьмем какую-либо матрицу Δ_s:

$$\Delta_s = \begin{pmatrix} \delta_1^{(1)}, & \delta_2^{(1)}, & \ldots, & \delta_s^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_1^{(l)}, & \delta_2^{(l)}, & \ldots, & \delta_s^{(l)} \end{pmatrix},$$

где строки $\delta_i^{(k)}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, l)$ составлены из знаков $0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, g_k - 1$; через $N_P(\Delta_s)$ обозначим количество появлений Δ_s в гусенице ранга s длиной P системы последовательностей (3).

Система последовательностей (3) называется совместно нормальной, если для любого s и для любой матрицы Δ_s

$$\lim_{P\to\infty} \frac{N_P(\Delta_s)}{P} = \frac{1}{(g_1 \cdot g_2 \cdots g_l)^s} \; *. \tag{4}$$

---

* Понятие системы совместно нормальных последовательностей введено Н. М. Коробовым [см. ([4]), стр. 365]. В определении Н. М. Коробова в каждой строчке матрицы Δ может содержаться разное количество знаков:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1^{(1)}, & \delta_2^{(1)}. & \ldots, & \delta_{n_1}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_1^{(l)}, & \delta_2^{(l)}, & \ldots, & \delta_{n_l}^{(l)} \end{pmatrix}.$$

Пусть $s = \max(n_1, \ldots, n_l)$. Появление матрицы Δ эквивалентно появлению какой-либо матрицы из семейства

$$\begin{pmatrix} \delta_1^{(1)}, & \ldots, & \delta_{n_1}^{(1)}, & \bar\delta_{n_1+1}^{(1)}, & \ldots, & \bar\delta_s^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_1^{(l)}, & \ldots, & \delta_{n_l}^{(l)}, & \bar\delta_{n_l+1}^{(l)}, & \ldots, & \bar\delta_s^{(l)} \end{pmatrix},$$

где $\bar\delta_i^{(k)}$ — любые знаки из $0,1,2,\ldots, g_k - 1$. Таким образом, определение Н. М. Коробова не шире приведенного, т. е. эквивалентно данному определению.

Очевидно, что каждая строка системы последовательностей (3) является нормальной последовательностью.

При рассмотрении системы последовательностей будем считать одним знаком всякий столбец

$$\bar{\delta} = \begin{pmatrix} \delta_i^{(1)} \\ \vdots \\ \delta_i^{(l)} \end{pmatrix}, \text{ где } 0 \leqslant \delta_i^{(k)} \leqslant g_k - 1 \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ l)$$

(количество таких знаков равно $g_1 \cdot g_2 \cdots g_l$); тогда система последовательностей (3) эквивалентна последовательности

$$\bar{\varepsilon}_1,\ \bar{\varepsilon}_2,\ \bar{\varepsilon}_3,\ \ldots, \tag{5}$$

где знаки $\bar{\varepsilon}_i$ взяты из алфавита, содержащего $g_1 g_2 \cdots g_l$ знаков. Очевидно, что совместная нормальность системы (3) эквивалентна нормальности вспомогательной последовательности (5). Отсюда следует критерий нормальности:

ТЕОРЕМА. *Пусть для системы последовательностей* (3) *существует константа с такая, что, какое бы натуральное s мы ни взяли и какую бы матрицу* $\bar{\Delta}_s$ *ни рассмотрели,*

$$\overline{\lim_{P \to \infty}} \frac{N_p(\bar{\Delta}_s)}{P} < \frac{c}{(g_1 \cdots g_l)^s}.$$

Тогда система последовательностей (3) — *совместно нормальная.*

Пусть для натурального $g_1 \geqslant 2$ имеется нормальная последовательность знаков $0, 1, 2, \ldots, g_1 - 1$:

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \ldots \tag{6}$$

Требуется подобрать такую последовательность знаков $0, 1, 2, \ldots, g_2 - 1$:

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3,\ \ldots, \tag{7}$$

чтобы система последовательностей

$$\begin{matrix} \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \ldots \\ \delta_1, & \delta_2, & \ldots \end{matrix}$$

была совместно нормальной.

В § 1 мы решаем эту задачу не только для $g_1 = g_2 = g$, но и более общую задачу: для данной нормальной последовательности (6) мы строим бесконечное количество последовательностей:

$$\begin{matrix} \varepsilon_1^{(1)}, & \varepsilon_2^{(1)}, & \varepsilon_3^{(1)}, & \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon_1^{(k)}, & \varepsilon_2^{(k)}, & \varepsilon_3^{(k)}, & \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \tag{8}$$

где $\varepsilon_i^{(k)}$ — любое натуральное число, $0 \leqslant \varepsilon_i^{(k)} \leqslant g - 1$ ($k = 1, 2, \ldots, i = 1, 2, 3, \ldots$), так, что для любого натурального l система последовательностей:

$$\begin{matrix} \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \varepsilon_3, & \ldots, \\ \varepsilon_1^{(1)}, & \varepsilon_2^{(1)}, & \varepsilon_3^{(1)}, & \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon_1^{(l-1)}, & \varepsilon_2^{(l-1)}, & \varepsilon_3^{(l-1)}, & \ldots \end{matrix} \tag{9}$$

будет совместно нормальной.

Пусть имеется бесконечная последовательность вещественных чисел, взятых с отрезка [0, 1]:

$$\alpha = \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots \tag{10}$$

(α обозначает всю последовательность). Возьмем какое-либо натуральное s и образуем гусеницу ранга s:

$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_s)(\alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_{s+1})\ldots(\alpha_P,\ \alpha_{P+1},\ \ldots,\ \alpha_{P+s-1})\ldots .$$

Каждой скобке гусеницы мы можем сопоставить точку единичного куба s-мерного пространства, координаты которой есть элементы скобки:

$$Q_j = (\alpha_j,\ \alpha_{j+1},\ \ldots,\ \alpha_{j+s-1}).$$

Назовем последовательность α вполне равномерно распределенной, если при любом $s \geqslant 1$ последовательность точек

$$Q_1,\ Q_2,\ \ldots,\ Q_P \ldots \tag{11}$$

равномерно распределена *.

Н. М. Коробов установил [см. ([1]), стр. 217], что если

$$\alpha = \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots \tag{12}$$

— вполне равномерно распределенная последовательность, то последовательность первых g-ичных знаков последовательности (10),

$$[\alpha_1 g],\ [\alpha_2 g],\ [\alpha_3 g],\ \ldots , \tag{13}$$

является нормальной последовательностью.

Н. М. Коробов поставил задачу доказать обратное предложение, а именно, что всякая нормальная последовательность может быть получена как последовательность первых g-ичных знаков некоторой вполне равномерно распределенной последовательности.

В § 2 мы даем утвердительный ответ на это предположение Н. М. Коробова.

Пусть даны две бесконечные последовательности вещественных чисел, взятых с отрезка [0, 1]:

$$\begin{gathered}\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \ldots .\end{gathered} \tag{14}$$

Возьмем натуральные s и P и выпишем первые $P+s-1$ знаков каждой последовательности в следующей форме:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_s\\ \beta_1, & \beta_2, & \ldots, & \beta_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_2, & \alpha_3, & \ldots, & \alpha_{s+1}\\ \beta_2, & \beta_3, & \ldots, & \beta_{s+1}\end{pmatrix}\ldots\begin{pmatrix}\alpha_P, & \alpha_{P+1}, & \ldots, & \alpha_{P+s-1}\\ \beta_P, & \beta_{P+1}, & \ldots, & \beta_{P+s-1}\end{pmatrix}.$$

Каждой матрице можно сопоставить точку единичного куба $2s$-мерного пространства, координатами которой являются элементы матрицы

$$Q_j^{(2s)} = (\alpha_j,\ \alpha_{j+1},\ \ldots,\ \alpha_{j+s-1},\quad \beta_j,\ \beta_{j+1},\ \ldots,\ \beta_{j+s-1}).$$

---

* Понятие вполне равномерно распределенной последовательности введено Н. М. Коробовым [см. ([1]), стр. 216] в несколько иной форме. Эквивалентность обоих определений вытекает из критерия равномерного распределения Г. Вейля для многомерного случая [см. ([5])].

Назовем систему последовательностей (14) совместно вполне равномерно распределенной, если при любом натуральном s последовательность точек

$$Q_1^{(2s)},\ Q_2^{(2s)},\ Q_3^{(2s)}, \ldots \tag{15}$$

вполне равномерно распределена.

Очевидно, что если система последовательностей (14) совместно вполне распределена, то каждая из ее строк представляет собой вполне равномерно распределенную последовательность.

Пусть дана какая-либо вполне равномерно распределенная последовательность.

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \ldots . \tag{16}$$

В § 3 мы дадим построение такой последовательности чисел

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3, \ldots , \tag{17}$$

что система

$$\begin{matrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \ldots \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \ldots \end{matrix} \tag{18}$$

будет совместно вполне равномерно распределенной. Построение это аналогично построению совместно нормальных последовательностей, приведенному в § 1.

Наконец, в § 4 мы решим задачу построения последовательности, совместно нормальной с данной последовательностью (6), без ограничения $g_1 = g_2$. При этом мы существенно используем результаты § 1 и § 3.

§ 1. Построение последовательности, совместно нормальной с данной

Предварительно докажем следующее свойство нормальной последовательности

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3, \ldots . \tag{19}$$

Для любого натурального s можно указать такое натуральное $\Phi(s)$, что, какую бы s-членную комбинацию Δ_s мы ни взяли, при $P' - P'' > P''$ и $P'' > \Phi(s)$ справедливо неравенство:

$$\frac{N_{P'}(\Delta_s) - N_{P''}(\Delta_s)}{P' - P''} < c\,\frac{1}{g^s}, \tag{20}$$

где c — некоторая постоянная.

Действительно,

$$\frac{N_{P'}(\Delta_s) - N_{P''}(\Delta_s)}{P' - P''} = \frac{\dfrac{N_{P'}(\Delta_s)}{P'} - \dfrac{N_{P''}(\Delta_s)}{P'}}{1 - \dfrac{P''}{P'}} =$$

$$= \frac{\dfrac{N_{P'}(\Delta_s)}{P'} - \dfrac{N_{P''}(\Delta_s)}{P''}}{1 - \dfrac{P''}{P'}} + \frac{\dfrac{N_{P''}(\Delta_s)}{P''} - \dfrac{N_{P''}(\Delta_s)}{P'}}{1 - \dfrac{P''}{P'}} .$$

Согласно критерию сходимости Коши, существует такое $P(s, \Delta_s)$, что при всяких P' и P'', больших $P(s\Delta_s)$, выполняется неравенство:

$$\left| \frac{N_{P'}(\Delta_s)}{P'} - \frac{N_{P''}(\Delta_s)}{P''} \right| < \frac{1}{g^s} . \tag{21}$$

Так как данная последовательность нормальная, то найдется такое $\widetilde{P}(\Delta_s)$, что при всяком $P'' > \widetilde{P}(\Delta_s)$ имеем:

$$\frac{N_{P''}(\Delta_s)}{P''} < \frac{2}{g^s}. \qquad (22)$$

За $\Phi(s)$ примем наибольшее из чисел $\widetilde{P}(\Delta_s)$ и $P(s, \Delta_s)$, взятое по всем возможным Δ_s. Учитывая полученные неравенства (21) и (22), запишем:

$$\frac{N_{P'}(\Delta_s) - N_{P''}(\Delta_s)}{P' - P''} < \frac{1}{g^s} \frac{P'}{P' - P''} + \frac{N_{P''}(\Delta_s)}{P''} <$$

$$< \frac{1}{g^s}\left(1 + \frac{P''}{P' - P''}\right) + \frac{2}{g^s} < c\frac{1}{g^s},$$

где постоянная $c > 4$.

Осуществим построение; для этого мы будем «перекашивать» исходную последовательность все в большей и большей степени. В первой строчке каждого ряда записываем данную нормальную последовательность (19), а в последующих — последовательности, которые строим так, чтобы любые из них были совместно нормальны с данной и между собой, причем i-я последовательность по сравнению со второй последовательностью испытывает каждый раз перекос на $(i-1)r$ знаков, где r — величина перекоса во второй последовательности:

$$\left.\begin{array}{l}
\varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \ \varepsilon_{\Phi(2)-1}, \\
\varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \ \varepsilon_{\Phi(2)-1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \ \varepsilon_{\Phi(2)-1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \text{0 ряд}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\varepsilon_{\Phi(2)}, \ldots, \varepsilon_{2\Phi(2)}, \ \varepsilon_{2\Phi(2)+1}, \ldots, \varepsilon_{4\Phi(2)+2}, \ \varepsilon_{4\Phi(2)+3}, \ldots, \varepsilon_{\overline{\Phi(4)}-1}, \\
\varepsilon_{\Phi(2)+1}, \ldots, \varepsilon_{2\Phi(2)+1}, \ \varepsilon_{2\Phi(2)+2}, \ldots, \varepsilon_{4\Phi(2)+3}, \ \varepsilon_{4\Phi(2)+4}, \ldots, \varepsilon_{\overline{\Phi(4)}}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varepsilon_{\Phi(2)+i-1}, \ldots, \varepsilon_{2\Phi(2)+i-1}, \varepsilon_{2\Phi(2)+i}, \ldots, \varepsilon_{4\Phi(2)+i+1}, \varepsilon_{4\Phi(2)+i+2}, \ldots, \varepsilon_{\overline{\Phi(4)}+i-2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \text{1 ряд}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\varepsilon_{\overline{\Phi(4)}}, \ldots, \varepsilon_{2\overline{\Phi(4)}}, \ \varepsilon_{2\overline{\Phi(4)}+1}, \ldots, \varepsilon_{4\overline{\Phi(4)}+2}, \ \varepsilon_{4\overline{\Phi(4)}+3}, \ldots, \varepsilon_{\overline{\Phi(6)}-1}, \\
\varepsilon_{\overline{\Phi(4)}+2}, \ldots, \varepsilon_{2\overline{\Phi(4)}+2}, \ \varepsilon_{2\overline{\Phi(4)}+3}, \ldots, \varepsilon_{4\overline{\Phi(4)}+4}, \ \varepsilon_{4\overline{\Phi(4)}+5}, \ldots, \varepsilon_{\overline{\Phi(6)}+1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varepsilon_{\overline{\Phi(4)}+2i-2}, \ldots, \varepsilon_{2\overline{\Phi(4)}+2i-2}, \ \varepsilon_{2\overline{\Phi(4)}+2i-1}, \ldots \\
\qquad \ldots, \varepsilon_{4\overline{\Phi(4)}+2i}, \ \varepsilon_{4\overline{\Phi(4)}+2i+1}, \ldots, \varepsilon_{\overline{\Phi(6)}+2i-3} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \text{2 ряд}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

где

$$\overline{\Phi(2)} = \Phi(2),$$

$$\overline{\Phi(2k)} = 2^{\nu_k}\,\overline{\Phi(2k-2)} + 2^{\nu_k} - 1 \quad (k = 2, 3, 4, \ldots),$$

а ν_k — любое натуральное число, для которого

$$\Phi(2k) \leqslant 2^{\nu_k}\overline{\Phi(2k-2)} + 2^{\nu_k} - 2.$$

Тогда

$$\overline{\Phi(2k)} > \Phi(2k).$$

Докажем, что первые l строк образуют систему совместно нормальных последовательностей. Возьмем lk-столбцевую матрицу (k — фиксировано)

$$\overline{\Delta}_k = \begin{pmatrix} \Delta_k \\ \Delta_k^{(1)} \\ \vdots \\ \Delta_k^{(l-1)} \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$X = 2^{\nu}\Phi(2s) + 2^{\nu} - 1,$$

где $\nu = 0, 1, 2, \ldots, \nu_{s+1} - 1$. Обозначим через G_X число появлений $\overline{\Delta}_k$ в гусенице ранга ls длиной X выписанной системы последовательностей, и пусть $s \geqslant k$.

До номера $\overline{\Phi(2k)} - 1$ комбинация $\overline{\Delta}_k$ встретится какое-то количество раз. Обозначим это количество через L. Появление $\overline{\Delta}_k$ в s-м ряде означает, что в соответствующих местах гусеницы ранга ls исходной последовательности появится одна из $g^{l(s-k)}$ комбинаций такого вида:

$$\Big(\underbrace{\Delta_k, \ldots}_{s \text{ штук}}\ \underbrace{\Delta_k^{(1)}, \ldots}_{s \text{ штук}} \ldots \underbrace{\Delta_k^{(l-1)}, \ldots}_{s \text{ штук}}\Big)$$

(это справедливо, кроме, быть может, ls последних номеров ряда). На каждом участке, отделенном запятыми, такая комбинация, согласно определению функции $\Phi(s)$, встречается не более $\frac{cQ}{g^{ls}}$ раз, где Q — количество знаков на участке, поэтому количество появлений $\overline{\Delta}_k$ на этом участке будет не более

$$\frac{cQ}{g^{ls}}\, g^{l(s-k)} = \frac{cQ}{g^{lk}}.$$

Поэтому

$$G_X \leqslant L + \frac{cX}{g^{lk}} + O(s^l).$$

Величина $O(s^l)$ возникает на стыках рядов. Ясно, что $\frac{s^l}{X} \to 0$, ибо $X > c2^s$, где c — некоторая постоянная величина. Следовательно,

$$\varlimsup_{X\to\infty} \frac{G_X}{X} \leqslant \frac{c}{g^{lk}}.$$

Пусть

$$X_n \leqslant P < X_{n+1},$$

где $X_{n+1} = 2X_n + 1$. Тогда

$$\frac{N_P(\overline{\Delta}_k)}{P} < \frac{N_{X_{n+1}}(\overline{\Delta}_k)}{X_n} = \frac{N_{X_{n+1}}(\overline{\Delta}_k)}{X_{n+1}} \cdot \frac{X_{n+1}}{X_n}.$$

Так как $\frac{X_{n+1}}{X_n} \to 2$ при $P \to \infty$, то

$$\overline{\lim_{P\to\infty}} \frac{N_P(\overline{\Delta}_k)}{P} < \frac{2c}{g^{lk}}.$$

В силу доказанного во введении критерия, построенная таким путем система последовательностей является совместно нормальной.

§ 2. Решение одной задачи Н. М. Коробова о вполне равномерно распределенной последовательности

Пусть $g \geqslant 2$ — натуральное число, а

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3, \ldots \tag{23}$$

— данная нормальная последовательность, составленная из g знаков $0, 1, 2, \ldots, g-1$. Так же как в § 1, строим бесконечное количество последовательностей

$$\varepsilon_1^{(i)},\ \varepsilon_2^{(i)},\ \varepsilon_3^{(i)}, \ldots \quad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

так, что для любого натурального l система последовательностей

$$\begin{matrix} \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \varepsilon_3, & \ldots, \\ \varepsilon_1^{(1)}, & \varepsilon_2^{(1)}, & \varepsilon_3^{(1)}, & \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon_1^{(l-1)}, & \varepsilon_2^{(l-1)}, & \varepsilon_3^{(l-1)}, & \ldots \end{matrix} \tag{24}$$

является совместно нормальной.

ТЕОРЕМА. *Последовательность вещественных чисел*

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \ldots, \tag{25}$$

где

$$\alpha_j = 0, \varepsilon_j\, \varepsilon_j^{(1)} \varepsilon_j^{(2)} \ldots \quad \left(\alpha_j = \frac{\varepsilon_j}{g} + \frac{\varepsilon_j^{(1)}}{g^2} + \frac{\varepsilon_j^{(2)}}{g^3} \ldots\right),$$

является вполне равномерно распределенной последовательностью.

Доказательство. По определению вполне равномерно распределенной последовательности, достаточно доказать, что для любого $s \geqslant 1$ последовательность точек s-мерного единичного куба

$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3, \ldots, \tag{26}$$

где

$$Q_k = (\alpha_k,\ \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_{k+s-1}),$$

равномерно распределена в этом кубе.

Возьмем произвольное натуральное l и рассмотрим последовательность точек

$$Q_1^{(l)},\ Q_2^{(l)},\ Q_3^{(l)}, \ldots, \tag{27}$$

где

$$Q_k^{(l)} = (\alpha_k^{(l)},\ \alpha_{k+1}^{(l)}, \ldots, \alpha_{k+s-1}^{(l)}),$$

а число $\alpha_j^{(l)}$ определяется следующим образом:

$$\alpha_j^{(l)} = 0, \varepsilon_j\, \varepsilon_j^{(1)} \ldots \varepsilon_j^{(l-1)}.$$

Поскольку система последовательностей (24) является совместно нормальной, то в последовательности (27) каждая возможная точка $Q_k^{(l)}$ будет встречаться с асимптотической частотой $\frac{1}{g^{ls}}$.

Но встреча точки $Q_k^{(l)}$ означает, что соответствующая точка Q_k попадет в кубик, определенный системой неравенств

$$0,\, \varepsilon_j \varepsilon_j^{(1)} \ldots \varepsilon_j^{(l-1)} \leqslant \alpha_{k+\varkappa} \leqslant 0,\, \varepsilon_j \varepsilon_j^{(1)} \ldots \varepsilon_j^{(l-1)} + \frac{1}{g^l}$$

$$(\varkappa = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s-1). \tag{28}$$

Таким образом, количество попаданий точек последовательности (26) в любой кубик вида (28) имеет асимптотическую частоту, равную $\frac{1}{g^{ls}}$, т. е. равную объему куба (28). Но с любой степенью точности (взяв достаточно большое l) любой параллелепипед, лежащий в единичном кубе s-мерного пространства, можно аппроксимировать кубами вида (28). Теорема доказана.

§ 3. Построение последовательности, совместно вполне равномерно распределенной с данной

А. Г. Постников в работе ([6]) дал нижеследующий критерий для вполне равномерно распределенной последовательности.

Пусть для последовательности

$$\alpha = \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \ldots \tag{29}$$

существует константа c такая, что для любого натурального s и для любого параллелепипеда Δ_s, лежащего в единичном кубе с ребрами, параллельными координатным осям, выполняется неравенство:

$$\overline{\lim_{P\to\infty}} \frac{N_P(\Delta_s)}{P} < c\,|\Delta_s|,$$

где $N_P(\Delta_s)$ — число точек последовательности (12), попавших в Δ_s, и $|\Delta_s|$ — объем кубика в s-мерном пространстве. Тогда последовательность (29) вполне равномерно распределена.

Во введении мы дали определение системы последовательностей, совместно вполне равномерно распределенных.

Очевидно, что для системы двух последовательностей справедлив следующий критерий совместности вполне равномерного распределения.

Пусть для системы последовательностей

$$\begin{gathered}\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \ldots\\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3, \ldots\end{gathered} \tag{30}$$

существует постоянная c такая, что, какое бы натуральное s мы ни взяли, для любого кубика Δ_{2s} $2s$-мерного пространства для последовательности точек

$$\begin{gathered}Q_1^{(2s)},\ Q_2^{(2s)},\ Q_3^{(2s)}, \ldots,\\ Q_k^{(2s)} = (\alpha_k,\ a_{k+1}, \ldots, \alpha_{k+s-1},\ \beta_k,\ \beta_{k+1}, \ldots, \beta_{k+s-1}),\end{gathered} \tag{31}$$

выполняется неравенство:

$$\varlimsup_{P\to\infty} \frac{N_P(\Delta_{2s})}{P} < c\,|\Delta_{2s}|,$$

где $|\Delta_{2s}|$ — объем кубика $2s$-мерного пространства, $|\Delta_{2s}| = |\Delta_s|\cdot|\Delta_s'|$, $|\Delta_s|$ и $|\Delta_s'|$ — объемы кубиков s-мерного пространства, а $N_P(\Delta_{2s})$ — число точек последовательности (31), попавших в кубик Δ_{2s}. Тогда система последовательностей (30) совместно вполне равномерно распределена.

Пусть дана вполне равномерно распределенная последовательность

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots \tag{32}$$

Зададим любое натуральное s и построим последовательность точек в единичном кубе s-мерного пространства

$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ \ldots,$$

где

$$Q_k = (\alpha_k,\ \alpha_{k+1},\ \ldots,\ \alpha_{k+s-1}).$$

Возьмем, далее, произвольное натуральное N и разделим единичный куб s-мерного пространства на N^s равных кубов $\left(\text{каждый со стороной } \frac{1}{N}\right)$. Зафиксируем какой-либо из них и обозначим его через $\Delta_{s,N}$.

Докажем следующее предложение.

Для любых натуральных s и N можно указать такое натуральное $\Phi(s, N)$, что, какой бы кубик $\Delta_{s,N}$ мы ни взяли, при $P' - P'' > P''$ и $P'' > \Phi(s, N)$ справедливо неравенство:

$$\frac{N_{P'}(\Delta_{s,N}) - N_{P''}(\Delta_{s,N})}{P' - P''} < 4\,|\Delta_{s,N}|, \tag{33}$$

где $|\Delta_{s,N}|$ — объем кубика $\Delta_{s,N}$, а $N_P(\Delta_{s,N})$ — число точек последовательности (32), попавших в $\Delta_{s,N}$.

Действительно,

$$\frac{N_{P'}(\Delta_{s,N}) - N_{P''}(\Delta_{s,N})}{P' - P''} = \frac{\dfrac{N_{P'}(\Delta_{s,N})}{P'} - \dfrac{N_{P''}(\Delta_{s,N})}{P''}}{1 - \dfrac{P''}{P'}} +$$

$$+ \frac{\dfrac{N_{P''}(\Delta_{s,N})}{P''} - \dfrac{N_{P''}(\Delta_{s,N})}{P'}}{1 - \dfrac{P''}{P'}}.$$

По критерию сходимости Коши, существует такое $P(s, \Delta_{s,N})$, что при всяких P' и P'', больших $P(s, \Delta_{s,N})$, выполняется неравенство

$$\left|\frac{N_{P'}(\Delta_{s,N})}{P'} - \frac{N_{P''}(\Delta_{s,N})}{P''}\right| < |\Delta_{s,N}|. \tag{34}$$

Так как данная последовательность вполне равномерно распределена, то всегда найдется такое $\widetilde{P}(\Delta_{s,N})$, что при всяком $P'' > \widetilde{P}(\Delta_{s,N})$ будем иметь:

$$\frac{N_{P''}(\Delta_{s,N})}{P''} \leqslant 2\,|\Delta_{s,N}|. \tag{35}$$

За $\Phi(s, N)$ возьмем наибольшее из чисел $P(s, \Delta_{s,N})$ и $\widetilde{P}(\Delta_{s,N})$, взятое по всем возможным s и N. Учитывая неравенства (34) и (35), находим:

$$\frac{N_{P'}(\Delta_{s,N}) - N_{P''}(\Delta_{s,N})}{P' - P''} \leqslant |\Delta_{s,N}| \frac{P'}{P' - P''} + 2|\Delta_{s,N}| =$$
$$= |\Delta_{s,N}| \left(1 + \frac{P''}{P' - P''}\right) + 2|\Delta_{s,N}| < 4|\Delta_{s,N}|.$$

Осуществим построение; для этого мы будем «перекашивать» данную вполне равномерно распределенную последовательность все в большей и большей степени.

В первой строчке написана данная последовательность (31), а во второй — последовательность, которую мы строим так, чтобы она была совместно вполне равномерно распределена с данной:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \alpha_{\Phi(2)-1}, \\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \alpha_{\Phi(2)-1}, \end{array}\right\} 0 \text{ ряд}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{\Phi(2)}, \ldots\ \alpha_{2\Phi(2)},\ \ \alpha_{2\Phi(2)+1}, \ldots\ \alpha_{4\Phi(2)+2},\ \ \alpha_{4\Phi(2)+3}, \ldots\ \alpha_{\overline{\Phi(4)}-1}, \\ \alpha_{\Phi(2)+1}, \ldots\ \alpha_{2\Phi(2)+1},\ \ \alpha_{2\Phi(2)+2}, \ldots\ \alpha_{4\Phi(2)+3},\ \ \alpha_{4\Phi(2)+4}, \ldots\ \alpha_{\overline{\Phi(4)}}, \end{array}\right\} 1 \text{ ряд}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{\overline{\Phi(4)}}, \ldots\ \alpha_{2\overline{\Phi(4)}},\ \ \alpha_{2\overline{\Phi(4)}+1}, \ldots\ \alpha_{4\overline{\Phi(4)}+2},\ \ \alpha_{4\overline{\Phi(4)}+3}, \ldots\ \alpha_{\overline{\Phi(6)}-1}, \\ \alpha_{\overline{\Phi(4)}+2}, \ldots\ \alpha_{2\overline{\Phi(4)}+2},\ \ \alpha_{2\overline{\Phi(4)}+3}, \ldots\ \alpha_{4\overline{\Phi(4)}+4},\ \ \alpha_{4\overline{\Phi(4)}+5}, \ldots\ \alpha_{\overline{\Phi(6)}+1}, \end{array}\right\} 2 \text{ ряд}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

где

$$\overline{\Phi(2)} = \Phi(2),$$
$$\overline{\Phi(2s)} = 2^{\nu_s}\, \overline{\Phi(2s-2)} + 2^{\nu_s} - 1 \quad (s = 2, 3, 4, \ldots),$$

а ν_s — любое натуральное число, для которого

$$\Phi(2s) \leqslant 2^{\nu_s}\, \overline{\Phi(2s-2)} + 2^{\nu_s} - 2.$$

Тогда

$$\overline{\Phi(2s)} > \Phi(2s).$$

Докажем, что полученная таким путем система последовательностей вполне равномерно распределена.

Возьмем произвольное натуральное k и построим последовательность точек в единичном кубе $2k$-мерного пространства

$$\begin{gathered} Q_1^{(2k)},\ Q_2^{(2k)},\ Q_3^{(2k)}, \ldots, \\ Q_i^{(2k)} = (\alpha_i,\ \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{i+k-1},\ \alpha_{i'},\ \alpha_{i'+1}, \ldots, \alpha_{i'+k-1}), \end{gathered} \tag{36}$$

где первые k значений α_i взяты из первой последовательности, а k последних значений $\alpha_{i'}$ взяты из второй последовательности. Для доказательства будем рассматривать каждый s-й ряд как конечную последовательность точек $2s$-мерного пространства $(s = k, k+1, \ldots)$:

$$\begin{gathered} Q^{(2s)}_{\overline{\Phi(2s)}},\ Q^{(2s)}_{\overline{\Phi(2s)}+1}, \ldots Q^{(2s)}_{\overline{\Phi(2s+2)}-s-1}, \\ Q^{(2s)}_{\overline{\Phi(2s)}+j} = (\alpha_{\overline{\Phi(2s)}+j},\ \alpha_{\overline{\Phi(2s)}+j+1}, \ldots \alpha_{\overline{\Phi(2s)}+j+2s-1}). \end{gathered} \tag{37}$$

Возьмем произвольное натуральное N и разделим единичный куб $2s$-мерного пространства на N^{2s} частей ($s = k, k+1, \ldots$) (каждое ребро $2s$-мерного куба имеет длину $\frac{1}{N}$). Пусть

$$X = 2^{\nu_s}\overline{\Phi(2s)} + 2^{\nu_s} - 1,$$

где $s > k$. Возьмем в $2k$-мерном пространстве произвольный кубик $\overline{\Delta}_{k,N}$ ($|\overline{\Delta}_{k,N}| = \frac{1}{N^{2k}}$ — объем этого кубика) и введем следующие обозначения:

x_s — число точек последовательности (36), находящихся в s-м ряде,

$G_X(\overline{\Delta}_{k,N})$ — число точек последовательности (36), попавших в $\overline{\Delta}_{k,N}$,

$g_{x_s}(\overline{\Delta}_{k,N})$ — число точек x_s, попавших в $\overline{\Delta}_{k,N}$,

$g_s(\overline{\Delta}_{s,N})$ — число точек s-го ряда $2s$-мерного пространства, попавших в $\overline{\Delta}_{s,N}$.

До номера $\overline{\Phi(2k)} - 1$ пусть число точек из $\overline{\Delta}_{k,N}$ равно L.

Проектируем каждый кубик $2s$-мерного пространства на соответствующий кубик $2k$-мерного пространства. Получаемое таким путем соответствие не будет взаимно однозначным, так как каждому кубику $\Delta_{k,N}$ соответствует $N^{2(s-k)}$ кубиков $\Delta_{s,N}$. Следовательно, число точек, попавших в $\overline{\Delta}_{k,N}$, не более

$$g_s(\overline{\Delta}_{s,N})\, N^{2(s-k)}.$$

Согласно доказанному неравенству (33), имеем:

$$g_{x_s}(\overline{\Delta}_{k,N}) < 4\,|\overline{\Delta}_{s,N}|\, x_s N^{2(s-k)},$$

так как

$$g_s(\overline{\Delta}_{s,N}) < 4\,|\overline{\Delta}_{s,N}|\, x_s.$$

Ввиду того, что

$$|\overline{\Delta}_{s,N}| = \frac{1}{N^{2s}}, \quad |\overline{\Delta}_{k,N}| = \frac{1}{N^{2k}},$$

получаем:

$$g_{x_s}(\overline{\Delta}_{k,N}) < 4x_s N^{2(s-k)} \frac{1}{N^{2s}} = \frac{4x_s}{N^{2k}} = 4x_s\,|\overline{\Delta}_{k,N}|.$$

Поэтому

$$G_X(\overline{\Delta}_{k,N}) < L + 4X\,|\overline{\Delta}_{k,N}| + O(s^2).$$

Величина $O(s^2)$ возникает на стыках рядов. Имеем:

$$\frac{G_X(\overline{\Delta}_{k,N})}{X} < \frac{L}{X} + 4\,|\overline{\Delta}_{k,N}| + O\left(\frac{s^2}{X}\right).$$

Ясно, что $\frac{s^2}{X} \to 0$, так как $X > c2^s$, где c — некоторая постоянная величина, не зависящая от k и N. Поэтому

$$\overline{\lim_{X\to\infty}} \frac{G_X(\overline{\Delta}_{k,N})}{X} < 4\,|\overline{\Delta}_{k,N}|.$$

Пусть $X_n \leqslant P < X_{n+1}$, где $X_{n+1} = 2X_n + 1$. Тогда

$$\frac{N_p(\overline{\Delta}_{k,N})}{P} < \frac{N_{X_{n+1}}(\overline{\Delta}_{k,N})}{X_n} = \frac{N_{X_{n+1}}(\overline{\Delta}_{k,N})}{X_{n+1}} \frac{X_{n+1}}{X_n}.$$

Так как $\frac{X_{n+1}}{X_n} \to 2$ при $P \to \infty$, то

$$\overline{\lim_{P\to\infty}} \frac{N_P(\overline{\Delta}_{k,N})}{P} < 8 |\overline{\Delta}_{k,N}|.$$

Поскольку константа $c = 8$ не зависит от выбора N, то для любого параллелепипеда Δ_{2k} $2k$-мерного пространства, лежащего в единичном кубе с ребрами, параллельными координатным осям, будет справедливо соотношение:

$$\overline{\lim_{P\to\infty}} \frac{N_P(\overline{\Delta}_{2k})}{P} < 9 |\Delta_{2k}|.$$

По критерию совместной вполне равномерной распределенности, построенная таким путем система последовательностей совместно вполне равномерно распределена.

§ 4. Построение последовательности, совместно нормальной с данной (продолжение)

ТЕОРЕМА. *Пусть имеются две совместно вполне равномерно распределенные последовательности:*

$$\begin{matrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, \ldots, \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, \ldots, \end{matrix} \tag{38}$$

и пусть $g_1 \geqslant 2$ и $g_2 \geqslant 2$ — натуральные числа. Тогда последовательности

$$\begin{matrix} [\alpha_1 g_1], & [\alpha_2 g_1], & [\alpha_3 g_1], \ldots, \\ [\beta_1 g_2], & [\beta_2 g_2], & [\beta_3 g_2], \ldots \end{matrix} \tag{39}$$

— совместно нормальные.

Доказательство. Пусть

$$\Delta_s = \begin{pmatrix} \delta_1^{(1)}, & \delta_2^{(1)}, \ldots \delta_s^{(1)} \\ \delta_1^{(2)}, & \delta_2^{(2)}, \ldots \delta_s^{(2)} \end{pmatrix}$$

—какая-либо матрица, где $0 \leqslant \delta_k^{(i)} \leqslant g_i - 1$ $(i=1, 2)$, $\delta_k^{(i)}$ —натуральные.

Появление Δ_s на k-м месте последовательности (39) эквивалентно тому, что выполняются следующие неравенства:

$$\frac{\delta_{\varkappa+1}^{(1)}}{g_1} \leqslant \alpha_{k+\varkappa} \leqslant \frac{\delta_{\varkappa+1}^{(1)}+1}{g_1}, \quad \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, s-1,$$

$$\frac{\delta_{\mu+1}^{(2)}}{g_2} \leqslant \beta_{k+\mu} \leqslant \frac{\delta_{\mu+1}^{(2)}+1}{g_2}, \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots, s-1,$$

т. е. эквивалентно тому, что точка с координатами

$$(\alpha_k, \ldots \alpha_{k+s-1}, \beta_k, \ldots \beta_{k+s-1})$$

попадает в некоторый параллелепипед, лежащий в $2s$-мерном единичном кубе с объемом $\frac{1}{g_1^s}\frac{1}{g_2^s}$. Так как, по условию, система последовательностей (38) совместно вполне равномерно распределена, то это будет про-

исходить с асимптотической частотой, равной $\frac{1}{g_1^s g_2^s}$. Следовательно, Δ_s будет встречаться в гусенице последовательности (39) с асимптотической частотой $\frac{1}{g_1^s g_2^s}$, т. е. система последовательностей (39) совместно нормальная, что и требовалось доказать.

Из изложенного ясен способ построения последовательности, совместно нормальной с данной нормальной последовательностью g_1 знаков $0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, g_1 - 1$:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \tag{40}$$

причем требуется, чтобы вторая последовательность состояла из g_2 знаков $0, 1, 2, \ldots g_2 - 1$. Если $g_1 = g_2$, то этот способ был дан в § 1. Если $g_1 \neq g_2$, то по способу § 2 строим вполне равномерно распределенную последовательность

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \tag{41}$$

такую, что при любом $k = 1, 2, 3, \ldots$ $\varepsilon_k = [\alpha_k g_1]$. Далее, по способу § 3 строим последовательность

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \tag{42}$$

так, чтобы система последовательностей

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$
$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$$

была совместно вполне равномерно распределена. Наконец, достаточно положить $\delta_k = [\beta_k g_2]$ и тогда по последней теореме система последовательностей

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots,$$
$$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$$

будет совместно нормальной.

Задача решена для двух последовательностей. Аналогичным будет ее решение и в случае нахождения l последовательностей, совместно нормальных с данной, каждая из которых представляет собой бесконечную последовательность знаков $0, 1, 2, \ldots, g_k - 1$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, l)$.

Поступило
9. XII. 1957

ЛИТЕРАТУРА

1 Коробов Н. М., О некоторых вопросах равномерного распределения, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 14 (1950), 215—238.

2 Шапиро-Пятецкий И. И., О распределении дробных долей показательной функции, Ученые зап. МГПИ им. Ленина, т. 108, вып. 2 (1957), 317—322.

3 Постников А. Г., Пятецкий И. И., Нормальная по Бернулли последовательность знаков, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 21 (1957), 501—514.

4 Коробов Н. М., Числа с ограниченным отношением и их приложения к вопросам диофантовых приближений, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 19 (1955), 361—380.

5 Weyl H., Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math. Ann., 77 (1916), 313—352.

6 Постников А. Г., Критерий для вполне равномерно распределенной последовательности, Доклады Ак. наук СССР, 120, № 5 (1958), 973—976.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 771—810

И. М. ГАНЗБУРГ и А. Ф. ТИМАН

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ЛИПШИЦА, АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

(*Представлено академиком* **С. Л. Соболевым**)

В работе исследуются аппроксимативные свойства линейных процессов приближения функций, удовлетворяющих условию Липшица, алгебраическими многочленами.

§ 1. Введение

Настоящая работа посвящена исследованию линейных методов приближения функций, удовлетворяющих условию Липшица, алгебраическими многочленами. Такие процессы аппроксимации функций, заданных на конечном отрезке, обычно строятся на базе разложений в ряды П. Л. Чебышева.

Для определенности рассматриваются функции, заданные на отрезке $[-1,1]$.

Пусть $f(x)$ — произвольная непрерывная функция, заданная на $[-1,1]$,

$$\hat{T}_0(x)=\sqrt{\frac{1}{\pi}},\quad \hat{T}_k(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos k\arccos x \qquad (k=1,\ 2,\ldots) \tag{1.1}$$

— ортонормированная с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на $[-1,1]$ система полиномов Чебышева и

$$c_k=\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\,\hat{T}_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \tag{1.2}$$

— коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по этой системе.

Для любой системы чисел $\lambda_k^{(n)}$ $(k=0,1,\ldots,\ n;\ n=0,1,2,\ldots)$ рассмотрим последовательность многочленов

$$u_n(f,x,\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}c_k\hat{T}_k(x), \tag{1.3}$$

которые при $\lambda_k^{(n)}=1$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ldots,n)$ сводятся к обычным суммам $S_n(f,x)$ ряда П. Л. Чебышева для функции $f(x)$.

При исследовании многочленов (1.3) прежде всего возникает вопрос об условиях, при которых

$$\lim_{n\to\infty}u_n(f,x,\lambda)=f(x)$$

для любой непрерывной функции $f(x)$, а также вопрос о характере убывания к нулю отклонения $|f(x)-u_n(f,x,\lambda)|$ для тех или иных сово-

купностей функций $f(x)$. Здесь рассматриваются классы $H^{(\alpha)}$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ функций $f(x)$, удовлетворяющих условию Липшица степени α с константой единица, т. е. условию

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |x_1 - x_2|^\alpha, \quad x_1, x_2 \in [-1,1]. \tag{1.4}$$

Изучение второго из указанных вопросов сводится к рассмотрению верхней грани

$$\mathcal{E}_n(H^{(\alpha)}, x, \lambda) = \sup_{f \in H^{(\alpha)}} |f(x) - u_n(f, x, \lambda)| \tag{1.5}$$

и зависимости ее от структуры матрицы $\lambda_k^{(n)}$.

Случай $\alpha = 0$ соответствует функциям Лебега и исследуется в § 2 настоящей работы. На этом исследовании базируется рассмотрение первого вопроса.

§ 3 посвящен задаче об асимптотическом поведении верхней грани (1.4) для системы чисел

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{n - k - 1}{n - 1},$$

соответствующей средним арифметическим частных сумм $S_n(f, x)$ ряда П. Л. Чебышева.

При $\alpha = 1$ в § 4 для любых $n = 0, 1, 2, \ldots$ и $x \in [-1,1]$ дается точное значение этой верхней грани.

В § 5 вводятся в рассмотрение усеченные средние

$$\sigma_{n,p}(f, x) = \frac{1}{p+1} \sum_{\nu = n-p}^{n} S_\nu(f, x) \tag{1.6}$$

частных сумм $S_\nu(f, x)$ ряда П. Л. Чебышева и для них устанавливается асимптотическая оценка величины $\mathcal{E}_n(H^{(\alpha)}, x, \lambda)$ (случай $\alpha = 0$ рассматривался ранее в работе ([1])). Эта оценка используется в § 6 при исследовании произвольных линейных процессов аппроксимации функций классов $H^{(\alpha)}$. Установленная в § 6 теорема содержит ряд результатов, полученных ранее для некоторых конкретных систем $\lambda_k^{(n)}$ [см. ([6]), ([11]), ([3]), а также ([16]) при $r = 0$].

Аналогичные вопросы в периодическом случае рассматривались ранее в работе ([12]).

Отличительной особенностью исследуемого в настоящей работе непериодического случая является то обстоятельство, что величина верхней грани (1.5) зависит от положения точки x на рассматриваемом отрезке.

Заметим, что если класс $\mathfrak{M}$ функций, заданных на $[-1,1]$, вместе с любой функцией $f(x)$ содержит также и $f(-x)$, то при любом n верхняя грань

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}, x, \lambda) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} |f(x) - u_n(f, x, \lambda)|$$

есть четная функция от x. В самом деле, вводя обозначения:

$$K_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \cos kt, \quad y = \arccos x, \quad z = \pi - y \tag{1.7}$$

и принимая во внимание соотношения (1.1), (1.2) (1.3), (1.4) и (1.5),

получаем, что для некоторой последовательности функций $f_m(x)$ из класса $\mathfrak{M}$

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}, x, \lambda) = \sup_{f\in\mathfrak{M}} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t)\{K_n(t+y) + K_n(t-y)\}\,dt - f(\cos y) \right] =$$

$$= \sup_{f\in\mathfrak{M}} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \{f[\cos(t+y)] + f[\cos(t-y)] - 2f(\cos y)\} K_n(t)\,dt =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \{f_m[\cos(t+y)] + f_m[\cos(t-y)] - 2f_m(\cos y)\} K_n(t)\,dt =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \{f_m[-\cos(t+z)] + f_m[-\cos(t-z)] - 2f_m(-\cos z)\} K_n(t)\,dt.$$

С другой стороны, как нетрудно видеть,

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}, -x, \lambda) =$$

$$= \sup_{f\in\mathfrak{M}} \int_0^{\pi} \{f[-\cos(t+z)] + f[-\cos(t-z)] - 2f(-\cos z)\} K_n(t)\,dt.$$

Таким образом,

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}, x, \lambda) \leqslant \mathcal{E}_n(\mathfrak{M}, -x, \lambda).$$

Аналогично,

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}, -x, \lambda) \leqslant \mathcal{E}_n(\mathfrak{M}, x, \lambda)$$

и, следовательно, $\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}, x, \lambda)$ есть четная функция от x. Поэтому в дальнейшем, не ограничивая общности, можно считать, что $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Теоремы 1—6 принадлежат А. Ф. Тиману, теорема 7 — И. М. Ганзбургу, теоремы 8—11 получены совместно.

§ 2. Сходимость линейных процессов приближения алгебраическими многочленами и функции Лебега *

1. Вопрос о сходимости последовательности многочленов (1.3) в классе всех непрерывных на $[-1,1]$ функций $f(x)$ связан с исследованием поведения верхней грани (функции Лебега)

$$M_n(x) = \sup_{|f(x)|\leqslant 1} |u_n(f, x, \lambda)|. \tag{2.1}$$

Следующее предложение для довольно обширного класса матриц $\lambda_k^{(n)}$ и каждого x дает асимптотическую оценку снизу функции $M_n(x)$ при неограниченно возрастающем n.

ТЕОРЕМА 1. *Если строки матрицы $\lambda_k^{(n)}$ имеют равномерно ограниченную вариацию, т. е. если выполнено условие*

$$\sum_{k=0}^{n} \left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right| = O(1), \tag{2.2}$$

* Результаты этого параграфа были ранее опубликованы без доказательства в работе ([13]).

где $\Delta\lambda_k^{(n)} = \lambda_k^{(n)} - \lambda_{k+1}^{(n)}$, *то*

$$M_n(x) \geqslant \frac{4}{\pi^2} \left| L_n(1) - \{1 - |T_n(|x|)|\} L_n(|x|) \right|, \tag{2.3}$$

где

$$L_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{n-k}^{(n)}}{k} T_k(x), \quad T_k(x) = \cos k \arccos x, \tag{2.4}$$

а $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная относительно всех* $n = 1, 2, \ldots$ *и всех* $x \in [-1, 1]$.

Доказательство. Имеем:

$$M_n(x) = \sup_{|f(x)| \leqslant 1} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos t) \{K_n(t+y) + K_n(t-y)\} \, dt,$$

где $K_n(u)$ определено в (1.7).

Как уже отмечалось во введении, можно считать, что $0 \leqslant x \leqslant 1$, т. е. $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. Для каждого такого значения y определим последовательность функций

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \operatorname{sign} \sin n(y - t), & 0 \leqslant t \leqslant y, \\ \operatorname{sign} \sin n(t - y), & y \leqslant t \leqslant 2y, \\ \operatorname{sign} [\sin nt \cdot \cos ny], & 2y \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}$$

Очевидно,

$$M_n(x) \geqslant \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{\pi} \varphi_n(t) \{K_n(t+y) + K_n(t-y)\} \, dt \right| = | I_1, + I_2 + I_3 | ,$$

где

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{y} \varphi_n(t) [K_n(t+y) + K_n(t-y)] \, dt,$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_y^{2y} \varphi_n(t) [K_n(t+y) + K_n(t-y)] \, dt,$$

$$I_3 = \frac{1}{\pi} \int_{2y}^{\pi} \varphi_n(t) [K_n(t+y) + K_n(t-y)] \, dt.$$

Оценим каждый из этих интегралов:

$$I_1 = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{y} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\sin(2i+1)n(y-t)}{2i+1} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} [\cos k(y+t) + \cos k(y-t)] \right\} dt =$$

$$= \frac{2}{\pi^2} \int_0^{y} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} [\sin(n+k)(y-t) + \sin(n-k)(y-t)] \, dt +$$

$$+ \frac{2}{\pi^2} \int_0^{y} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \{\sin[(n+k)y - (n-k)t] + \sin[(n-k)y - (n+k)t]\} \, dt +$$

$$+ \frac{4}{\pi^2} \int_0^{y} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(2i+1)n(y-t)}{2i+1} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} [\cos k(y+t) + \cos k(y-t)] \, dt + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$I_2 = \frac{4}{\pi^2}\int_y^{2y}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\sin(2i+1)n(t-y)}{2i+1}\left\{1+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}[\cos k(y+t)+\cos k(y-t)]\right\}dt=$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\int_y^{2y}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}[\sin(n+k)(t-y)+\sin(n-k)(t-y)]\,dt+$$

$$+\frac{2}{\pi^2}\int_y^{2y}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}\{\sin[(n+k)t-(n-k)y]+\sin[(n-k)t-(n+k)y]\}\,dt+$$

$$+\frac{4}{\pi^2}\int_y^{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin(2i+1)n(t-y)}{2i+1}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}[\cos k(y+t)+\cos k(y-t)]\,dt+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$I_3=\frac{4\operatorname{sign}\cos ny}{\pi^2}\int_{2y}^{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\sin(2i+1)nt}{2i+1}\left\{1+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}[\cos k(y+t)+\cos k(y-t)]\right\}dt=$$

$$=\frac{2\operatorname{sign}\cos ny}{\pi^2}\int_{2y}^{\pi}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}\{\sin[(n+k)t+ky]+\sin[(n-k)t-ky]\}\,dt+$$

$$+\frac{2\operatorname{sign}\cos ny}{\pi^2}\int_{2y}^{\pi}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}\{\sin[(n+k)t-ky]+\sin[(n-k)t+ky]\}\,dt+$$

$$+\frac{4\operatorname{sign}\cos ny}{\pi^2}\int_{2y}^{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin(2i+1)nt}{2i+1}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}[\cos k(y+t)+\cos k(y-t)]\,dt+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда после вычисления интегралов находим, что

$$I_1=\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{n-k}^{(n)}\frac{1-\cos ky}{k}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^{(n)}\frac{\cos 2ky-\cos(n+k)y}{n-k}+O(1),$$

$$I_2=\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{n-k}^{(n)}\frac{1-\cos ky}{k}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^{(n)}\frac{\cos 2ky-\cos(n-3k)y}{n-k}+O(1),$$

$$I_3=\frac{2\operatorname{sign}\cos ny}{\pi^2}\left\{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}\frac{\cos(2n-3k)y+(-1)^{n-k}\cos ky}{n-k}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^{(n)}\frac{\cos(2n-k)y+(-1)^{n-k}\cos ky}{n-k}\right\}+O(1),$$

где $O(1)$ — величины, равномерно ограниченные относительно $n=1, 2,\ldots$ и всех y.

Если еще учесть соотношения:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^{(n)}\frac{(-1)^{n-k}\cos ky}{n-k}=O(1),$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^{(n)}\frac{\cos 2ky-\cos(n+k)y}{n-k}=O(1),$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}{}' \lambda_k^{(n)} \frac{\cos 2ky - \cos (n-3k) y}{n-k} = O(1),$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}{}' \lambda_k^{(n)} \frac{\cos (2n-3k) y + \cos (2n-k) y}{n-k} = 2 \cos ny \sum_{k=1}^{n}{}' \lambda_{n-k}^{(n)} \frac{\cos ky}{k} + O(1),$$

вытекающие из условий теоремы, то получим:

$$I_1 + I_2 + I_3 = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n}{}' \lambda_{n-k}^{(n)} \frac{1-\cos ky}{k} + \frac{4}{\pi^2} \cos ny \sum_{k=1}^{n}{}' \lambda_{n-k}^{(n)} \frac{\cos ky}{k} + O(1).$$

Следовательно, в наших обозначениях имеем:

$$M_n(x) \geqslant \frac{4}{\pi^2} \left| L_n(1) - \{1 - |T_n(|x|)|\} L_n(|x|) \right| + O(1), \tag{2.5}$$

и теорема доказана.

Заметим, что при любом фиксированном x $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ правая часть неравенства (2.5) для рассматриваемых процессов приближения ограничена тогда и только тогда, когда

$$L_n(1) = \sum_{k=1}^{n}{}' \frac{\lambda_{n-k}^{(n)}}{k} = O(1).$$

Это следует из того, что при фиксированном $y \left(0 < y \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$

$$L_n(|x|) = \left| \sum_{k=1}^{n}{}' \lambda_{n-k}^{(n)} \frac{\cos ky}{k} \right| = \left| - \sum_{k=1}^{n-1} \Delta\lambda_{n-k-1}^{(n)} \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\cos \nu y}{\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos \nu y}{\nu} \right| =$$

$$= O\left(\sum_{k=1}^{n-1} |\Delta\lambda_{n-k-1}^{(n)}| \right) = O(1).$$

В случае, если $L_n(1)$ не ограничено, возникает вопрос о выборе такой последовательности точек x_n, для которой указанная миноранта для $M_n(x_n)$ была бы ограниченной.

Из (2.5) следует, что для ограниченности $M_n(x_n)$ необходимо условие:

$$[1 - |T_n(|x_n|)|] L_n(|x_n|) = L_n(1) + O(1). \tag{2.6}$$

Если ограничиться рассмотрением матриц $\lambda_k^{(n)}$ с неотрицательными элементами, то можно установить необходимое условие, более эффективное, чем (2.6). В этом случае можно показать, что для слабой сходимости в пространстве непрерывных функций $f(x)$ последовательности линейных функционалов $u_n(f, x_n, \lambda)$ необходимо существование такой последовательности нечетных чисел $p = p(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, для которой

$$x_n = \cos\left[\frac{p\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{nL_n(1)}\right)\right], \tag{2.7}$$

$$L_n(|x_n|) = L_n(1) + O(1). \tag{2.8}$$

В самом деле, введя обозначение $y_n = \frac{p\pi}{2n} + \varepsilon_n$, где $p = p(n)$ принимает лишь нечетные значения, а $|\varepsilon_n| \leqslant \frac{\pi}{n}$, получим из (2.6), что $L_n(x_n) \geqslant 0$ (при условии $L_n(1) \neq O(1)$) и что

$$L_n(1) - L_n(|x_n|) = -|\cos ny_n| \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{n-k}^{(n)}}{k} \cos ky_n + O(1).$$

Так как $L_n(1) \geqslant L_n(|x_n|)$, то из последнего соотношения выводим:

$$|\cos ny_n| \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{n-k}^{(n)}}{k} \cos ky_n = O(1),$$

$$L_n(|x_n|) = L_n(1) + O(1),$$

т. е.

$$|\sin n\varepsilon_n| = O\left(\frac{1}{L_n(1)}\right),$$

или

$$x_n = \cos\left[\frac{p\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{nL_n(1)}\right)\right],$$

и необходимость условий (2.7) и (2.8) доказана.

В частном случае, когда $\lambda_k^{(n)} = 1$, для всех n и $0 \leqslant k \leqslant n$, этот результат был установлен в работе ([15]), где была также показана и достаточность этих условий.

Отметим, что в классе всех рассматриваемых здесь процессов приближения неравенство (2.3), полученное в теореме, не может быть улучшено.

Рассмотрим указанный выше случай, когда $\lambda_k^{(n)} = 1$. В этом случае правая часть неравенства (2.3) равна

$$\frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - \cos ky}{k} + \frac{4}{\pi^2} |\cos ny| \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos ky}{k} + O(1).$$

Но

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos ky}{k} = \min\left(\ln\frac{1}{y},\ \ln n\right) + O(1) \quad (0 \leqslant y \leqslant \pi). \tag{2.9}$$

В самом деле,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos ky}{k} = \ln n - \int_0^y \sum_{k=1}^{n} \sin kx\, dx + O(1) =$$

$$= \ln n - \int_0^y \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\, dx + O(1),$$

$$\int_0^y \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\, dx = 2\int_0^y \frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{x}\, dx + O(1) =$$

$$= 2\int_0^{\frac{ny}{2}} \frac{\sin^2 t}{t}\, dt + O(1) = \ln(1 + ny) + O(1).$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos ky}{k} = \ln\frac{n}{1 + ny} + O(1),$$

и равенство (2.9) доказано.

Таким образом, правая часть неравенства (2.3) равна

$$\frac{4}{\pi^2}\left|\ln n - (1 - |\cos ny|)\ln\frac{n}{1 + ny}\right| + O(1) =$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\left|\ln(1 + ny) + |\cos ny| \ln\frac{n}{1 + ny}\right| + O(1),$$

что, как известно [см. ([14])], асимптотически равняется $M_n(x)$.

Более того, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. *Если* $\lambda_k^{(n)} = O(1)$ *и* $\Delta^2 \lambda_k^{(n)} = \lambda_k^{(n)} - 2\lambda_{k+1}^{(n)} + \lambda_{k+2}^{(n)} \leqslant 0$ *или* $\Delta^2\lambda_k^{(n)} \geqslant 0$, *то при* $n \to \infty$

$$M_n(x) = \frac{4}{\pi^2} \left| L_n(1) - \{1 - |T_n(|x|)|\} L_n(|x|) \right| + O(1), \tag{2.10}$$

где $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная относительно* x $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ *и* n.

Доказательство. Для доказательства теоремы 2 достаточно установить неравенство, обратное к (2.3).

Рассмотрим функцию

$$u_n(f, x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k^{(n)} c_k \hat{T}_k(x).$$

Применяя преобразование Абеля, получим:

$$u_n(f, x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n+1} \Delta\lambda_k^n S_k(f, x) = \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_{n-k}^{(n)} S_{n-k}(f, x),$$

где $S_k(f, x)$ — сумма ряда П. Л. Чебышева порядка k для $f(x)$.

Применим вторично преобразование Абеля; тогда

$$u_n(f, x, \lambda) = -\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, \sigma_{n,k}(f, x)\, \Delta^2\lambda_{n-k-1}^{(n)} + \Delta\lambda_0^{(n)} \sigma_{n,n}(f, x) =$$

$$= -\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \Delta^2\lambda_{n-k-1}^{(n)} (k+1)\, \sigma_{n,k}(f, x) +$$

$$+ \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n-1} (n-k)\, \sigma_{n-k-1,\, n-k-1}(f, x)\, \Delta^2\lambda_{n-k-1}^{(n)} -$$

$$- \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n-1} \sigma_{n,n}(f, x)\, \Delta^2\lambda_{n-k-1}^{(n)} + (n+1)\, \Delta\lambda_0^{(n)} \sigma_{n,n}(f, x) =$$

$$\begin{aligned} &= -\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \Delta^2\lambda_{n-k-1}^{(n)} (k+1)\, \sigma_{n,k}(f, x) + \\ &+ \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n-1} (n-k)\, \sigma_{n-k-1,\, n-k-1}(f, x)\, \Delta^2\lambda_{n-k-1}^{(n)} - \\ &- \Delta\lambda^{(n)}_{n-\left[\frac{n}{2}\right]-1} (n+1)\, \sigma_{n,n}(f, x), \end{aligned} \tag{2.11}$$

где $\sigma_{n,k}(f, x)$ определены в (1.7). Учитывая соотношения

$$\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n-1} (n-k)\, \Delta^2\lambda_{n-k-1}^{(n)} = O(1), \qquad n\Delta\lambda^{(n)}_{n-\left[\frac{n}{2}\right]-1} = O(1)$$

и неравенство $|\sigma_{m,m}(f, x)| \leqslant 1$ $(|f(x)| \leqslant 1)$, а также используя асимптотическую оценку [см. ([1])]

$$\sup_{|f(x)| \leqslant 1} |\sigma_{n,k}(f, x)| = \frac{4}{\pi^2} \left\{ \ln \frac{1+ny}{1+(k+1)y} + |\cos ny| \ln \frac{y + \frac{1}{k+1}}{y + \frac{1}{n}} \right\} + O(1),$$

находим из (2.11):

$$M_n(x) \leqslant \frac{4}{\pi^2}\left|\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(k+1)\,|\,\Delta^2\lambda_{n-k-1}^{(n)}\,|\left\{\ln\frac{n}{k+1}-(1-|\cos ny|)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\ln\frac{y+\frac{1}{k+1}}{y+\frac{1}{n}}\right\}\right|+O(1).$$

Из (2.9) после преобразований Абеля следует:

$$M_n(x) \leqslant \frac{4}{\pi^2}\left|\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(k+1)\,|\,\Delta^2\lambda_{n-k-1}^{(n)}\,|\left\{\sum_{\nu=k+1}^{n}\frac{1}{\nu}+O(1)\right\}-\right.$$
$$\left.-\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(k+1)\,|\,\Delta^2\lambda_{n-k-1}^{(n)}\,|\left\{\sum_{\nu=k+1}^{n}\frac{\cos\nu y}{\nu}+O(1)\right\}\right|+O(1)=$$
$$=\frac{4}{\pi^2}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_{n-k}^{(n)}}{k}-(1-|\cos ny|)\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_{n-k}^{(n)}}{k}\cos ky\right|+O(1), \qquad (2.12)$$

что вместе с соотношением (2.3) равносильно (2.10).

2. Укажем некоторые приложения приведенных в п. 1 результатов к тригонометрическим рядам Фурье.

Пусть $f(x)$ — непрерывная периода 2π функция, а

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

— ее ряд Фурье. Пусть, кроме того, рассматривается треугольная матрица чисел $\lambda_k^{(n)}$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n+1;\ \lambda_0^{(n)}=1;\ \lambda_{n+1}^{n}=0)$, определяющая линейный метод суммирования

$$\widetilde{u}_n(f, x, \lambda)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}(a_k\cos kx+b_k\sin kx). \qquad (2.13)$$

Одной из важных задач в теории суммирования рядов Фурье является задача об установлении эффективных необходимых и достаточных условий, которым должна удовлетворять матрица $\lambda_k^{(n)}$ для того, чтобы $\widetilde{u}_n(f, x, \lambda)\to f(x)$ при $n\to\infty$ для любой непрерывной периода 2π функции $f(x)$.

С. М. Никольский (7) указал условие, которое, будучи необходимым, в общем случае еще не являлось достаточным. Впоследствии Б. Надь (5) указал некоторые достаточные условия. Что касается эффективных условий, являющихся одновременно необходимыми и достаточными, то они были найдены С. М. Никольским (7) для класса матриц $\lambda_k^{(n)}$, каждая строка которых образует выпуклую или вогнутую систему чисел.

Эти условия выражались тремя соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}&1)\ \lambda_k^{(n)}\to 1, \quad n\to\infty,\\ &2)\ \lambda_k^{(n)}=O(1),\\ &3)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_{n-k}^{(n)}}{k}=O(1).\end{aligned}\right\} \qquad (2.14)$$

Из теоремы 2 вытекают необходимые и достаточные условия для более широкого класса матриц $\mu_k^{(n)}$,

$$\mu_k^{(n)} = \lambda_k^{(n)} \cos k\alpha_n, \tag{2.15}$$

где α_n — произвольная последовательность чисел, а $\lambda_k^{(n)}$ ($k = 0, 1, \ldots, n+1$; $\lambda_0^{(n)} = 1$; $\lambda_{n+1}^{(n)} = 0$) при каждом фиксированном n образуют выпуклую или вогнутую систему чисел.

Выбор последовательности $\alpha_n \equiv 0$ соответствует классу матриц, для которых исчерпывающее решение задачи дают условия (2.14).

Следующая теорема дает для рассматриваемого класса методов суммирования рядов Фурье асимптотическое поведение соответствующих констант Лебега.

Без ограничения общности можно считать, что $|\alpha_n| \leqslant \frac{\pi}{2}$.

ТЕОРЕМА 3. *Если матрица* $\{\mu_k^{(n)}\}$ *определена равенствами* (2.1), *причем система чисел* $\lambda_k^{(n)}$ ($\lambda_0^{(n)} = 1$, $\lambda_{n+1}^{(n)} = 0$) *при каждом фиксированном* n *выпукла или вогнута*, $\mu_k^{(n)} = O(1)$, *то для любой последовательности* $\{\alpha_n\}$, $|\alpha_n| \leqslant \frac{\pi}{2}$ *при* $n \to \infty$, *справедливо равенство*:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \cos kt \right| dt =$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \left| L_n(1) - (1 - |\cos n\alpha_n|) L_n(\cos \alpha_n) \right| + O(1), \tag{2.16}$$

где

$$L_n(\cos \alpha_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{n-k}^{(n)}}{k} \cos k\alpha_n,$$

а $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная относительно* n *и всех последовательностей* $\{\alpha_n\}$, $\left(|\alpha_n| \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

В частности, для случая $\alpha_n = O(1)$ получаем

Следствие. *Если* $\lambda_k^{(n)} = O(1)$ *и каждая строка матрицы* $\lambda_k^{(n)}$ *выпукла или вогнута, то*

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \cos kt \right| dt = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{n-k}^{(n)}}{k} + O(1). \tag{2.17}$$

Из теоремы 3 вытекает

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы в каждой точке* x

$$\lim_{n \to \infty} \widetilde{u}_n(f, x, \mu) = f(x),$$

где матрица $\{\mu_k^{(n)}\}$, *определяющая метод* $\widetilde{u}_n(f, x, \mu)$, *удовлетворяет условиям теоремы* 3, *а* $f(x)$ — *любая непрерывная функция периода* 2π, *необходимо и достаточно выполнение условий*:

1) $\mu_k^{(n)} \to 1$ *при* $n \to \infty$,

2) $\mu_k^{(n)} = O(1)$,

3) $(1 - |\cos n\alpha_n|) L_n(\cos \alpha_n) = L_n(1) + O(1)$.

Как это следует из п. 1, в случае, если строки матрицы $\lambda_k^{(n)}$ выпуклы кверху, то условие 3) можно заменить следующими двумя условиями:

3′) существует последовательность нечетных чисел $p=p(n)$ $(n=1,2,3,\ldots)$, для которой

$$\alpha_n = \frac{p\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{nL_n(1)}\right),$$

3″) $L_n(\cos\alpha_n) = L_n(1) + O(1)$.

Заметим, что если $\lambda_k^{(n)} = 1$, то для всех n и k $(0 \leqslant k \leqslant n)$ имеем:

$$L_n(1) = \ln n + O(1),$$

и условие 3″) равносильно требованию ограниченности функции $p=p(n)$.

§ 3. Приближение средними арифметическими частных сумм ряда П. Л. Чебышева

В настоящем параграфе рассматривается приближение функций $f(x) \in H^{(\alpha)}$ (см. введение) последовательностью многочленов $\sigma_{n,n}(f, x)$ [см. (1.6)], представляющих собой средние арифметические частных сумм $S_k(f, x)$ ряда П. Л. Чебышева $\left(\text{случай } \lambda_k^{(n)} = \frac{n-k+1}{n+1}\right)$.

Следующая теорема устанавливает асимптотическое поведение величины

$$\mathscr{E}_{\sigma_n}^{(\alpha)}(x) = \sup_{f \in H^{(\alpha)}} |f(x) - \sigma_{n,n}(f, x)|. \tag{3.1}$$

ТЕОРЕМА 5. *Для любого* $0 < \alpha \leqslant 1$ *справедливо соотношение*:

$$\mathscr{E}_{\sigma_n}^{(\alpha)}(x) = \frac{2\Gamma(\alpha)}{\pi(1-\alpha)} \sin\frac{\alpha\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^\alpha + o\left[\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^\alpha\right] + \delta_n^{(\alpha)}(x), \tag{3.2}$$

если $0 < \alpha < 1$, *и*

$$\mathscr{E}_{\sigma_n}^{(\alpha)}(x) = \frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\ln n + O\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right) + \delta_n^{(1)}(x), \tag{3.3}$$

если $\alpha = 1$, *равномерно относительно* $x \in [-1, 1]$, *где для* $|x| \leqslant 1$

$$\left.\begin{aligned}
\delta_n^{(\alpha)}(x) &= O\left(\frac{|x|^\alpha}{n^{2\alpha}}\right), && \text{если } 0 < \alpha < \tfrac{1}{2},\\
\delta_n^{(\alpha)}(x) &= O\left(\frac{|x|^\alpha}{n}\right), && \text{если } \alpha > \tfrac{1}{2},\\
\delta_n^{(\frac{1}{2})}(x) &= O\left(\sqrt{|x|}\frac{\ln n}{n}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

При этом:

$$\left.\begin{aligned}
\delta_n^{(\alpha)}(\pm 1) &= \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(2\alpha)\sin\alpha\pi}{(1-2\alpha)\pi}\cdot\frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right), && \text{если } 0 < \alpha < \tfrac{1}{2},\\
\delta_n^{(\alpha)}(\pm 1) &= \frac{2^\alpha}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin u)^{2\alpha-2}\,du + \varepsilon_n^{(\alpha)}, && \text{если } \alpha > \tfrac{1}{2},\\
\delta_n^{(\frac{1}{2})}(\pm 1) &= \frac{\sqrt{2}}{n\pi}\ln n + \frac{\sqrt{2}(C + 2\ln 2)}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

где $\varepsilon_n^{(\alpha)} = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $\varepsilon_n^{(1)} = -\frac{1}{n(n+1)}$, *а* C — *постоянная Эйлера.*

Доказательство. Как следует из (1.6),

$$\sigma_{n,n}(f, x) = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} S_\nu(f, x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi(n+1)}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t)\{F_n(t+y) + F_n(t-y)\}\,dt, \tag{3.6}$$

где $y = \arccos x$ и $F_n(u)$ есть ядро Фейера, т. е.

$$F_n(u) = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} u}{2(n+1)\sin^2 \frac{u}{2}}. \tag{3.7}$$

В силу (1.4), имеем:

$$|f(x) - \sigma_{n,n}(f, x)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(\cos t) - f(\cos y)]\{F_n(t+y) + F_n(t-y)\}dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\cos t) - f(\cos y)| \{F_n(t+y) + F_n(t-y)\}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos t - \cos y|^\alpha \{F_n(t+y) + F_n(t-y)\}\, dt. \tag{3.8}$$

Это неравенство обращается в точное равенство для функции

$$f^*(u) = \begin{cases} (x-u)^\alpha, & -1 \leqslant u \leqslant x, \\ (u-x)^\alpha, & x \leqslant u \leqslant 1, \end{cases}$$

принадлежащей классу $H^{(\alpha)}$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$. Поэтому из (3.8) и (3.1) следует:

$$\mathscr{E}^{(\alpha)}_{\sigma_n}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos t - \cos y|^\alpha \{F_n(t+y) + F_n(t-y)\}\, dt. \tag{3.9}$$

Рассмотрим интеграл

$$I_n(\pm y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos t - \cos y|^\alpha F_n(t \pm y)\, dt. \tag{3.10}$$

В силу (3.7) и периодичности подынтегральной функции,

$$I_n(\pm y) = \frac{2^{\alpha-1}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\sin \frac{t \mp y}{2}\right|^\alpha \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}(t \pm y)}{2(n+1)\left|\sin \frac{t \pm y}{2}\right|^{2-\alpha}}\, dt =$$

$$= \frac{2^{\alpha-2}}{(n+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\sin \frac{t \mp 2y}{2}\right|^\alpha \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{\left|\sin \frac{t}{2}\right|^{2-\alpha}}\, dt,$$

т. е.

$$I_n(\pm y) = \frac{2^{\alpha-1}}{(n+1)\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin t \cdot \cos y \mp \cos t \cdot \sin y|^\alpha \frac{\sin^2 (n+1) t}{|\sin t|^{2-\alpha}}\, dt. \tag{3.11}$$

Учитывая, что

$$|u \pm v|^\alpha = |u|^\alpha + \theta |v|^\alpha \quad (-1 \leqslant \theta \leqslant 1), \tag{3.12}$$

получим:

$$I_n(\pm y) = \frac{(2\sin y)^\alpha}{\pi(n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^\alpha \frac{\sin^2(n+1)t}{(\sin t)^{2-\alpha}}\, dt + \theta \cdot \frac{|2\cos y|^\alpha}{\pi(n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(n+1)t}{(\sin t)^{2-2\alpha}}\, dt. \tag{3.13}$$

Из (3.12) при некотором θ_1, $|\theta_1| \leqslant 2^\alpha$, получаем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|^\alpha \frac{\sin^2(n+1)t}{(\sin t)^{2-\alpha}}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(n+1)t}{(\sin t)^{2-\alpha}}\,dt + \theta_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha} \frac{\sin^2(n+1)t}{(\sin t)^{2-\alpha}}\,dt. \quad (3.14)$$

Из соотношения

$$\frac{1}{|\sin u|^{2-\alpha}} - \frac{1}{|u|^{2-\alpha}} = O(1) \quad \left(\alpha \geqslant 0,\ |u| \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

находим:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha} \frac{\sin^2(n+1)t}{(\sin t)^{2-\alpha}}\,dt \leqslant \frac{1}{4^\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(n+1)t}{t^{2-3\alpha}}\,dt + O(1) = \frac{1}{4^\alpha (n+1)^{3\alpha-1}} \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{t^{2-3\alpha}}\,dt + O(1). \quad (3.15)$$

Если к тому же учесть, что

$$\int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{t^{2-3\alpha}}\,dt = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^{2-3\alpha}}\,dt + o(1) & \text{при } \alpha < \frac{1}{3}, \\ O(\ln n) & \text{при } \alpha = \frac{1}{3}, \\ O(n^{3\alpha-1}) & \text{при } \alpha > \frac{1}{3}, \end{cases}$$

а

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(n+1)t}{(\sin t)^{2-\alpha}}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(n+1)t}{t^{2-\alpha}}\,dt + O(1) = \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{t^{2-\alpha}}\,dt + O(1),$$

причем [см. (9)] в случае $0 < \alpha < 1$ последний интеграл равен

$$\frac{\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}}{(1-\alpha)\,2^\alpha n^{\alpha-1}} + o(n^{1-\alpha}),$$

а при $\alpha = 1$ равен

$$\frac{1}{2}\ln n + O(1),$$

то получаем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|^\alpha \frac{\sin^2(n+1)t}{(\sin t)^{2-\alpha}}\,dt = \frac{\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}}{2^\alpha(1-\alpha)\,n^{\alpha-1}} + o(n^{1-\alpha}) \quad (0 < \alpha < 1), \quad (3.16)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|^\alpha \frac{\sin^2(n+1)t}{(\sin t)^{2-\alpha}}\,dt = \frac{1}{2}\ln n + O(1) \quad (\alpha = 1). \quad (3.17)$$

Введем обозначение:

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{(\sin t)^{2-2\alpha}}\, dt.$$

Очевидно, что при $\alpha > \frac{1}{2}$, в силу леммы Римана — Лебега [см. ([18])],

$$a_n = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2\alpha-2}\, dt + o(1). \tag{3.18}$$

Если $\alpha = \frac{1}{2}$, то

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{\sin t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=1}^{n} \sin(2k-1)\, t\, dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}(C + 2\ln 2),$$

где C — постоянная Эйлера.

В случае $\alpha < \frac{1}{2}$ находим:

$$a_n = \frac{1}{n^{2\alpha-1}} \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{t^{2-2\alpha}}\, dt + O(1) = \frac{1}{n^{2\alpha-1}} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{2-2\alpha}}\, dt + o(n^{1-2\alpha}) =$$

$$= \frac{\Gamma(2\alpha)\sin\alpha\pi}{2^{2\alpha}(1-2\alpha)\, n^{2\alpha-1}} + o(n^{1-2\alpha}). \tag{3.19}$$

Из равенств (3.13), (3.16)—(3.19) следует, что

$$I_n(\pm y) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}}{\pi(1-\alpha)} \cdot \dfrac{|\sin y|^{\alpha}}{n^{\alpha}} + o\left(\dfrac{|\sin y|^{\alpha}}{n^{\alpha}}\right) + \delta_n^{(\alpha)}(x) & (0 < \alpha < 1), \\ \dfrac{|\sin y|}{\pi}\, \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{|\sin y|}{n}\right) + \delta_n^{(1)}(x) & (\alpha = 1), \end{cases}$$

где $\delta_n^{(\alpha)}(x)$ определены в (3.4). Из (3.11) и тех же равенств непосредственно следует (3.5). Это завершает доказательство теоремы.

Из теоремы вытекает

Следствие. *Для любой функции $f(x) \in H^{(1)}$ и любого $n = 1, 2, 3, \ldots$ имеет место неравенство*

$$|f(\pm 1) - \sigma_{n,n}(f, \pm 1)| \leqslant \frac{1}{n+1}. \tag{3.20}$$

Неравенство (3.20) точно.

§ 4. Точная оценка отклонения при приближении функций класса Lip 1 средними арифметическими частных сумм ряда П. Л. Чебышева

Имеет место следующее предложение, дающее точную оценку величины

$$\mathscr{E}_{\sigma_n}^{(1)}(x) = \sup_{f \in H^{(1)}} |f(x) - \sigma_{n,n}(f, x)|.$$

ТЕОРЕМА 6. *Для каждого $x \in [-1, 1]$ и любого $n = 1, 2, 3, \ldots$ справедливо равенство:*

$$\mathscr{E}_{\sigma_n}^{(1)}(x) = \sqrt{1-x^2}\, P_{2n}(x) + \frac{x}{\pi(n+1)}(\pi - 2\arccos x), \tag{4.1}$$

где $P_{2n}(x)$ *есть алгебраический многочлен степени* $2n$, *равный*

$$P_{2n}(x) = \frac{2}{\pi(n+1)}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1-T_{2k}(x)}{k} + \frac{T_n(x)\,T'_{n+1}(x)}{(n+1)^2}\right\}. \tag{4.2}$$

Кроме того, при любом $x \in [-1, 1]$ *существует функция, для которой* $|f(x) - \sigma_{n,n}(f, x)|$ *в точности равно правой части* (4.2) *.

Из формулы (4.2) непосредственно вытекает указанное в конце § 3 следствие 1, а также

Следствие 2. *В центре сегмента* $[-1, 1]$ *для любой функции* $f(x) \in H^{(1)}$ *и любого* $n = 1, 2, \ldots$ *справедливо неравенство*

$$|f(0) - \sigma_{n,n}(f, 0)| \leqslant \frac{2}{\pi(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1+(-1)^{k+1}}{k} + \frac{\theta_{n+1}}{n+1}, \tag{4.3}$$

где $\theta_n = 0$ *при* n *нечетном и* $\theta_n = 1$ *при* n *четном. Неравенство* (4.3) *точно.*

Доказательство теоремы. Из (3.9) и тождества

$$F_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{n-k+1}{n+1}\cos ku \tag{4.4}$$

находим, что при $y = \arccos x$

$$\mathscr{E}^{(1)}_{\sigma_n}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^y(\cos t - \cos y)\left\{1 + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1-k}{n+1}\cos kt\cdot\cos ky\right\}dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_y^{\pi}(\cos y - \cos t)\left\{1 + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1-k}{n+1}\cos kt\cdot\cos ky\right\}dt. \tag{4.5}$$

Рассмотрим четыре интеграла:

$$I_1 = \int_0^y \cos t\left\{1 + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1-k}{n+1}\cos kt\cdot\cos ky\right\}dt,$$

$$I_2 = \int_0^y \left\{1 + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1-k}{n+1}\cos kt\cdot\cos ky\right\}dt,$$

$$(4.6)$$

$$I_3 = \int_y^{\pi} \left\{1 + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1-k}{n+1}\cos kt\cdot\cos ky\right\}dt,$$

$$I_4 = \int_y^{\pi} \cos t\left\{1 + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1-k}{n+1}\cos kt\cdot\cos ky\right\}dt.$$

* Для сравнения оценки (4.1) с (3.3) см. (2.9).

Имеем:

$$I_1 = \sin y + \int_0^y \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{n+1} \cos ky \{\cos(k-1)t + \cos(k+1)t\}\, dt =$$
$$= \sin y + \frac{n}{n+1} \cos y \left(y + \frac{1}{2} \sin 2y\right) +$$
$$+ \sum_{k=2}^{n} \frac{n+1-k}{n+1} \cos ky \left[\frac{\sin(k-1)y}{k-1} + \frac{\sin(k+1)y}{k+1}\right],$$

$$I_2 = y + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{k(n+1)} \cos ky \cdot \sin ky,$$

$$I_3 = \pi - y - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{n+1} \cos ky \cdot \sin ky,$$

$$I_4 = -\sin y + \int_y^{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{n+1} \cos ky [\cos(k-1)t + \cos(k+1)t]\, dt =$$
$$= -\sin y + \frac{n}{n+1} \cos y \left(\pi - y - \frac{1}{2} \sin 2y\right) -$$
$$- \sum_{k=2}^{n} \frac{n-k+1}{n+1} \cos ky \left[\frac{\sin(k-1)y}{k-1} + \frac{\sin(k+1)y}{k+1}\right].$$

Из этих равенств, а также из соотношений (4.5) и (4.6) следует, что

$$\mathscr{E}^{(1)}_{\sigma_n}(x) = \frac{2}{\pi} \sin y + \frac{n}{\pi(n+1)} (2y - \pi) \cos y +$$
$$+ \frac{1}{\pi}(\pi - 2y) \cos y + \frac{n}{\pi(n+1)} \cos y \cdot \sin 2y +$$
$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{n} \frac{n+1-k}{n+1} \cos ky \left[\frac{\sin(k-1)y}{k-1} + \frac{\sin(k+1)y}{k+1}\right] -$$
$$- \frac{4}{\pi} \cos y \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{(n+1)k} \cos ky \cdot \sin ky,$$

или

$$\mathscr{E}^{(1)}_{\sigma_n}(x) = \frac{2}{\pi} \sin y + \frac{1}{\pi(n+1)} (\pi - 2y) \cos y -$$
$$- \frac{n}{(n+1)\pi} \cos y \cdot \sin 2y + \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{n} \frac{n-k+1}{n+1} \cos ky \Delta_k^{(2)} \left(\frac{\sin ky}{k}\right) +$$
$$+ \frac{2}{\pi(n+1)} (1 - \cos y) \sum_{k=2}^{n} \frac{n+1-k}{k} \sin 2ky, \tag{4.7}$$

где, как обычно,

$$\Delta_k^{(2)} \left(\frac{\sin ky}{k}\right) = \frac{\sin(k-1)y}{k-1} - 2\frac{\sin ky}{k} + \frac{\sin(k+1)y}{k+1}.$$

Воспользуемся дважды тождеством

$$\sum_{k=2}^{n} u_k \Delta_k^{(2)} v_k = \sum_{k=2}^{n} v_k \Delta_k^{(2)} u_k + u_2 v_1 - u_1 v_2 + u_n v_{n+1} - u_{n+1} v_n. \tag{4.8}$$

Полагая последовательно

$$u_k = \cos ky, \qquad v_k = \frac{\sin ky}{k},$$

$$u_k = k\cos ky, \quad v_k = \frac{\sin ky}{k},$$

получим:

$$\sum_{k=2}^{n} \cos\, ky\, \Delta_k^{(2)}\left(\frac{\sin ky}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} \frac{\sin ky}{k}\Delta_k^{(2)}(\cos ky) + \\ + \sin y \cdot \cos 2y - \frac{1}{2}\cos y \cdot \sin 2y + \\ + \frac{1}{n+1}\cos ny \cdot \sin(n+1)\, y - \frac{1}{n}\cos(n+1)\, y \cdot \sin ny, \tag{4.9}$$

$$\sum_{k=2}^{n} k\cos ky\, \Delta_k^{(2)}\left(\frac{\sin ky}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} \frac{\sin ky}{k}\Delta_k^{(2)}(k\cos ky) + \\ + 2\cos 2y \cdot \sin y - \frac{1}{2}\cos y \cdot \sin 2y + \\ + \frac{n}{n+1}\cos ny \cdot \sin(n+1)\, y - \frac{n+1}{n}\cos(n+1)\, y \cdot \sin ny. \tag{4.10}$$

В силу (4.9) и (4.10), из (4.7) находим:

$$\mathscr{E}_{\sigma_n}^{(1)}(x) = -\frac{2}{\pi(n+1)}\sum_{k=2}^{n}\frac{\sin ky}{k}\Delta_k^{(2)}(k\cos ky) + \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{n}\frac{\sin ky}{k}\Delta_k^{(2)}(\cos ky) + \\ + \frac{2}{\pi(n+1)}(1-\cos y)\sum_{k=2}^{n}\frac{n-k+1}{k}\sin 2ky + \\ + \frac{1}{\pi(n+1)}(\pi-2y)\cos y + \frac{2}{\pi(n+1)}\cos y \cdot \sin 2y - \\ - \frac{4}{(n+1)\pi}\sin y \cdot \cos 2y + \frac{2}{(n+1)^2\pi}\sin(n+1)\, y \cdot \cos ny.$$

Но так как

$$\Delta_k^{(2)}(k\cos ky) = k\Delta_k^{(2)}(\cos ky) - 2\sin y \cdot \sin ky,$$

то

$$\mathscr{E}_{\sigma_n}^{(1)}(x) = \frac{2}{\pi(n+1)}\sin y\sum_{k=2}^{n}\frac{1-\cos 2ky}{k} - \frac{2}{\pi(n+1)}\sum_{k=2}^{n}\sin ky\,\Delta_k^{(2)}(\cos ky) + \\ + \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{n}\frac{\sin ky}{k}\Delta^2(\cos ky) + \frac{2}{\pi(n+1)}(1-\cos y)\sum_{k=2}^{n}\frac{n+1-k}{k}\sin 2ky + \\ + \frac{4}{\pi(n+1)}\sin y \cdot \cos^2 y - \frac{4}{\pi(n+1)}\sin y \cdot \cos 2y + \\ + \frac{2}{\pi(n+1)^2}\sin(n+1)\, y \cdot \cos ny + \frac{1}{\pi(n+1)}(\pi-2y)\cos y.$$

Отсюда следует:

$$\mathscr{E}^{(1)}_{\sigma_n}(x) = \frac{2}{\pi(n+1)}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} +$$

$$+\frac{2}{\pi(n+1)}\sum_{k=2}^{n}\left\{\frac{(n+1-k)\sin ky\cdot\Delta_k^2(\cos ky)}{k} - \frac{\sin y\cdot\cos 2ky}{k}\right\} +$$

$$+\frac{2}{\pi(n+1)}(1-\cos y)\sum_{k=2}^{n}\frac{n+1-k}{k}\sin 2ky + \frac{4}{\pi(n+1)}\sin y(\cos^2 y-\cos 2y) +$$

$$+\frac{2}{\pi(n+1)^2}\sin(n+1)y\cdot\cos ny + \frac{1}{\pi(n+1)}(\pi-2y)\cos y.$$

Если теперь заметить, что

$$\Delta_k^{(2)}(\cos ky) = 2\cos ky(\cos y - 1),$$

то получим:

$$\mathscr{E}^{(1)}_{\sigma_n}(x) = \frac{2\sin y}{\pi(n+1)}\sum_{k=2}^{n}\frac{1-\cos 2ky}{k} + \frac{4}{\pi(n+1)}\sin y(\cos^2 y-\cos 2y) +$$

$$+\frac{2}{\pi(n+1)^2}\sin(n+1)y\cdot\cos ny + \frac{\pi-2y}{\pi(n+1)}\cos y,$$

откуда, принимая во внимание одно из обозначений (2.5), находим:

$$\mathscr{E}^{(1)}_{\sigma_n}(x) = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}[1-T_{2k}(x)] +$$

$$+\frac{2\sqrt{1-x^2}}{(n+1)^3\pi}T'_{n+1}(x)T_n(x) + \frac{x}{(n+1)\pi}(\pi-2\arccos x),$$

т. е.

$$\mathscr{E}^{(1)}_{\sigma_n}(x) = \sqrt{1-x^2}P_{2n}(x) + \frac{x}{\pi(n+1)}(\pi-2\arccos x),$$

где $P_{2n}(x)$ совпадает с (4.2).

Теорема доказана.

§ 5. Усеченные средние частных сумм ряда П. Л. Чебышева

В настоящем параграфе рассматриваются усеченные средние $\sigma_{n,p}(f, x)$ частных сумм ряда П. Л. Чебышева для функций $f(x)\in H^{(\alpha)}$ $(0<\alpha\leqslant 1)$ [см. (1.6)] и устанавливается асимптотическое равенство для верхней грани отклонений $|f(x)-\sigma_{n,p}(f, x)|$, распространенной на класс $H^{(\alpha)}$.

ТЕОРЕМА 7 *. *При $n\to\infty$ справедливо следующее асимптотическое равенство:*

$$\mathscr{E}_n(H^{(\alpha)}, x) \equiv \sup_{f(x)\in H^{(\alpha)}}|f(x)-\sigma_{n,p}(f, x)| =$$

$$= \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2 n^\alpha}(\sqrt{1-x^2})^\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha\sin t\,dt\cdot\ln\frac{n}{p+1} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \qquad (5.1)$$

где $O(1)$ обозначает величину, равномерно ограниченную относительно всех $x\in[-1, 1]$, всех p $(0\leqslant p\leqslant n$ при $0<\alpha<1$ и $0\leqslant p\leqslant n\theta$, $\theta<1$, при $\alpha=1)$ и всех $n=1, 2, 3, \ldots$ **.

* Краткое сообщение о теореме 7 см. в работе ([3]).

** При $p=0$, $\alpha=1$ оценку верхней грани (5.1) получил С. М. Никольский [см. ([6])]. Случай $p=0$, $\alpha<1$ см. в работе ([11]).

Доказательство. 1. Рассмотрим сначала случай $0<\alpha<1$.

Нетрудно видеть, что верхняя грань $\mathscr{E}_n(H^{(\alpha)}, x)$ совпадает с верхней гранью $\mathscr{E}_n = \mathscr{E}_n(\widetilde{H}^{(\alpha)}, y)$, распространенной на класс $\widetilde{H}^{(\alpha)}$ четных 2π-периодических функций $\varphi(u)$, удовлетворяющих условиям:

$$|\varphi(u')-\varphi(u'')| \leqslant |\cos u' - \cos u''|^{\alpha}, \quad u', u'' \in [0, \pi], \tag{5.2}$$

$$\varphi(y)=0 \quad (y=\arccos x). \tag{5.3}$$

Поэтому

$$\mathscr{E}_n = \sup_{\varphi\in\widetilde{H}^{\alpha}} \frac{1}{\pi(p+1)}\left|\sum_{\nu=n-p}^{n}\int_0^{\pi}\varphi(u)\,[D_{\nu}(u+y)+D_{\nu}(u-y)]\,du\right|,$$

где

$$D_{\nu}(t)=\frac{\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}},$$

или

$$\mathscr{E}_n = \frac{1}{2\pi(p+1)}\sup_{\varphi\in\widetilde{H}^{\alpha}}\left|\int_0^{\pi}\varphi(u)\left\{\frac{\sin\frac{m+1}{2}(u+y)\sin\frac{p+1}{2}(u+y)}{\sin^2\frac{u+y}{2}}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\sin\frac{m+1}{2}(u-y)\,\sin\frac{p+1}{2}(u-y)}{\sin^2\frac{u-y}{2}}\right\}du\right|, \tag{5.4}$$

где $m=2n-p$. Можно считать, что $0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$ (см. конец введения).

Заметим, что в равенстве (5.4) знаменатели $\sin^2\frac{u\pm y}{2}$ с точностью до величины порядка $O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$ равномерно относительно $x\in[-1, 1]$ и $p\,(0\leqslant p\leqslant n)$ могут быть заменены на $\frac{1}{4}(u\pm y)^2$. Это непосредственно вытекает из справедливости соотношения

$$\frac{1}{p+1}\int_0^{\pi}\varphi(t)\left[\frac{1}{\sin^2\frac{t\pm y}{2}}-\frac{4}{(t\pm y)^2}\right]\sin\frac{m+1}{2}t\cdot\sin\frac{p+1}{2}t\,dt=O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right),$$

откуда следует:

$$\mathscr{E}_n=\sup_{\varphi\in\widetilde{H}^{\alpha}}\left|\int_0^{\pi}\varphi(u)\,\{R_{m,p}(u+y)+R_{m,p}(u-y)\}\,du\right|+O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right),$$

где

$$R_{m,p}(t)=\frac{2\sin\frac{m+1}{2}t\cdot\sin\frac{p+1}{2}t}{\pi(p+1)\,t^2}. \tag{5.5}$$

После замены переменных получаем:

$$\mathscr{E}_n=\sup_{\varphi\in\widetilde{H}^{\alpha}}|I_1+I_2+I|, \tag{5.6}$$

где

$$\left.\begin{aligned} I&=\int_0^{y}\{\varphi(y-t)+\varphi(y+t)\}R_{m,p}(t)\,dt,\\ I_1&=\int_y^{\pi+y}\varphi(t-y)\,R_{m,p}(t)\,dt,\\ I_2&=\int_y^{\pi-y}\varphi(t+y)\,R_{m,p}(t)\,dt.\end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

Покажем, что интегралы I_1 и I_2 имеют порядок $O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$. Рассмотрим сначала интеграл I_1. Вводя обозначение:

$$y=\frac{2r+1}{m+1}\pi+\delta, \tag{5.8}$$

где r принимает натуральные значения и $0\leqslant\delta\leqslant\frac{2\pi}{m+1}$, получим:

$$I_1=\sum_{\nu=r+1}^{\left[\frac{m}{2}\right]+r}\left\{\int_{\frac{2\nu-1}{m+1}\pi}^{\frac{2\nu\pi}{m+1}}\varphi(t-y)R_{m,p}(t)\,dt-\int_{\frac{2\nu\pi}{m+1}}^{\frac{2\nu+1}{m+1}\pi}\varphi(t-y)R_{m,p}(t)\,dt\right\}-$$

$$-\int_{\frac{2r+1}{m+1}\pi}^{y}\varphi(t-y)R_{m,p}(t)\,dt+\int_{\frac{\left[\frac{m}{2}\right]+r}{m+1}\pi}^{\pi+y}\varphi(t-y)R_{m,p}(t)\,dt. \tag{5.9}$$

Из условий (5.3) и неравенства

$$\left|\sin\frac{p+1}{2}t\right|\leqslant\frac{p+1}{2}\,t$$

вытекает, что последние два интеграла в (5.9) имеют порядок $O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$. После замены переменных находим:

$$I_1=\sum_{\nu=r+1}^{\left[\frac{m}{2}\right]+r}(-1)^{\nu-1}\int_0^{\frac{\pi}{m+1}}\left\{\varphi\left(\frac{2\nu\pi}{m+1}-u-y\right)R_{m,p}\left(\frac{2\nu\pi}{m+1}-u\right)+\right.$$

$$\left.+\varphi\left(\frac{2\nu\pi}{m+1}+u-y\right)R_{m,p}\left(\frac{2\nu\pi}{m+1}+u\right)\right\}du+O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Из оценок

$$\sum_{\nu=r+1}^{\left[\frac{m}{2}\right]+r}\int_0^{\frac{\pi}{m+1}}\left|\varphi\left(\frac{2\nu\pi}{m+1}-y\pm u\right)\right|\sin\frac{m+1}{2}u\left|\sin\frac{p+1}{2}\left(\frac{2\nu\pi}{m+1}\pm u\right)-\right.$$

$$\left.-\sin\left(\frac{p+1}{m+1}\nu\pi\right)\right|\frac{du}{\left(\frac{2\nu\pi}{m+1}\pm u\right)^2}\leqslant$$

$$\leqslant c(p+1)\cdot\frac{\pi^2}{m^2}\sum_{\nu=r+1}^{\left[\frac{m}{2}\right]+r}\frac{m^2}{\nu^2}\cdot\frac{\nu^\alpha}{m^\alpha}=O\left(\frac{p+1}{m^\alpha}\right), \tag{5.10}$$

$$\sum_{\nu=r+1}^{\left[\frac{m}{2}\right]+r}\int_0^{\frac{\pi}{m+1}}\left|\varphi\left(\frac{2\nu\pi}{m+1}-y\pm u\right)\right|\left|\sin\frac{m+1}{2}u\cdot\sin\left(\frac{p+1}{m+1}\nu\pi\right)\right|\times$$

$$\times\left|\frac{1}{\left(\frac{2\nu\pi}{m+1}\pm u\right)^2}-\frac{(m+1)^2}{4\nu^2\pi^2}\right|du\leqslant$$

$$\leqslant c_1\sum_{\nu=r+1}^{\left[\frac{m}{2}\right]+r}\int_0^{\frac{\pi}{m+1}}\frac{\nu^{\alpha+1}}{(m+1)^\alpha}(p+1)\,u^2\,\frac{(m+1)^4\left(\frac{4\nu\pi}{m+1}\pm u\right)}{\nu^4}\,du\leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_2(p+1)}{m^\alpha} \sum_{\nu=r+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2-\alpha}} = O\left(\frac{p+1}{m^\alpha}\right), \tag{5.11}$$

где c, c_1, c_2 — абсолютные константы, следует, что

$$I_1 = \frac{(m+1)^2}{2\pi^3(p+1)} \sum_{\nu=r+1}^{\left[\frac{m}{2}\right]+r} (-1)^{\nu-1} \int_0^{\frac{\pi}{m+1}} \left\{\varphi\left(\frac{2\nu\pi}{m+1} - u - y\right) - \right.$$

$$\left. - \varphi\left(\frac{2\nu\pi}{m+1} + u - y\right)\right\} \cdot \frac{\sin\frac{m+1}{2} u \cdot \sin\left(\frac{p+1}{m+1}\nu\pi\right)}{\nu^2} du + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

$$|I_1| \leqslant c_3 \frac{(m+1)^2}{p+1} \frac{p+1}{(m+1)^2} \sum_{\nu=r+1}^{\left[\frac{m}{2}\right]+r} \left|2\sin\frac{\pi}{m+1} \cdot \sin\left(\frac{2\nu\pi}{m+1} - y\right)\right|^\alpha \frac{1}{\nu} =$$

$$= O\left(\frac{1}{m^{2\alpha}} \sum_{\nu=r+1}^{\left[\frac{m}{2}\right]+r} \nu^{\alpha-1}\right) = O\left(\frac{1}{m^\alpha}\right) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Интеграл I_2 оцениваем совершенно аналогично и получаем:

$$I_2 = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Следовательно,

$$\mathscr{E}_n = \sup_{\varphi\in\widetilde{H}^\alpha} |I(\varphi)| + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Учитывая (5.8), неравенство

$$\frac{1}{p+1} \int_0^{\frac{\pi}{m+1}} |\varphi(t+y) + \varphi(t-y)|\,|R_{m,p}(t)|\,dt = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

а также то очевидное обстоятельство, что оценки (5.10) и (5.11) остаются справедливыми, если в их правых частях производить суммирование в пределах от $\nu = 1$ до $\nu = r$, находим после замены переменных:

$$I = I(\varphi) = \frac{(m+1)^2}{2\pi^3(p+1)} \left| \sum_{\nu=1}^{r} (-1)^{\nu-1} \frac{\sin\left(\frac{p+1}{m+1}\nu\pi\right)}{\nu^2} \cdot \right.$$

$$\cdot \int_0^{\frac{\pi}{m+1}} \sin\frac{m+1}{2} u \left\{\varphi\left(y + u - \frac{2\nu\pi}{m+1}\right) - \varphi\left(y - u - \frac{2\nu\pi}{m+1}\right) + \right.$$

$$\left.\left. + \varphi\left(y - u + \frac{2\nu\pi}{m+1}\right) - \varphi\left(y + u + \frac{2\nu\pi}{m+1}\right)\right\} du \right| + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right). \tag{5.12}$$

Так как $\varphi(t)$ принадлежит классу $\widetilde{H}^\alpha$ [см. (5.2) и (5.3)], то

$$|I(\varphi)| \leqslant \frac{2^{\alpha-1}(m+1)^2}{\pi^3(p+1)} \sum_{\nu=1}^{r} \frac{\left|\sin\left(\frac{p+1}{m+1}\nu\pi\right)\right|}{\nu^2} \left\{\sin^\alpha\left(y - \frac{2\nu\pi}{m+1}\right) + \right.$$

$$\left. + \sin^\alpha\left(y + \frac{2\nu\pi}{m+1}\right)\right\} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{m+1}} \sin\frac{m+1}{2} u (\sin u)^\alpha du + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \tag{5.13}$$

равномерно для всех $\varphi(t) \in \widetilde{H}^{(\alpha)}$.

С другой стороны, можно указать такую функцию $\varphi_n(t) \in \widetilde{H}^\alpha$, для которой интеграл $I(\varphi_n)$ с точностью до слагаемого порядка $O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ совпадает с правой частью (5.13). *

В самом деле, определим на $[0, \pi]$ четную периода 2π функцию $\varphi(t) = \varphi_n(t)$ следующим образом:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \beta_r, & 0 \leqslant t \leqslant y - \frac{2r\pi}{m+1}, \\ (-1)^\nu 2^{\alpha-1} \sin^\alpha\left(y - \frac{2\nu+1}{m+1}\pi\right) \sin^\alpha\left(y - t - \frac{2\nu\pi}{m+1}\right) + \beta_\nu, & y - \frac{2\nu+1}{m+1}\pi \leqslant t \leqslant y - \frac{2\nu\pi}{m+1}, \\ & \nu = r-1, r-2, \ldots, 1, \\ (-1)^{\nu-1} 2^{\alpha-1} \sin^\alpha\left(y - \frac{2\nu-1}{m+1}\pi\right) \sin^\alpha\left(\frac{2\nu\pi}{m+1} + t - y\right) + \beta_\nu, & y - \frac{2\nu\pi}{m+1} \leqslant t \leqslant y - \frac{2\nu-1}{m+1}\pi, \\ & \nu = r, r-1, \ldots, 2, \\ 0, & y - \frac{2\pi}{m+1} \leqslant t \leqslant y + \frac{4\pi}{m+1}, \\ (-1)^{\nu-1} 2^{\alpha-1} \sin^\alpha\left(y + \frac{2\nu-1}{m+1}\pi\right) \cdot \sin^\alpha\left(\frac{2\nu\pi}{m+1} - t + y\right) + \gamma_\nu, & y + \frac{2\nu-1}{m+1}\pi \leqslant t \leqslant y + \frac{2\nu\pi}{m+1}, \\ & \nu = 3, 4, \ldots, \mu, \\ (-1)^\nu 2^{\alpha-1} \sin^\alpha\left(y + \frac{2\nu-1}{m+1}\pi\right) \cdot \sin^\alpha\left(t - \frac{2\nu\pi}{m+1} - y\right) + \gamma_\nu, & y + \frac{2\nu\pi}{m+1} \leqslant t \leqslant y + \frac{2\nu+1}{m+1}\pi, \\ & \nu = 2, 3, \ldots, \mu-1, \\ 0, & y + \frac{2\mu\pi}{m+1} \leqslant t \leqslant y + \frac{2(\mu+2)\pi}{m+1}, \\ (-1)^\nu 2^{\alpha-1} \sin^\alpha\left(y + \frac{2\nu+1}{m+1}\pi\right) \cdot \sin^\alpha\left(\frac{2\nu\pi}{m+1} - t + y\right) + \delta_\nu, & y + \frac{2\nu-1}{m+1} \leqslant t \leqslant y + \frac{2\nu\pi}{m+1}, \\ & \nu = \mu+3, \mu+4, \ldots, r, \\ (-1)^\nu 2^{\alpha-1} \sin^\alpha\left(y + \frac{2\nu+1}{m+1}\pi\right) \sin^\alpha\left(t - y - \frac{2\nu\pi}{m+1}\right) + \delta_\nu, & y + \frac{2\nu\pi}{m+1} \leqslant t \leqslant y + \frac{2\nu+1}{m+1}\pi, \\ & \nu = \mu+2, \mu+3, \ldots, r-1, \\ \delta_r, & y + \frac{2r\pi}{m+1} \leqslant t \leqslant \pi, \end{cases} \tag{5.14}$$

* Аналогичное исследование экстремальной функции проводилось в работе ([2]).

где μ — наибольшее четное число, для которого еще выполняется неравенство

$$y + \frac{2\mu\pi}{m+1} < \frac{\pi}{2},$$

а β_ν, γ_ν и δ_ν — величины, обеспечивающие непрерывность функции $\varphi_n(t)$ $(\beta_1 = \gamma_2 = \gamma_\mu = \delta_{\mu+2} = 0)$.

Докажем, что функция $\varphi_n(t)$ принадлежит классу $\widetilde{H}^{(\alpha)}$. Для этого достаточно доказать справедливость соотношения (5.2) для любых t', t'' $(0 \leqslant t' \leqslant t'' \leqslant \pi)$, ибо $\varphi_n(y) = 0$.

Пусть

$$y - \frac{2\nu+1}{m+1}\pi \leqslant t' \leqslant t'' \leqslant y - \frac{2\nu\pi}{m+1}, \quad \nu = r-1, r-2, \ldots, 1.$$

Пользуясь известными свойствами функции x^α, а также неравенством

$$y - \frac{2\nu+1}{m+1}\pi \leqslant \frac{t'+t''}{2} \leqslant \frac{\pi}{2},$$

получим:

$$|\varphi_n(t') - \varphi_n(t'')| = 2^{\alpha-1}\left|\sin^\alpha\left(y - \frac{2\nu+1}{m+1}\pi\right)\left\{\sin^\alpha\left(y - t' - \frac{2\nu\pi}{m+1}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sin^\alpha\left(y - t'' - \frac{2\nu\pi}{m+1}\right)\right\}\right| \leqslant 2^{2\alpha-1}\left|\sin^\alpha\left(y - \frac{2\nu+1}{m+1}\pi\right)\right| \left|\sin\frac{t''-t'}{2}\right|^\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \left|2\sin\frac{t''+t'}{2}\sin\frac{t''-t'}{2}\right|^\alpha = |\cos t' - \cos t''|^\alpha.$$

Аналогично, если

$$y - \frac{2\nu\pi}{m+1} \leqslant t' \leqslant t'' \leqslant y - \frac{2\nu-1}{m+1}\pi, \quad \nu = r, r-1, \ldots, 2,$$

то

$$|\varphi_n(t') - \varphi_n(t'')| \leqslant |\cos t' - \cos t''|^\alpha.$$

В случае же, когда t' и t'' принадлежат соответственно двум «смежным» частичным интервалам определения $\varphi_n(t)$, т. е. когда

$$y - \frac{2\nu+1}{m+1}\pi \leqslant t' \leqslant y - \frac{2\nu\pi}{m+1}, \quad y - \frac{2\nu\pi}{m+1} \leqslant t'' \leqslant y - \frac{2\nu-1}{m+1}\pi,$$

то, пользуясь выпуклостью функции x^α, убеждаемся в справедливости (5.2) для t' и t''.

Нетрудно видеть, что (5.2) имеет место также, если t' и t'' принадлежат двум частичным интервалам, прилегающим к точкам $t = \delta + \frac{\pi}{m+1}$ или $t = y - \frac{2\pi}{m+1}$. В самом деле, если

$$0 \leqslant t' \leqslant \delta + \frac{\pi}{m+1}, \quad \delta + \frac{\pi}{m+1} \leqslant t'' \leqslant \delta + \frac{2\pi}{m+1}$$

[см. (5.8)], то

$$|\varphi_n(t') - \varphi_n(t'')| = \left|\varphi_n\left(\delta + \frac{\pi}{m+1}\right) - \varphi_n(t'')\right| = \left|\varphi_n\left(y - \frac{2r\pi}{m+1}\right) - \varphi_n(t'')\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\cos\left(y - \frac{2r\pi}{m+1}\right) - \cos t''\right|^\alpha \leqslant |\cos t' - \cos t''|^\alpha.$$

Если же

$$y - \frac{3\pi}{m+1} \leqslant t' \leqslant y - \frac{2\pi}{m+1}, \quad y - \frac{2\pi}{m+1} \leqslant t'' \leqslant y,$$

то

$$|\varphi_n(t') - \varphi_n(t'')| = \left|\varphi_n(t') - \varphi_n\left(y - \frac{2\pi}{m+1}\right)\right| \leqslant |\cos t' - \cos t''|^{\alpha}.$$

Итак, доказано, что если t' и t'' принадлежат одному частичному интервалу определения $\varphi_n(t)$ или двум таким соседним интервалам из сегмента $[0, y]$, то соотношение (5.2) выполняется. Подобным же образом это доказывается для сегментов $\left[y, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Чтобы установить справедливость (5.2) для любых t' и t'' из $[0, \pi]$, исследуем поведение функции $\varphi_n(t)$ на $[0, \pi]$. В пределах интервалов $\left[y - \frac{2\nu+1}{m+1}\pi, y - \frac{2\nu-1}{m+1}\pi\right]$ или $\left[y + \frac{2\nu-1}{m+1}\pi, y + \frac{2\nu+1}{m+1}\pi\right]$ функция $\varphi_n(t)$ монотонна и имеет в концах этих интервалов соответственно минимум и максимум. Эти максимумы для интервалов, расположенных на сегментах, находящихся левее $\frac{\pi}{2}$, т. е. для $\left[\delta + \frac{\pi}{m+1}, y - \frac{2\pi}{m+1}\right]$ и $\left[y + \frac{4\pi}{m+1},\right.$ $\left. y + \frac{2\mu\pi}{m+1}\right]$ возрастают слева направо, а минимумы соответственно убывают.

В самом деле, рассмотрим для определенности сегмент $\left[y + \frac{4\pi}{m+1},\right.$ $\left. y + \frac{2\mu\pi}{m+1}\right]$. Из (5.14) следует:

$$\varphi_n\left(y + \frac{2\nu-1}{m+1}\pi\right) = (-1)^{\nu-1}2^{\alpha-1}\sin^{\alpha}\left(y + \frac{2\nu-3}{m+1}\pi\right)\sin^{\alpha}\frac{\pi}{m+1} + \gamma_{\nu-1} =$$
$$= (-1)^{\nu-1}2^{\alpha-1}\sin^{\alpha}\left(y + \frac{2\nu-1}{m+1}\pi\right)\sin^{\alpha}\frac{\pi}{m+1} + \gamma_{\nu} \quad (\nu = 3, 4, \ldots, \mu).$$

Отсюда вытекает, что $\gamma_{2k-1} < \gamma_{2k}$, $\gamma_{2k} > \gamma_{2k+1}$ и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_n\left(y + \frac{4k+1}{m+1}\pi\right) < \varphi_n\left(y + \frac{4k+5}{m+1}\pi\right), \\ &\varphi_n\left(y + \frac{4k+3}{m+1}\pi\right) > \varphi_n\left(y + \frac{4k+7}{m+1}\pi\right) \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

что подтверждает справедливость высказанного выше утверждения о поведении частичных максимумов и минимумов сегмента $\left[y + \frac{4\pi}{m+1},\right.$ $\left. y + \frac{2\mu\pi}{m+1}\right]$.

Аналогично убеждаемся, что такое же явление имеет место и для сегмента $\left[\delta + \frac{\pi}{m+1}, y - \frac{2\pi}{m+1}\right]$, расположенного слева от $\frac{\pi}{2}$.

Что касается сегмента $\left[y + \frac{2(\mu+2)\pi}{m+1}, y + \frac{2r\pi}{m+1}\right]$, расположенного правее $\frac{\pi}{2}$, то, как это показывают аналогичные рассуждения, там имеет место обратная закономерность: соответствующие максимумы убывают слева направо, а минимумы возрастают.

Пусть теперь $0 \leqslant t' \leqslant t'' \leqslant \pi$. Рассмотрим следующие возможные случаи:

$$1)\ y - \frac{3\pi}{m+1} \leqslant t' \leqslant y - \frac{2\pi}{m+1}, \quad y + \frac{4\pi}{m+1} \leqslant t'' \leqslant y + \frac{5\pi}{m+1}, \tag{5.15}$$

$$2)\ y + \frac{2\mu - 1}{m+1}\pi \leqslant t' \leqslant y + \frac{2\mu\pi}{m+1}, \quad y + \frac{2(\mu+2)\pi}{m+1} \leqslant t'' \leqslant y + \frac{2\mu+5}{m+1}, \tag{5.16}$$

3) имеет место любое расположение для t' и t'', отличное от случаев 1) и 2) $(t' \leqslant t'')$.

В случае 1), пользуясь монотонностью и выпуклостью функции x^α, имеем:

$$|\varphi_n(t') - \varphi_n(t'')| \leqslant \left|\varphi_n\left(y + \frac{5\pi}{m+1}\right) - \varphi_n\left(y - \frac{3\pi}{m+1}\right)\right| =$$
$$= 2^{\alpha-1}\left|\sin^\alpha\left(y + \frac{3\pi}{m+1}\right) + \sin^\alpha\left(y - \frac{3\pi}{m+1}\right)\right| \left|\sin^\alpha \frac{\pi}{m+1}\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2^\alpha \left|\sin y \cdot \sin\frac{\pi}{m+1}\right|^\alpha \leqslant |\cos t' - \cos t''|^\alpha.$$

В случае 2) аналогично:

$$|\varphi_n(t') - \varphi_n(t'')| \leqslant 2^\alpha \left|\sin\left(y + \frac{2\mu+2}{m+1}\pi\right)\sin\frac{\pi}{m+1}\right|^\alpha \leqslant |\cos t' - \cos t''|^\alpha.$$

В случае 3) произвольного расположения t' и t'', в силу установленной выше закономерности в поведении максимумов и минимумов функции $\varphi_n(t)$, всегда найдутся две точки t_1 и t_2, обладающие следующими тремя свойствами:

а) $0 \leqslant t' \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant t'' \leqslant \pi$.

б) Точки t_1 и t_2 обе принадлежат либо одному, либо двум «смежным» частичным интервалам определения $\varphi_n(t)$ или же удовлетворяют условиям (5.16) либо (5.15).

в) $\varphi_n(t_1) = \varphi_n(t')$, $\quad \varphi_n(t_2) = \varphi_n(t'')$.

Отсюда следует:

$$|\varphi_n(t') - \varphi_n(t'')| = |\varphi_n(t_1) - \varphi_n(t_2)| \leqslant [\cos t_1 - \cos t_2]^\alpha \leqslant |\cos t' - \cos t''|^\alpha.$$

Этим доказано, что $\varphi_n(t) \in \widetilde{H}^\alpha$.

Если принять во внимание, что

$$\frac{(m+1)^2}{p+1}\sum_{\nu=1}^{r}\frac{\left|\sin\left(\frac{p+1}{m+1}\nu\pi\right)\right|}{\nu^2}\left|\sin^\alpha\left(y \pm \frac{2\nu\pi}{m+1}\right) - \sin^\alpha\left(y \pm \frac{2\nu+1}{m+1}\pi\right)\right| \times$$
$$\times \int_0^{\frac{\pi}{m+1}} \sin\frac{m+1}{2}u \cdot (\sin u)^\alpha\, du = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

$$\frac{(m+1)^2}{p+1}\sum_{\nu=1}^{r}\frac{\left|\sin\left(\frac{p+1}{m+1}\nu\pi\right)\right|}{\nu^2}\left|\sin^\alpha\left(y + \frac{2\nu\pi}{m+1}\right) - \sin^\alpha\left(y + \frac{2\nu-1}{m+1}\pi\right)\right| \times$$
$$\times \int_0^{\frac{\pi}{m+1}} \sin\frac{m+1}{2}u \cdot (\sin u)^\alpha\, du = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \tag{5.17}$$

$$\frac{(m+1)^2}{p+1}\sum_{\nu=\left[\frac{m+1}{p+1}\right]}^{r}\frac{\left|\sin\left(\frac{p+1}{m+1}\nu\pi\right)\right|}{\nu^2}\left|\sin^\alpha\left(y-\frac{2\nu\pi}{m+1}\right)+\sin^\alpha\left(y+\frac{2\nu\pi}{m+1}\right)\right|\times$$
$$\times\int\limits_0^{\frac{\pi}{m+1}}\sin\frac{m+1}{2}u\,(\sin u)^\alpha\,du=O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

то из (5.12) следует:

$$|I(\varphi_n)|=\frac{2^{\alpha-1}}{\pi^3}\frac{(m+1)^2}{p+1}\left|\sum_{\nu=1}^{r}\frac{\sin\left(\frac{p+1}{m+1}\nu\pi\right)}{\nu^2}\left\{\sin^\alpha\left(y+\frac{2\nu\pi}{m+1}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sin^\alpha\left(y+\frac{2\nu\pi}{m+1}\right)\right\}\int\limits_0^{\frac{\pi}{m+1}}\sin\frac{m+1}{2}u\,(\sin u)^\alpha\,du\right|+O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)=$$
$$=\frac{2^{\alpha-1}}{\pi^3}\frac{(m+1)^2}{p+1}\sum_{\nu=1}^{r}\frac{\left|\sin\left(\frac{p+1}{m+1}\nu\pi\right)\right|}{\nu^2}\left\{\sin^\alpha\left(y+\frac{2\nu\pi}{m+1}\right)+\sin^\alpha\left(y-\frac{2\nu\pi}{m+1}\right)\right\}\times$$
$$\times\int\limits_0^{\frac{\pi}{m+1}}\sin\frac{m+1}{2}u\cdot(\sin u)^\alpha\,du+O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right). \tag{5.18}$$

Таким образом, функция $\varphi_n(t)\in\widetilde{H}^\alpha$ обращает неравенство (5.13) в асимптотическое равенство.

Отсюда, если принять во внимание соотношения

$$(\sin u)^\alpha-u^\alpha=O(u^{3\alpha}),$$
$$\sin^\alpha\left(y\pm\frac{2\nu\pi}{m+1}\right)-(\sin y)^\alpha=O\left[\frac{\nu^\alpha}{(m+1)^\alpha}\right], \tag{5.19}$$

находим:

$$\mathcal{E}_n=\sup_{\varphi\in\widetilde{H}^\alpha}|I(\varphi)|+O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)=$$
$$=\frac{2^{\alpha+1}}{\pi^3}\left(\frac{2\sin y}{m+1}\right)^\alpha\frac{m+1}{p+1}\sum_{\nu=1}^{r}\frac{\left|\sin\left(\frac{p+1}{m+1}\nu\pi\right)\right|}{\nu^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}t^\alpha\sin t\,dt+O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right). \tag{5.19'}$$

Пользуясь неравенством

$$\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{m+1}{p+1}\right]}\left|\frac{\sin\left(\frac{p+1}{m+1}\nu\pi\right)}{\nu^2}-\frac{(p+1)\pi}{(m+1)\nu}\right|=O\left(\frac{p+1}{m+1}\right),$$

вытекающим из известного соотношения

$$\frac{\sin x}{x^2}-\frac{1}{x}=O(1),$$

имеем:

$$\mathcal{E}_n=\frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2}(\sin y)^\alpha\left(\frac{2}{m+1}\right)^\alpha\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{m+1}{p+1}\right]}\frac{1}{\nu}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}t^\alpha\sin t\,dt+O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)=$$
$$=\frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2}(\sin y)^\alpha\,\frac{1}{n^\alpha}\ln\frac{n+1}{p+1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}t^\alpha\sin t\,dt+O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

т. е.

$$\mathscr{E}_n(H^{(\alpha)},\ x) = \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^{\alpha} \ln\frac{n}{p+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha}\sin t\,dt + O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right), \quad (5.20)$$

где $O(1)$ равномерно ограничено относительно всех $x \in [-1, 1]$, всех $p\,(0 \leqslant p \leqslant n)$ и всех $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Итак, для случая $0 < \alpha < 1$ теорема доказана полностью.

2. Случай $\alpha = 1$. В этом случае, как известно, класс $H^{(1)}$ совпадает с классом W функций $f(x)$, имеющих почти всюду производную $f'(x)$, удовлетворяющую условию $|f'(x)| \leqslant 1$. При этом вопрос об асимптотическом поведении $\mathscr{E}_n(H^{(1)}, x)$ сводится к оценке верхней грани модуля интеграла

$$I^* = \frac{1}{\pi(p+1)}\int_0^{\pi} f'(\cos t)\sin t \sum_{\nu=n-p}^{n}\{D_{\nu}^{(1)}(t-y) + D_{\nu}^{(1)}(t+y)\}\,dt,$$

распространенной на класс W [см. ([6])], где

$$D_{\nu}^{(1)}(u) = \sum_{k=\nu+1}^{\infty}\frac{\sin ku}{k}. \quad (5.21)$$

В этом можно сразу убедиться после интегрирования по частям формулы для уклонения $|f(x) - \sigma_{n,p}(f, x)|$.

Учитывая, что

$$\frac{1}{p+1}\sum_{\nu=n-p}^{n}\int_{y-\frac{1}{n}}^{y+\frac{1}{n}} f'(\cos t)\sin t\,[D_{\nu}^{(1)}(t-y) + D_{\nu}^{(1)}(t+y)]\,dt = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (5.22)$$

равномерно для всех y и p $(0 \leqslant p \leqslant n\theta,\ \theta < 1)$, находим:

$$|I^*| = \left|\frac{1}{\pi(p+1)}\sum_{\nu=n-p}^{n}\left[\left\{\int_0^{y-\frac{1}{n}} + \int_{y+\frac{1}{n}}^{\pi} f'(\cos t)\sin t\, D_{\nu}^{(1)}(t-y)\,dt\right\} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^{\pi} f'(\cos t)\sin t\cdot D_{\nu}^{(1)}(t+y)\,dt\right]\right| + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (5.23)$$

Применим к $D_{\nu}^{(1)}(t \pm y)$ известное тождество [см. ([4]), ([8]), ([10])]

$$D_{\nu}^{(1)}(u) = \frac{1}{\nu+1}\,\frac{\cos\frac{2\nu+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}} + \Delta(\nu+1)\frac{\sin(\nu+1)u}{4\sin^2\frac{u}{2}} -$$

$$-\sum_{k=\nu+1}^{\infty}\Delta^2(k)\frac{\sin(k+1)u}{4\sin^2\frac{u}{2}}, \quad (5.23.1)$$

где

$$\Delta(k) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \quad \Delta^2(k) = \Delta(k) - \Delta(k+1).$$

Тогда

$$|I^*| = \frac{1}{\pi(p+1)}\left|\sum_{\nu=n-p}^{n}\left\{\frac{1}{\nu+1}\left[\int_0^{y-\frac{1}{n}} + \int_{y+\frac{1}{n}}^{\pi} f'(\cos t)\sin t\,\frac{\cos\frac{2\nu+1}{2}(t-y)}{2\sin\frac{t-y}{2}}\,dt\right]+\right.\right.$$

$$+\int_0^{\pi} f'(\cos t)\sin t\,\frac{\cos\frac{2\nu+1}{2}(t+y)}{2\sin\frac{t+y}{2}}\,dt+$$

$$\left.\left.+I_1^{(\nu)}+I_2^{(\nu)}+I_3^{(\nu)}-I_4^{(\nu)}-I_5^{(\nu)}-I_6^{(\nu)}\right\}\right|+O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad (5.24)$$

где

$$I_1^{(\nu)} = \frac{\Delta(\nu+1)}{\pi}\int_0^{y-\frac{1}{n}} f'(\cos t)\sin t\,\frac{\sin(\nu+1)(t-y)}{4\sin^2\frac{t-y}{2}}\,dt,$$

$$I_2^{(\nu)} = \frac{\Delta(\nu+1)}{\pi}\int_{y+\frac{1}{n}}^{\pi} f'(\cos t)\sin t\,\frac{\sin(\nu+1)(t-y)}{4\sin^2\frac{t-y}{2}}\,dt,$$

$$I_3^{(\nu)} = \frac{\Delta(\nu+1)}{\pi}\int_0^{\pi} f'(\cos t)\sin t\,\frac{\sin(\nu+1)(t+y)}{4\sin^2\frac{t+y}{2}},$$

$$(5.25)$$

$$I_4^{(\nu)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{y-\frac{1}{n}} f'(\cos t)\sin t\sum_{k=\nu+1}^{\infty}\Delta^2(k)\,\frac{\sin(k+1)(t-y)}{4\sin^2\frac{t-y}{2}}\,dt,$$

$$I_5^{(\nu)} = \frac{1}{\pi}\int_{y+\frac{1}{n}}^{\pi} f'(\cos t)\sin t\sum_{k=\nu+1}^{\infty}\Delta^2(k)\,\frac{\sin(k+1)(t-y)}{4\sin^2\frac{t-y}{2}}\,dt,$$

$$I_6^{(\nu)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f'(\cos t)\sin t\sum_{k=\nu+1}^{\infty}\Delta^2(k)\,\frac{\sin(k+1)(t+y)}{4\sin^2\frac{t+y}{2}}\,dt.$$

Оценим $I_r^{(\nu)}$, $r=1, 2, \ldots, 6$, считая, что $y \geqslant \frac{1}{n}$ *:

$$|I_1^{(\nu)}| \leqslant \frac{c}{\nu^2}\left|\int_{\frac{1}{n}}^{y} f'[\cos(y-u)]\sin(y-u)\,\frac{\sin(\nu+1)u}{4\sin^2\frac{u}{2}}\,du\right| = O\left(\frac{n}{\nu^2}\right), \qquad (5.26)$$

$$|I_2^{(\nu)}| \leqslant \frac{c}{\nu^2}\left|\int_{\frac{1}{n}}^{\pi-y} f'[\cos(y+u)]\sin(y+u)\,\frac{\sin(\nu+1)u}{4\sin^2\frac{u}{2}}\,du\right| = O\left(\frac{n}{\nu^2}\right), \qquad (5.27)$$

* Рассмотрения для случая $y < \frac{1}{n}$ аналогичны.

$$|I_3^{(\nu)}| \leqslant \frac{c}{\nu^2}\left|\int_y^{\pi+y} f'[\cos(u-y)]\sin(u-y)\frac{\sin(\nu+1)u}{4\sin^2\frac{u}{2}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{\nu^2}\left\{\int_y^{\pi+y}\frac{|\sin u\cdot\sin(\nu+1)u|}{4\sin^2\frac{u}{2}}du + |\sin y|\int_y^{\pi+y}\frac{|\cos u\cdot\sin(\nu+1)u|}{4\sin^2\frac{u}{2}}du\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{\nu^2}\left\{\int_y^{\pi+y}(\nu+1)\frac{\sin^2 u}{4\sin^2\frac{u}{2}}du + |\sin y|\int_y^{\pi+y}\frac{du}{4\sin^2\frac{u}{2}}\right\} =$$

$$= O\left(\frac{1}{\nu}\right) + O\left(\frac{1}{\nu^2}\right) = O\left(\frac{1}{\nu}\right), \tag{5.28}$$

где c — абсолютная константа.

Если принять во внимание, что

$$\left|\sum_{k=\nu+1}^{\infty}\Delta^2(k)\frac{\sin(k+1)z}{\sin^2\frac{z}{2}}\right| = O\left(\frac{1}{\sin^2\frac{z}{2}}\sum_{k=\nu+1}^{\infty}\frac{|\sin(k+1)z|}{k^3}\right),$$

то находим:

$$I_4^{(\nu)} = O\left(\frac{1}{\nu^2}\int_{\frac{1}{n}}^{y}\frac{du}{u^2}\right) = O\left(\frac{n}{\nu^2}\right), \tag{5.29}$$

$$I_5^{(\nu)} = O\left(\frac{n}{\nu^2}\right), \tag{5.30}$$

$$I_6^{(\nu)} = O\left(\sum_{k=\nu+1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\left\{\int_y^{\pi+y}\frac{|\sin u\cdot\sin(k+1)u|}{4\sin^2\frac{u}{2}}du + |\sin y|\int_y^{\pi+y}\frac{|\cos u\cdot\sin(k+1)u|}{4\sin^2\frac{u}{2}}du\right\}\right) =$$

$$= O\left(\sum_{k=\nu+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} + |\sin y|\int_y^{\infty}\frac{du}{4\sin^2\frac{u}{2}}\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\right) = O\left(\frac{1}{\nu}\right). \tag{5.31}$$

Из (5.24), оценок (5.25) — (5.31) и соотношений

$$\sum_{\nu=n-p}^{n}\frac{n}{\nu^2} = O\left(\frac{p+1}{n}\right), \quad \sum_{\nu=n-p}^{n}\frac{1}{\nu} \quad O\left(\frac{p+1}{n}\right)$$

вытекает, что

$$|I^*| = \frac{1}{\pi(p+1)}\left|\sum_{\nu=n-p}^{n}\frac{1}{\nu+1}\left\{\int_0^{y-\frac{1}{n}} + \int_{y+\frac{1}{n}}^{\pi} f'(\cos t)\sin t\frac{\cos\frac{2\nu+1}{2}(t-y)}{2\sin\frac{t-y}{2}}dt + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^{\pi} f'(\cos t)\sin t\frac{\cos\frac{2\nu+1}{2}(t+y)}{2\sin\frac{t+y}{2}}dt\right\}\right| + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{5.32}$$

Покажем, что интегралы

$$I_1^* = \frac{1}{2\pi(p+1)} \int\limits_{2y}^{\pi} \sum_{\nu=n-p}^{n} \frac{1}{\nu+1} f'(\cos t) \sin t \frac{\cos \frac{2\nu+1}{2}(t-y)}{\sin \frac{t-y}{2}} dt,$$

$$I_2^* = \frac{1}{2\pi(p+1)} \int\limits_{0}^{\pi} \sum_{\nu=n-p}^{n} \frac{1}{\nu+1} f'(\cos t) \sin t \frac{\cos \frac{2\nu+1}{2}(t+y)}{\sin \frac{t+y}{2}} dt$$

имеют порядок $O\left(\frac{1}{n}\right)$ равномерно по y и p $(0 \leqslant p \leqslant n\theta;\ \theta < 1)$. В самом деле,

$$I_1^* = O\left(\frac{1}{p+1} \sum_{\nu=n-p}^{n} \frac{1}{\nu+1} \int\limits_{y}^{\pi-y} \frac{|\sin(u+y)|}{\sin \frac{u}{2}} du\right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{p+1} \sum_{\nu=n-p}^{n} \left\{\frac{1}{\nu+1} + \frac{|\sin y|}{y(\nu+1)}\right\}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Аналогично,

$$I_2^* = O\left(\frac{1}{p+1} \sum_{\nu=n-p}^{n} \int\limits_{y}^{\pi+y} \frac{|\sin(u-y)|}{\sin \frac{u}{2}} du\right) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Из (5.32) и этих оценок следует, что

$$I^* = \left| \frac{1}{\pi(p+1)} \sum_{\nu=n-p}^{n} \frac{1}{\nu+1} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{y} \{\psi(y+u) - \psi(y-u)\} \frac{\cos \frac{2\nu+1}{2} u}{2 \sin \frac{u}{2}} du \right| + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{5.33}$$

где

$$\psi(z) = f'(\cos z) \sin z.$$

Представим I^* в следующем виде *:

$$I^* = \left| \frac{1}{\pi(p+1)(n+1)} \sum_{\nu=n-p}^{n} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{y} [\psi(y+u) - \psi(y-u)] \frac{\cos \frac{2\nu+1}{2} u}{2 \sin \frac{u}{2}} du + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi(p+1)} \sum_{\nu=n-p}^{n} \left(\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{n+1}\right) \int\limits_{\frac{1}{n}}^{y} [\psi(y+u) - \psi(y-u)] \frac{\cos \frac{2\nu+1}{2} u}{2 \sin \frac{u}{2}} du \right| +$$

$$+ O\left(\frac{1}{n}\right) = I' + I'' + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Рассуждения, аналогичные проведенным в работе ([12]), дают:

$$I' = \frac{1}{\pi(p+1)(n+1)} I_n, \quad |I''| \leqslant \frac{c}{(n-p+1)(n+1)} |I_N|, \tag{5.34}$$

* Этот прием был применен в работе ([12]).

где

$$I_N = \sum_{\nu=n-p}^{N} \int_{\frac{1}{n}}^{y} [\psi(y+u) - \psi(y-u)] \frac{\cos \frac{2\nu+1}{2} u}{2 \sin \frac{u}{2}} \, du, \tag{5.35}$$

а N — целое число, для которого

$$I_N = \max_{n-p \leqslant \nu \leqslant n} \sum_{i=n-p}^{\nu} \int_{\frac{1}{n}}^{y} [\psi(y+u) - \psi(y-u)] \frac{\cos \frac{2i+1}{2} u}{2 \sin \frac{u}{2}} \, du,$$

$$I_N = \int_{\frac{1}{n}}^{y} \{f'[\cos(y+u)] \sin(y+u) - f'[\cos(y-u)] \sin(y-u)\} A_N(u) \, du,$$

$$A_N(u) = \frac{\sin(N+1-n+p)\frac{u}{2} \cdot \cos(N+1+n-p)\frac{u}{2}}{2 \sin^2 \frac{u}{2}}.$$

Нетрудно видеть, что

$$|I_N| = \left| \int_{\frac{1}{n}}^{y} \{f'[\cos(y+u)] - f'[\cos(y-u)]\} \sin(y-u) A_N(u) \, du \right| +$$

$$+ O(p+1) = \left| \sin y \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \{f'[\cos(y+u)] - f'[\cos(y-u)]\} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\cos(N+1+n-p)\frac{u}{2} \cdot \sin(N+1-n+p)\frac{u}{2}}{2 \sin^2 \frac{u}{2}} \, du \right| + O(p+1). \tag{5.36}$$

Но [см. ([12])]

$$\frac{1}{\pi(p+1)} \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \left| \frac{\cos(N+1+n-p) \cdot \frac{u}{2} \cdot \sin(N+1-n+p)\frac{u}{2}}{2 \sin^2 \frac{u}{2}} \right| du =$$

$$= \frac{2}{\pi^2} \ln \frac{n}{p+1} + O(1). \tag{5.37}$$

Отсюда получаем:

$$|I_N| \leqslant c(p+1) \ln \frac{n}{p+1} + O(p+1) = O\left[(p+1) \ln \frac{n}{p+1}\right].$$

Следовательно,

$$I'' = O\left[\frac{p+1}{(n-p+1)(n+1)} \ln \frac{n}{p+1}\right] = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Итак,

$$I^* = \frac{1}{\pi(p+1)(n+1)} I_n + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Если учесть соотношения (5.36) и (5.37), в которых N следует заменить на n, то получим:

$$\mathscr{E}_n(H^{(1)}, x) = \frac{4}{\pi^2}\frac{|\sin y|}{n}\ln\frac{n}{p+1} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

т. е.

$$\mathscr{E}_n(H^{(1)}, x) = \frac{4}{\pi^2}\sqrt{1-x^2}\,\frac{1}{n}\ln\frac{n}{p+1} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $O(1)$ равномерно ограничено относительно всех x, всех p $(0 \leqslant p \leqslant n\theta,$ $\theta < 1)$ и всех $n = 1, 2, 3, \ldots$.

§ 6. Линейные процессы приближения алгебраическими многочленами

В этом параграфе рассматривается последовательность многочленов $u_n(f, x, \lambda)$ [см. (1.3)] и устанавливается асимптотическое поведение верхней грани отклонения $|f(x) - u_n(f, x, \lambda)|$, распространенной на класс $H^{(\alpha)}$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ функций $f(x)$.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 8. *Если система чисел $\lambda_k^{(n)}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n+1,$ $\lambda_0^{(n)} = 1,$ $\lambda_{n+1}^{(n)} = 0)$ относительно k является выпуклой и монотонно убывающей, т. е. если*

$$\Delta\lambda_k^{(n)} \geqslant 0, \quad \Delta^2\lambda_k^{(n)} \leqslant 0, \tag{6.1}$$

то при $n \to \infty$ и $0 < \alpha < 1$ справедливо асимптотическое равенство:

$$\mathscr{E}_n(H^{(\alpha)}, x, \lambda) = \frac{2^{\alpha+1}(\sqrt{1-x^2})^\alpha}{\pi^2 n^\alpha}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_k^{(n)}}{n-k+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin t\,dt + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \tag{6.2}$$

где $O(1)$ равномерно ограничено относительно всех x $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ и всех $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Доказательство. Очевидно, что верхняя грань

$$\mathscr{E}_n = \mathscr{E}_n(H^{(\alpha)}, x, \lambda) = \sup_{f\in H^{(\alpha)}}|f(x) - u_n(f, x, \lambda)|$$

не отличается от верхней грани $\mathscr{E}_n(\widetilde{H}^\alpha, y, \lambda)$, распространенной на уже рассмотренный нами класс $\widetilde{H}^\alpha$ (см. § 5) четных функций $\varphi(u)$ периода 2π, удовлетворяющих условиям (5.2) и (5.3):

$$\mathscr{E}_n \equiv \mathscr{E}_n(\widetilde{H}^\alpha, y, \lambda) = \sup_{\varphi\in\widetilde{H}^\alpha}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi(u)\{K_n(u+y) + K_n(u-y)\}\,du\right|, \tag{6.3}$$

где $K_n(u)$ определено в (1.7).

Рассмотрим

$$I(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi(u)\{K_n(u+y) + K_n(u-y)\}\,du. \tag{6.4}$$

После преобразования Абеля имеем:

$$I(\varphi) = \sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k^{(n)} S_k^*(\varphi, y),$$

где $S_k^*(\varphi, y)$ — частная сумма ряда Фурье порядка k четной функции $\varphi(t) = f(\cos t) \in \widetilde{H}^\alpha$.

Применяя еще раз преобразование Абеля, находим:

$$I(\varphi) = -\sum_{k=0}^{n-1} \Delta^2 \lambda_{n-k-1}^{(n)} (k+1)\, \sigma_{n,k}^{*}(\varphi, y) + (n+1)\, \Delta\lambda_0^{(n)} \sigma_{n,n}^{*}(\varphi, y), \qquad (6.5)$$

где $\sigma_{n,k}^{*}(\varphi, y)$ — усеченные средние сумм Фурье $S_k^{*}(\varphi, y)$ [см. (1.6)].

Из теоремы 7 вытекает, что

$$|\sigma_{n,k}^{*}(\varphi, y)| \leqslant \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2}\left(\frac{\sin y}{n}\right)^{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha} \sin t\, dt \cdot \ln \frac{n}{k+1} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right).$$

Кроме того, справедлива оценка

$$|\sigma_{n,n}^{*}(\varphi, y)| = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right).$$

Из этих оценок и равенства (6.5) следует:

$$|I(\varphi)| \leqslant \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2}\left(\frac{\sin y}{n}\right)^{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha} \sin t\, dt \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) |\Delta^2 \lambda_{n-k-1}^{(n)}| +$$

$$+ O\left(\frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) |\Delta^2 \lambda_{n-k-1}^{(n)}|\right) + O\,[|\Delta\lambda_0^{(n)}|\,(n+1)^{1-\alpha}]. \qquad (6.6)$$

Принимая во внимание (6.1), находим:

$$|I(\varphi)| \leqslant -\frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2}\left(\frac{\sin y}{n}\right)^{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha} \sin t\, dt \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, \Delta^2 \lambda_{n-k-1}^{(n)} \left\{ \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{i} + O(1) \right\} +$$

$$+ O\left\{-\frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, \Delta^2 \lambda_{n-k-1}^{(n)}\right\} + O\,\{(n+1)^{1-\alpha}(1-\lambda_1^{(n)})\},$$

или после преобразований Абеля:

$$|I(\varphi)| \leqslant \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2}\left(\frac{\sin y}{n}\right)^{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha} \sin t\, dt \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{n-k}^{(n)}}{k} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right), \qquad (6.7)$$

где $O(1)$ равномерно ограничено по всем y и всем $n = 1, 2, \ldots$. Учитывая (6.4), подставим в левую часть неравенства (6.7) функцию $\varphi(t) = \varphi_n(t)$, определенную в § 5 [см. (5.14), где $m = n$] и принадлежащую классу $\widetilde{H}^{\alpha}$. Она не зависит от k и поэтому обратит неравенство (6.7) в асимптотическое равенство (см. § 5). Отсюда вытекает:

$$\mathcal{E}_n \equiv \mathcal{E}_n(H^{(\alpha)}, x, \lambda) = \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha} \sin t\, dt \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k^{(n)}}{n-k+1} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right),$$

где $O(1)$ равномерно ограничено относительно всех $x\ (-1 \leqslant x \leqslant 1)$ и всех $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Теорема доказана. При $\lambda_k^{(n)} = 1$ она была ранее получена в работе ([11]).

Очевидным следствием теоремы 8 является

ТЕОРЕМА 9. *Для того чтобы линейный процесс* $u_n(f, x, \lambda)$ *с матрицей* $\lambda_k^{(n)}$, *удовлетворяющей условиям* (6.1), *при* $n \to \infty$ *осуществлял на*

классах $H^{(\alpha)}$ $(0<\alpha<1)$ *приближение того же порядка, что и* $\sup\limits_{f} E_n(f)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение:*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k^{(n)}}{n-k+1} = O(1). \tag{6.7'}$$

ТЕОРЕМА 10. *Если матрица* $\lambda_k^{(n)}$ *такова, что система чисел*

$$\mu_k^{(n)} = \frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k} \quad (k=1,\,2,\,\ldots,\,n+1;\ \mu_0=0)$$

удовлетворяет условиям:

$$\Delta\mu_k^{(n)} \leqslant 0, \quad \Delta^2\mu_k^{(n)} \geqslant 0, \tag{6.8}$$

то имеет место следующее асимптотическое равенство:

$$\mathscr{E}_n(H^{(1)},\,x,\,\lambda) = \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_k^{(n)}}{n-k+1}\right| + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{6.9}$$

Доказательство. Как уже отмечалось в п. 2 § 5, класс $H^{(1)}$ совпадает с классом W функций $f(x)$, обладающих почти всюду производной $f'(x)$, $|f'(x)|\leqslant 1$, и поэтому:

$$\mathscr{E}_n(H^{(1)},\,x,\,\lambda) = \sup_{f\in W}|\,f(x)-u_n(f,\,x,\,\lambda)\,|.$$

Из (1.3) после интегрирования по частям следует:

$$|\,f(x)-u_n(f,\,x,\,\lambda)\,| = r_n(f,\,x,\,\lambda) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left|\sum_{k=0}^{n+1}\mu_k^{(n)}\cos ky\int_0^{\pi} f'(\cos t)\sin t\cdot\sin kt\,dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{\cos ky}{k}\int_0^{\pi} f'(\cos t)\sin t\cdot\sin kt\,dt\right|.$$

Применяя преобразование Абеля, получим:

$$r_n(f,\,x,\,\lambda) = \left|-\sum_{k=0}^{n}\Delta\mu_k^{(n)}\overline{S}_k(\psi,\,y) + \right.$$

$$+ \frac{1}{\pi(n+1)}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(t+y)\,\frac{\cos\frac{t}{2}-\cos\left(n+\frac{3}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt +$$

$$\left. + \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}\psi(t)\,\{\overline{D_{n+1}^{(1)}}(t-y) + \overline{D_{n+1}^{(1)}}(t+y)\}\,dt\right|,$$

где

$$\overline{D_{n+1}^{(1)}}(t) = \sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{\cos kt}{k},$$

а

$$\overline{S}_k(\psi,\,y) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(t+y)\,\frac{\cos\frac{t}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt \tag{6.10}$$

есть частная сумма порядка k ряда, сопряженного к ряду Фурье функции $\psi(y) = f'(\cos y)\sin y$.

Учитывая, что

$$\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \psi(t+y)\frac{\cos\frac{t}{2}-\cos\left(n+\frac{3}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt = O(1),$$

$$\int_{y-\frac{1}{n}}^{y+\frac{1}{n}} \psi(t)\, D_{n+1}^{(1)}(t\pm y)\,dt = O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{6.11}$$

имеем:

$$r_n(f, x, \lambda) = \Bigg| -\sum_{k=0}^{n} \Delta\mu_k^{(n)}\, \overline{S}_k(\psi, y) +$$

$$+\frac{1}{\pi(n+1)}\left\{\int_{-\pi}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \psi(t+y)\frac{\cos\frac{t}{2}-\cos\left(n+\frac{3}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right\}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\left\{\int_{0}^{y-\frac{1}{n}} + \int_{y+\frac{1}{n}}^{\pi} \psi(t)\, \overline{D_{n+1}^{(1)}}(t-y)\,dt\right\} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\psi(t)\, D_{n+1}^{(1)}(t+y)\,dt\Bigg|.$$

Применяя тождество (5.23.1), а также тождество

$$\sum_{k=0}^{n}\Delta\mu_k^{(n)} = -\frac{1}{n+1},$$

получим:

$$r_n(f, x, \lambda) = \Bigg|\sum_{k=0}^{n}\Delta\mu_k^{(n)}\,[\overline{\psi}_n(y) - \overline{S}_k(\psi, y)] -$$

$$-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\int_{\frac{1}{n}}^{\pi-y}\psi(y+u)\frac{\cos\left(n+\frac{3}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du +$$

$$+\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\psi(y-u)\frac{\cos\left(n+\frac{3}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du -$$

$$-\frac{1}{\pi(n+1)}\int_{\pi-y}^{\pi}\psi(y+u)\frac{\cos\left(n+\frac{3}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du - \frac{1}{\pi(n+2)}\int_{\pi}^{\pi+y}\psi(y-u)\cdot$$

$$\cdot\frac{\cos\left(n+\frac{3}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du + I_1^{(n+2)} + I_2^{(n+2)} + I_3^{(n+2)} - I_4^{(n+2)} - I_5^{(n+2)} - I_6^{(n+2)}\Bigg| + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

где

$$\overline{\psi}_n(y) = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\{\psi(y-u)-\psi(y+u)\}\frac{du}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{u}{2}},$$

а $I_r^{(n+2)}$ $(r = 1, 2, \ldots, 6)$ — интегралы, определенные в (5.25).

Если учесть соотношения (5.26) — (5.31), а также неравенства

$$\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\pi} \psi(y-u)\,\frac{\cos\left(n+\frac{3}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\left|\int\limits_{\pi}^{\pi\pm y} \psi(y\mp u)\,\frac{\cos\left(n+\frac{3}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du\right| = O(1), \tag{6.12}$$

то получим:

$$r_n(f, x, \lambda) = \left|\sum_{k=0}^{n} \Delta\mu_k^{(n)}\{\bar{\psi}_n(y) - \bar{S}_k(\psi, y)\}\right| + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{6.13}$$

После преобразования Абеля находим из (6.13), что

$$r_n(f, x, \lambda) = \left|-\sum_{k=0}^{n-1} \Delta^2\mu_{n-k-1} \sum_{i=n-k}^{n} [\bar{\psi}_n(y) - \bar{S}_i(\psi, y)] -\right.$$

$$\left.-\mu_1^{(n)}\sum_{i=0}^{n}[\bar{\psi}_n(y) - \bar{S}_i(\psi, y)]\right| + O\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \left|-\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,\Delta^2\mu_{n-k-1}[\bar{\psi}_n(y) - \bar{\sigma}_{n,k}(\psi, y)] -\right.$$

$$\left.-\mu_1^{(n)}(n+1)[\psi_n(y) - \bar{\sigma}_{n,n}(\psi, y)]\right| + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{6.14}$$

где

$$\bar{\sigma}_{n,k}(\psi, y) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=n-k}^{n} \bar{S}_i(\psi, y). \tag{6.15}$$

Из (6.10) и (6.15) следует, что

$$\bar{\sigma}_{n,k}(\psi, y) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \psi(t)\,Q_{n,k}(t-y)\,dt, \tag{6.16}$$

где

$$Q_{n,k}(u) = \frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{u}{2}} - \frac{\cos\frac{2n-k+1}{2}\sin\frac{k+1}{2}u}{2(k+1)\sin^2\frac{u}{2}}. \tag{6.17}$$

Принимая во внимание, что

$$\int\limits_{y-\frac{1}{n}}^{y+\frac{1}{n}} \psi(t)\,Q_{n,k}(t-y)\,dt = O(1),$$

оценим уклонение $|\bar{\sigma}_{n,k}(\psi, y) - \bar{\psi}_n(y)|$ с точностью до ограниченных величин [см. ([17])]:

$$|\psi_n(y) - \bar{\sigma}_{n,k}(\psi, y)| = \left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\pi}[\psi(y-u) - \psi(y+u)]\,\frac{du}{2\operatorname{tg}\frac{u}{2}} +\right.$$

$$+\frac{1}{\pi}\left\{\int\limits_{-\pi}^{y-\frac{1}{n}} + \int\limits_{y+\frac{1}{n}}^{\pi} \psi(t)\left[\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{t-y}{2}} - \frac{\cos\frac{2n-k+1}{2}(t-y)\sin\frac{k+1}{2}(t-y)}{2(k+1)\sin^2\frac{t-y}{2}}\right]dt\right\} +$$

$$+O(1)=\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\pi}[\psi(y-u)-\psi(y+u)]\frac{du}{2\operatorname{tg}\frac{u}{2}}-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\pi+y}\psi(y-u)\frac{du}{2\operatorname{tg}\frac{u}{2}}+\right.$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\pi-y}\psi(y+u)\frac{du}{2\operatorname{tg}\frac{u}{2}}+\frac{1}{\pi(k+1)}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\pi-y}\psi(u+y)\frac{\cos\frac{2n-k+1}{2}u\sin\frac{k+1}{2}u}{2\sin^2\frac{u}{2}}du-$$

$$\left.-\frac{1}{\pi(k+1)}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\pi+y}\psi(y-u)\frac{\cos\frac{2n-k+1}{2}u\sin\frac{k+1}{2}u}{2\sin^2\frac{u}{2}}du\right|+O(1).$$

Из неравенств

$$\left|\int\limits_{\pi}^{\pi\pm y}\psi(y\mp u)\frac{du}{2\operatorname{tg}\frac{u}{2}}\right|=O(1),$$

$$\left|\int\limits_{\pi-y}^{\pi+y}\psi(y-u)\frac{\cos\frac{2n-k+1}{2}u\sin\frac{k+1}{2}u}{2\sin^2\frac{u}{2}}\right|=O(k+1)$$

следует, что

$$|\bar{\psi}_n(y)-\bar{\sigma}_{n,k}(\psi,y)|=$$

$$=\frac{1}{\pi(k+1)}\left|\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\pi-y}[\psi(y+u)-\psi(y-u)]\frac{\cos\frac{2n-k+1}{2}u\sin\frac{k+1}{2}u}{2\sin^2\frac{u}{2}}du\right|+O(1)=$$

$$=\frac{1}{\pi(k+1)}\left|\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\pi-y}\{f'[\cos(y+u)]-f'[\cos(y-u)]\}\sin(y-u)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\cos\frac{2n-k+1}{2}u\sin\frac{k+1}{2}u}{2\sin^2\frac{u}{2}}du\right|+O(1),\qquad(6.18)$$

ибо

$$\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\pi-y}f'[\cos(y+u)]\{\sin(y+u)+\sin(y-u)\}\frac{\cos\frac{2n-k+1}{2}u\sin\frac{k+1}{2}u}{2\sin^2\frac{u}{2}}du=O(k+1).$$

Из (6.18) вытекает:

$$|\bar{\psi}_n(y)-\bar{\sigma}_{n,k}(\psi,y)|=\frac{\sin y}{\pi(k+1)}\left|\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\pi-y}\{f'[\cos(y+u)]-f'[\cos(y-u)]\}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\cos\frac{2n-k+1}{2}u\sin\frac{k+1}{2}u}{2\sin^2\frac{u}{2}}du\right|+O(1)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2\sin y}{\pi(k+1)}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\pi}\left|\frac{\cos\frac{2n-k+1}{2}u\sin\frac{k+1}{2}u}{2\sin^2\frac{u}{2}}\right|du+O(1).\qquad(6.19)$$

Учитывая, что, согласно (5.37),

$$\frac{1}{\pi(k+1)}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\left|\frac{\cos\frac{2n-k+1}{2}u\sin\frac{k+1}{2}u}{2\sin^2\frac{u}{2}}\right|du=\frac{2}{\pi^2}\ln\frac{n}{k+1}+O(1),$$

находим, что

$$|\bar{\psi}_n(y)-\bar{\sigma}_{n,k}(\psi,y)|\leqslant\frac{4\sin y}{\pi^2}\ln\frac{n}{k+1}+O(1)$$

равномерно относительно всех y и k $(0\leqslant k\leqslant n)$.

Возвращаясь к (6.14), получим:

$$r_n(f,x,\lambda)\leqslant\frac{4\sin y}{\pi^2}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,|\,\Delta^2\mu_{n-k-1}|\ln\frac{n}{k+1}+$$
$$+O\left(\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,|\,\Delta^2\mu_{n-k-1}|\right)+O\left[(n+1)\,|\,\mu_1^{(n)}|\right]+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Принимая во внимание условия теоремы, имеем:

$$r_n(f,x,\lambda)\leqslant\frac{4\sin y}{\pi^2}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,\Delta^2\mu_{n-k-1}\left\{\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{i}+O(1)\right\}+$$
$$+O\left[\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,\Delta^2\mu_{n-k-1}\right]+O[(n+1)(1-\lambda_1^{(n)})]+O\left(\frac{1}{n}\right)=$$
$$=\frac{4\sqrt{1-x^2}}{\pi^2}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k(n-k+1)}-\frac{\ln n}{n}\right|+O\left(\frac{1}{n}\right)=$$
$$=\frac{4\sqrt{1-x^2}}{\pi^2}\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_k^{(n)}}{n-k+1}\right|+O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{6.20}$$

Рассмотрим функцию $f_y(u)$, для которой

$$f_y'[\cos t]=\operatorname{sign}\left\{\frac{\cos\frac{2n+1}{2}(t-y)}{t-y}\right\}. \tag{6.21}$$

Подставив ее в $r_n(f,x,\lambda)$, будем иметь [см. (6.14)]:

$$r_n[f_y,x,\lambda]=\left|-\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,\Delta^2\mu_{n-k-1}[\bar{\psi}_n^0(y)-\bar{\sigma}_{n,k}(\psi^0,y)]-\right.$$
$$\left.-\mu_1^{(n)}(n+1)[\bar{\psi}_n^0(y)-\bar{\sigma}_{n,n}(\psi^0,y)]\right|+O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{6.22}$$

где индекс 0 указывает на то, что в соответствующие выражения подставлена функция (6.21).

Из (6.19) получаем:

$$|\bar{\psi}_n^0(y)-\bar{\sigma}_{n,k}(\psi^0,y)|=\frac{\sin y}{\pi(k+1)}\left|\int_{\frac{1}{n}}^{\pi-y}\{f_y'[\cos(y+u)]-f_y'[\cos(y-u)]\}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\frac{\cos\frac{2n-k+1}{2}u\sin\frac{k+1}{2}u}{2\sin^2\frac{u}{2}}du\right|+O(1)=\frac{\sin y}{\pi(k+1)}\left|\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{k+1}}\{f_y'[\cos(y+u)]-\right.$$
$$\left.-f_y'[\cos(y-u)]\}\frac{\cos\frac{2n-k+1}{2}u\sin\frac{k+1}{2}u}{2\sin^2\frac{u}{2}}du\right|+O(1).$$

Принимая во внимание неравенства:

$$\frac{1}{\sin^2 u} - \frac{1}{u^2} = O(1) \quad \left(|u| \leqslant \frac{3\pi}{4}\right),$$

$$\frac{1}{k+1} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{k+1}} \left\{ \frac{\sin \frac{k+1}{2} u}{u^2} - \frac{k+1}{2u} \right\} du = O(1),$$

находим, что

$$|\bar{\psi}_n^0(y) - \bar{\sigma}_{n,k}(\psi^0, y)| =$$

$$= \frac{\sin y}{\pi} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{k+1}} \{f'_y[\cos(y+u)] - f'_y[\cos(y-u)]\} \frac{\cos \frac{2n-k+1}{2} u}{u} du + O(1) =$$

$$= \frac{\sin y}{\pi} \left| \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{k+1}} \{f'_y[\cos(y+u)] - f'_y[\cos(y-u)]\} \frac{\cos \frac{2n+1}{2} u}{u} du \right| + O(1) =$$

$$= \frac{\sin y}{\pi} \left| \int\limits_{y-\frac{\pi}{k+1}}^{y-\frac{1}{n}} + \int\limits_{y+\frac{1}{n}}^{y+\frac{\pi}{k+1}} f'_y[\cos t] \frac{\cos \frac{2n+1}{2}(t-y)}{t-y} dt \right| + O(1) =$$

$$= \frac{\sin y}{\pi} \left\{ \int\limits_{y-\frac{\pi}{k+1}}^{y-\frac{1}{n}} + \int\limits_{y+\frac{1}{n}}^{y+\frac{\pi}{k+1}} \left| \frac{\cos \frac{2n+1}{2}(t-y)}{t-y} \right| dt \right\} + O(1) =$$

$$= \frac{2\sin y}{\pi} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{k+1}} \left| \frac{\cos \frac{2n+1}{2} u}{u} \right| du = \frac{4}{\pi^2} \sin y \ln \frac{n}{k+1} + O(1). \qquad (6.23)$$

Так как функция $f_y(t)$ не зависит от k, то из (6.20), (6.22) и (6.23) следует, что

$$\mathscr{E}_n(H^{(1)}, x, \lambda) = \frac{4\sqrt{1-x^2}}{\pi^2 n} \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k^{(n)}}{n-k+1} \right| + O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad (6.9)$$

где $O(1)$ равномерно ограничено относительно всех x и n.

При $\lambda_k^{(n)} = 1$ эта теорема была доказана ранее в работе ([6]).

Из теоремы 10 вытекает

ТЕОРЕМА 11. *Для того чтобы линейный процесс $u_n(f, x, \lambda)$ с матрицей $\lambda_k^{(n)}$, удовлетворяющей условиям (6.8), при $n \to \infty$ осуществлял на классе $H^{(1)}$ приближение того же порядка, что и $\sup\limits_f E_n(f)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k^{(n)}}{n-k+1} = O(1). \qquad (6.24)$$

Поступило
25.VI. 1957

ЛИТЕРАТУРА

[1] Абрамов Л. М., Об асимптотическом поведении функций Лебега некоторых методов суммирования рядов П. Л. Чебышева, Доклады Ак. наук СССР, 48 (1954), 173—176.

[2] Ганзбург И. М., О приближении функций с заданным модулем непрерывности суммами П. Л. Чебышева, Доклады Ак. наук СССР, 41 (1953), 1253—1256.

[3] Ганзбург И. М., Обобщение некоторых результатов С. М. Никольского и А. Ф. Тимана, Доклады Ак. наук СССР, 116, № 5 (1957), 727 — 730.

[4] Колмогоров А. Н., Zur Grössenordnung des Restgliedes Fourierscher Reihen differenzierbarer Functionen, Ann. Math., 36 (1935), 521—526.

[5] Nagy B., Méthodes de sommation des séries de Fourier. I, Acta Sci. Math., Szeged, 12 (1950), 204—210.

[6] Никольский С. М., О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 10 (1946), 295—318.

[7] Никольский С. М., О линейных методах суммирования рядов Фурье, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 12 (1948), 259—278.

[8] Никольский С. М., Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, XV (1945), 1—76.

[9] Никольский С. М., Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 4 (1940), 501—508.

[10] Пинкевич В. Т., О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Weyl'я, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 4 (1940), 521—528.

[11] Тиман А. Ф., Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица, обыкновенными многочленами, Доклады Ак. наук СССР, 27 (1951), 969—972.

[12] Тиман А. Ф., Аппроксимативные свойства линейных методов суммирования рядов Фурье, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 17 (1953), 99—133.

[13] Тиман А. Ф., О линейных процессах приближения алгебраическими многочленами, функциях Лебега и некоторых приложениях к рядам Фурье, Доклады Ак. наук СССР, 101 (1955), 221—224.

[14] Тиман А. Ф., О константах Лебега для некоторых методов суммирования, Доклады Ак. наук СССР, 11 (1948), 989—992.

[15] Тиман А. Ф., О некоторых методах суммирования рядов Фурье, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 14 (1950), 85—94.

[16] Тиман А. Ф., Тучинский Л. И., Приближение дифференцируемых функций, заданных на конечном отрезке, алгебраическими многочленами, Доклады Ак. наук СССР, 111 (1956), 771—772.

[17] Щербина А. Д., Об одном методе суммирования рядов, сопряженных рядам Фурье, Матем. сборн., 27 (69): 2 (1950), 157—170.

[18] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.— Л., 1935.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 811–840

П. Л. УЛЬЯНОВ

О БЕЗУСЛОВНОЙ СХОДИМОСТИ И СУММИРУЕМОСТИ

(*Представлено академиком* **С. Л. Соболевым**)

В работе исследуется взаимосвязь безусловной сходимости и суммируемости тригонометрических рядов. Аналогичный вопрос рассматривается и для ортогональных рядов.

Введение

Некоторые из результатов этой работы непосредственно примыкают к результатам работ автора (8),(9).

Настоящая работа состоит из трех параграфов.

В § 1 доказываются некоторые вспомогательные результаты, которыми мы пользуемся в следующих параграфах.

§ 2 посвящен изучению тригонометрических рядов. В частности, в этом параграфе показывается, что безусловная суммируемость тригонометрического ряда эквивалентна безусловной сходимости с точностью до множества меры нуль (см. следствие 4). Кроме того, доказывается, что переставленные ряды Фурье функций $f(x) \in L^p(0, 2\pi)$ при $p < 2$, вообще говоря, почти всюду не суммируемы любыми методами Тёплица (см. теорему 6 и следствие 5).

В § 3 рассматриваются ортогональные ряды и выясняется, при каких условиях получаются результаты, аналогичные результатам для тригонометрических рядов (см. теоремы 7, 8).

С другой стороны, в этом параграфе сделана попытка объяснения того случая, когда для ортогональных рядов получается результат, отличный от результатов для тригонометрических рядов (см. теоремы 9, 10 и замечание 10).

§ 1. Вспомогательные результаты

Пусть $\{\psi_k(x)\}$ — ортонормированная система, состоящая из ограниченных функций, определенных на отрезке $[0, 1]$. В работе Д. Е. Меньшова [см. (5), теорема 4] по существу доказано, что если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k(x)$ всюду расходится на $[0, 1]$, то его можно так «разбавить» нулями, чтобы вновь полученный ряд всюду на $[0, 1]$ не суммировался наперед заданным методом Тёплица T *.

---

* В этом же направлении (разбавление нулями) имеется результат В. М. Даревского (2) для числового ряда и результат А. М. Олевского (6) для функционального ряда (члены которого ограничены) при наперед заданном счетном множестве методов суммирования Тёплица T_i.

Этот результат Д. Е. Меньшова допускает обобщение. Предварительно введем обозначения и докажем ряд лемм.

Через $T = \|a_{n,m}\|$ мы будем обозначать регулярные матричные методы суммирования Тёплица, а через $T^* = \|a_{n,m}\|$ — такие методы Тёплица, у которых третье условие опущено, т. е. не требуется сходимость рядов

$$\sum_{m=0}^{\infty} |a_{n,m}| \quad (n \geqslant n_0)$$

и, тем более, ограниченность их сумм в совокупности.

ЛЕММА 1. *Пусть $T^* = \|a_{n,m}\|$ — некоторый метод суммирования. Тогда найдется последовательность положительных чисел η_k таких, что если последовательность $\{S_k\}$ удовлетворяет неравенству $|S_k| \leqslant \eta_k$, то последовательность $\{S_k\}$ суммируема методом T^* к нулю.*

Доказательство. Так как

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,m} = 0 \quad (m = 0, 1, \ldots),$$

то для каждого m найдется такое B_m, что $|a_{n,m}| \leqslant B_m$ при всех $n = 0, 1, \ldots$. Положим

$$\eta_m = \frac{1}{(m+1)^2 (B_m + 1)} \quad (m = 0, 1, \ldots).$$

Покажем, что эта последовательность удовлетворяет требованиям леммы. В самом деле, пусть $|S_k| \leqslant \eta_k$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое M, что при $n \geqslant M$

$$\left| \sum_{m=0}^{\infty} S_m a_{n,m} \right| \leqslant \sum_{m=0}^{N} |S_m|\,|a_{n,m}| + \sum_{m=N+1}^{\infty} \eta_m B_m < \varepsilon,$$

если N и M подобраны подходящим образом.

Из леммы 1 непосредственно вытекает следующее утверждение:

если сходящийся ряд $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = S$ таков, что $S_k = \sum_{n=0}^{k} b_n = S + \alpha_k$ с $|\alpha_k| \leqslant \eta_k$ при $k \geqslant k_0$, то этот ряд суммируем методом T^* к S.

ЛЕММА 2. *Пусть ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(h)}(x) \quad (h = 1, 2, \ldots)$$

сходится на множестве $E^{(h)}$ с $mE^{(h)} > 0$ и $\varepsilon_k \downarrow 0$ — некоторая последовательность положительных чисел. Тогда можно найти такую последовательность $n_1 < n_2 < \ldots$ и такое множество $E_1^{(h)} \subset E^{(h)}$ с $mE_1^{(h)} = mE^{(h)}$, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k}^{(h)}(x) \quad (h = 1, 2, \ldots)$$

сходится на $E_1^{(h)}$ к функции $F^{(h)}(x)$ и при этом для $x_0 \in E_1^{(h)}$

$$\left| F^{(h)}(x_0) - \sum_{k=1}^{N} f_{n_k}^{(h)}(x_0) \right| \leqslant \varepsilon_N \text{ при } N \geqslant N_0(x_0, h).$$

Доказательство. В силу теорем Егорова и Лузина, для каждого h можно найти совершенные множества

$$P_1^{(h)} \subset P_2^{(h)} \subset \ldots \subset P_n^{(h)} \subset \ldots \subset E^{(h)} \quad \left(mP_n^{(h)} > mE^{(h)} - \frac{1}{n}\right),$$

на каждом из которых все функции $f_i^{(h)}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ непрерывны, а ряд $\sum_{i=1}^{\infty} f_i^{(h)}(x)$ сходится равномерно. Положим

$$E_1^{(h)} = \lim_{n\to\infty} P_n^{(h)}.$$

Ясно, что $mE_1^{(h)} = mE^{(h)}$. Пусть

$$\sup_{x\in P_n^{(h)}} |f_m^{(h)}(x)| = \delta_m^{(n,h)} \text{ и } \alpha_m^{(n,h)} = \sup_{i\geqslant m} \{\delta_i^{(n,h)}\}.$$

Очевидно, что $\alpha_m^{(n,h)} \to 0$ при $m\to\infty$ (для фиксированных n и h).

Выберем n_1 таким, чтобы

$$\alpha_{n_1}^{(1,1)} < \frac{\varepsilon_1}{2^1}.$$

Предположим, что $n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1}$ уже подобраны. Найдем $n_k > n_{k-1}$ так, чтобы

$$|\alpha_{n_k}^{(i,j)}| < \frac{\varepsilon_k}{2^k} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, k).$$

Покажем, что $\{n_p\}$ — искомая последовательность.

Пусть $x_0 \in E_1^{(h)}$. Тогда найдется такое m_0, что $x_0 \in P_{m_0}^{(h)}$ и потому при $N > \max(m_0, h)$

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |f_{n_k}^{(h)}(x_0)| \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} \delta_{n_k}^{(m_0,h)} \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} \alpha_{n_k}^{(m_0,h)} \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^k} \leqslant \varepsilon_N,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Если нам понадобится выделить из сходящихся рядов сходящиеся «подряды» такие, чтобы при «разбавлении» нулями (не чаще чем через один член) порядок приближения их частных сумм к предельным суммам все-таки был $\leqslant \varepsilon_N$, то для этого достаточно выбрать n_k так, чтобы

$$|\alpha_{n_k}^{(i,j)}| \leqslant \frac{\varepsilon_{2k}}{2^{2k}} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, k).$$

Теперь мы можем перейти к обобщению результата Д. Е. Меньшова. Именно, справедлива

ЛЕММА 3 (основная). *Пусть $b_k^{(h)}(x)$ — измеримые и конечные почти всюду функции на множестве $E^{(h)}$ $(mE^{(h)} > 0)$ и ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(h)}(x) \quad (h = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

расходится на множестве $E^{(h)} \subset [a, b]$. Пусть, далее, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(h)}(x) \quad (h = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

сходится на $E^{(h)}$ к функции $M^{(h)}(x)$. Если $T^* = \|a_{n,m}\|$ — некоторый метод суммирования Тёплица, то для каждого h ряд (1) можно «разбавить» всеми членами ряда (2) при том же h так, чтобы вновь полученный ряд не суммировался методом T^* на множестве $E_1^{(h)} \subset E^{(h)}$ с $mE_1^{(h)} = mE^{(h)}$. Точнее, если $S_m^{(h)} = \sum_{k=0}^{m} b_k^{(h)}(x)$, а $\sigma_m^{(h)}(x)$ — средние Тёплица «разбавленного» ряда, то на $E_1^{(h)}$

$$\underline{\lim}_{m\to\infty} \sigma_m^{(h)}(x) \leqslant \underline{\lim}_{m\to\infty} S_m^{(h)}(x) + M^{(h)}(x) \leqslant \overline{\lim}_{m\to\infty} S_m^{(h)}(x) + M^{(h)}(x) \leqslant \overline{\lim}_{m\to\infty} \sigma_m^{(h)}(x). \quad (2')$$

При этом метод «разбавления» одинаков для всех h.

Доказательство. На основании леммы 1 найдем последовательность положительных чисел η_{l_k} и после этого выделим (см. лемму 2 и замечание к ней) из рядов (2) сходящиеся почти всюду на $E^{(h)}$ к $M_1^{(h)}(x)$ «подряды» таким образом, чтобы при их «разбавлении» нулями (не чаще чем через один член) их частные суммы n-го порядка отличались от $M_1^{(h)}(x)$ не более чем на η_n при n достаточно больших.

Все остальные члены из рядов (2) (которые не вошли в выделенные «подряды») расположим в порядке возрастания индексов последовательно по одному между членами соответствующего ряда из (1). Очевидно, что это не может нарушать расходимости рядов (1). Поэтому (чтобы не менять обозначений) мы можем считать, что ряд (2) сходится достаточно быстро, т. е. так, как сказано выше о «подрядах».

Так как $b_j^{(h)}(x)$ — измеримые на $E^{(h)}$ функции, то, по теореме Н. Н. Лузина, можно построить последовательность вложенных замкнутых множеств

$$P_1^{(h)} \subset P_2^{(h)} \subset \ldots \subset E^{(h)} \quad (3)$$

таких, что все функции $\{b_j^{(h)}(x)\}$ будут непрерывны на каждом множестве $P_k^{(h)}$ и

$$\lim_{k\to\infty} mP_k^{(h)} = mE^{(h)}.$$

Положим

$$E_1^{(h)} = \lim_{k\to\infty} P_k^{(h)}. \quad (4)$$

Пусть

$$B_k = \sum_{h=1}^{k} \sup_{x\in P_k^{(h)}} \left\{1 + \sum_{i=0}^{k} |b_i^{(h)}(x)|\right\}. \quad (5)$$

Так как у нас дан метод суммирования T^*, то можно найти такие l_0 и n_0, что

$$\left|1 - \sum_{m=0}^{\infty} a_{l_0,m}\right| < \frac{1}{4^2 B_1}, \quad \left|\sum_{m=j}^{\infty} a_{p,m}\right| < \frac{1}{4^2 B_1} \text{ при } j \geqslant n_0,\ p \leqslant l_0.$$

Пусть $\{l_i\}$, $\{n_i\}$ для $i = 0, 1, \ldots, k-1$ уже определены. Тогда определяем $l_k > l_{k-1}$ так, чтобы *

$$\sum_{m=0}^{n_{k-1}} |a_{l_k,m}| < \frac{1}{4^{k+2} B_{k+1}}, \quad \left|1 - \sum_{m=n_{k-1}+1}^{\infty} a_{l_k,m}\right| < \frac{1}{4^{k+2} B_{k+1}}, \quad (6)$$

* В этой части доказательства мы примерно придерживаемся рассуждений, которые впервые были проведены Д. Е. Меньшовым [см. (5), теорема 4].

и после этого находим $n_k > n_{k-1} + k$ такое, для которого

$$\left| \sum_{m=j}^{\infty} a_{p,m} \right| < \frac{1}{4^{k+2} B_{k+1}} \quad \text{при } p \leqslant l_k \text{ и } j \geqslant n_k. \tag{7}$$

Теперь мы можем построить нужный нам ряд. Именно, определим новый ряд следующим образом:

$$b_0^{(h)}(x) + [c_0^{(h)}(x) + c_1^{(h)}(x) + \ldots + c_{n_0-1}^{(h)}(x_0)] + b_1^{(h)}(x) + [c_{n_0}^{(h)}(x) + c_{n_0+1}^{(h)}(x) + \ldots + c_{n_1-2}^{(h)}(x)] + b_2^{(h)}(x) + [c_{n_1-1}^{(h)}(x) + \ldots] + \ldots + b_k^{(h)}(x) + [c_{n_{k-1}-(k-1)}^{(h)}(x) + \ldots + c_{n_k-(k+1)}^{(h)}(x)] + b_{k+1}^{(h)}(x) + \ldots. \tag{8}$$

Обозначим через $A_m^{(h)}(x)$, $M_m^{(h)}(x)$, $A_m^{(h)'}(x)$ соответственно частные суммы рядов (1), (2) и (8).

Пусть $x_0 \in E_1^{(h)}$. Тогда [см. (3) и (4)] существует такое $j_0 > h$, что

$$x_0 \in P_j^{(h)} \quad \text{при } j \geqslant j_0 > h \quad (h \text{ фиксировано}). \tag{9}$$

Поэтому, на основании (5) и (7), легко убедиться, что ряды

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(h)'}(x_0)\, a_{n,m} \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

сходятся и потому $\sigma_n^{(h)}(x_0)$ имеют смысл.

Возьмем номер $k > j_0$. Тогда [см. (8)]

$$\sigma_{l_k}^{(h)}(x_0) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(h)'}(x_0)\, a_{l_k,m} = \sum_{i=0}^{\infty} A_i^{(h)}(x_0) \sum_{m=n_{i-1}+1}^{n_i} a_{l_k,m} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=n_{i-1}+1}^{n_i} M_{m-i-1}^{(h)}(x_0)\, a_{l_k,m} = F_1^{(h)}(x_0) + F_2^{(h)}(x_0) \quad (n_{-1} = -1). \tag{10}$$

Так как ряд (2) сходится достаточно быстро в точке x_0 и $n_i - i \to \infty$, то (см. следствие к лемме 1)

$$F_2^{(h)}(x_0) \to M^{(h)}(x_0) \text{ при } k \to \infty. \tag{11}$$

С другой стороны, в силу (3), (4), (5), (6) и (9),

$$\left| \sum_{i=0}^{k-1} A_i^{(h)}(x_0) \sum_{m=n_{i-1}+1}^{n_i} a_{l_k,m} \right| \leqslant \sum_{m=0}^{n_{k-1}} B_{k-1} |a_{l_k,m}| \leqslant B_{k+1} \frac{1}{4^{k+1} B_{k+1}} = \frac{1}{4^{k+1}}. \tag{12}$$

Поэтому [см. (6), (7), (10), (11) и (12)]

$$|\sigma_{l_k}^{(h)}(x_0) - M^{(h)}(x_0) - A_k^{(h)}(x_0)| \leqslant$$

$$\leqslant o(1) + \frac{1}{4^{k+1}} + \left| \sum_{i=k}^{\infty} A_i^{(h)}(x_0) \sum_{m=n_{i-1}+1}^{n_i} a_{l_k,m} - A_k^{(h)}(x_0) \right| \leqslant$$

$$\leqslant o(1) + \left| \sum_{i=k}^{\infty} [A_i^{(h)}(x_0) - A_k^{(h)}(x_0)] \sum_{m=n_{i-1}+1}^{n_i} a_{l_k,m} \right| +$$

$$+ \left| 1 - \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{m=n_{i-1}+1}^{n_i} a_{l_k,m} \right| |A_k^{(h)}(x_0)| \leqslant o(1) + \sum_{i=k+1}^{\infty} 2B_i \left| \sum_{m=n_{i-1}+1}^{n_i} a_{l_k,m} \right| +$$

$$+ \left| 1 - \sum_{m=n_{k-1}+1}^{\infty} a_{l_k,m} \right| B_k \leqslant o(1) + \sum_{i=k+1}^{\infty} 2B_i \frac{2}{4^{i+1} B_i} + \frac{B_k}{4^{k+2} B_{k+1}} = o(1), \tag{13}$$

т. е. [см. (13)]

$$\sigma_{l_k}^{(h)}(x_0) - M^{(h)}(x_0) - A_k^{(h)}(x_0) = o(1). \tag{14}$$

Но, по условию, $A_k^{(h)}(x_0)$ расходится при $k \to \infty$ и, следовательно, равенство (14) означает, что T^*-средние $\sigma_{l_k}^{(h)}(x_0)$ не имеют предела при $k \to \infty$. А так как x_0 — любая точка из $E_1^{(h)}$ [см. (4)], то лемма 3 полностью доказана, ибо неравенство (2′) непосредственно вытекает из (14).

Замечание 1. Если ряд (1) неограниченно расходится на некотором множестве $E_2^{(h)} \subset E^{(h)}$, то ряд (8) будет иметь почти всюду на $E_2^{(h)}$ неограниченные средние Тёплица T^*.

Теперь мы можем доказать, что справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Пусть функции* $f_k^{(h)}(x)$ *таковы, что*

$$\int\limits_{E^{(h)}} |f_k^{(h)}(x)|\, dx \leqslant D^{(h)} < \infty\,^* \quad (mE^{(h)} > 0; \quad k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{15}$$

и числовая последовательность $c_k^{(h)}$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{n_i \to \infty} c_{n_i}^{(h)} = 0 \quad \text{для всех } h = 1, 2, \ldots. \tag{16}$$

Тогда если ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(h)} f_k^{(h)}(x) \quad (h = 1, 2, \ldots) \tag{17}$$

расходится на множестве $E^{(h)}$, *то для любого метода Тёплица* T^* *члены ряда* (17) *для всякого* h *можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд*

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_{p_i}^{(h)} f_{p_i}^{(h)}(x) \tag{18}$$

не суммировался методом T^* *на множестве* $E_1^{(h)} \subset E^{(h)}$ *с* $mE_1^{(h)} = mE^{(h)}$. *Точнее, если* $S_m^{(h)}(x)$ — *частные суммы ряда* (17), *а* $\sigma_m^{(h)}(x)$ — *средние* T^* *ряда* (18), *то на* $E_1^{(h)}$

$$\varliminf_{m \to \infty} \sigma_m^{(h)}(x) \leqslant \varliminf_{m \to \infty} S_m^{(h)}(x) \leqslant \varlimsup_{m \to \infty} S_m^{(h)}(x) \leqslant \varlimsup_{m \to \infty} \sigma_m^{(h)}(x). \tag{18′}$$

При этом перестановка для всех рядов (17) *одна и та же.*

Доказательство. Из условия (16) вытекает, что найдется последовательность n_{i_j}, для которой

$$\sum_{j=0}^{\infty} |c_{n_{i_j}}^{(h)}| < \infty \quad (h = 1, 2, \ldots).$$

Следовательно [см. (15)], в силу теоремы Лебега, ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_{n_{i_j}}^{(h)} f_{n_{i_j}}^{(h)}(x) \quad (h = 1, 2, \ldots) \tag{19}$$

почти всюду на $E^{(h)}$ сходится (даже абсолютно). Поэтому, выбрасывая из ряда (17) те члены, которые вошли в ряд (19), мы получим новый

---

* Как будет указано далее (см. замечание 9), теорема 1 даже для случая $h = 1$ точная, т. е. ни условие (15), ни условие (16) нельзя заменить менее ограничительным.

ряд, который расходится почти всюду на $E^{(h)}$. По лемме 3, мы можем в этот ряд вставить члены ряда (19) по правилу, не зависящему от h, таким образом, чтобы вновь полученный ряд почти всюду на $E^{(h)}$ не суммировался методом T^* и чтобы выполнялось условие (18′). Но этот новый ряд есть не что иное, как переставленный ряд (17), т. е. ряд вида (18), что и требовалось доказать.

Замечание 2. *Если в предположениях теоремы* 1 *ряд* (17) *неограниченно расходится на множестве* $E_2^{(h)} \subset E^{(h)}$, *то члены ряда* (17) *можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд* (18) *имел почти всюду на* $E_2^{(h)}$ *неограниченные* T^**-средние.*

Это непосредственно вытекает из теоремы 1 и замечания 1.

ЛЕММА 4. *Пусть* $f_k(x)$, $\varphi_k(x)$ — *функции, измеримые и конечные почти всюду на* $[0,1]$. *Тогда если ряд*

$$\sum_{p=1}^{\infty} f_p(x) \tag{20}$$

расходится на множестве $E_1 \subset [0, 1]$, *а ряд*

$$\sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p(x) \tag{21}$$

расходится на множестве $E_2 \subset [0, 1]$, *то ряд* (20) *можно «разбавить» всеми членами ряда* (21) *так, чтобы вновь полученный ряд был почти всюду расходящимся на* $E_1 + E_2$.

Доказательство. Не ограничивая общности, мы можем считать, что $E_1E_2 = 0$, $mE_1 > 0$, $mE_2 > 0$. В противном случае доказательство проходит еще проще.

Пусть $E_1^{(1)} \subset E_1$ — множество тех точек, для которых

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \left| S_k^{(1)}(x) \right| = \overline{\lim_{k\to\infty}} \left| \sum_{p=1}^{k} f_p(x) \right| = +\infty, \tag{22}$$

а $E_2^{(1)} \subset E_2$ — множество тех точек, для которых

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \left| S_k^{(2)}(x) \right| = \overline{\lim_{k\to\infty}} \left| \sum_{p=1}^{k} \varphi_p(x) \right| = +\infty. \tag{23}$$

Положим $E_1^{(2)} = E_1 - E_1^{(1)}$ и $E_2^{(2)} = E_2 - E_2^{(1)}$. Очевидно, что

$$E_1 = E_1^{(1)} + E_1^{(2)}, \quad E_2 = E_2^{(1)} + E_2^{(2)}. \tag{24}$$

Согласно определению множеств $E_1^{(2)}$ и $E_2^{(2)}$ [см. также (22) и (23)], функции

$$\varepsilon_1^*(x) = \overline{\lim_{k\to\infty}} S_k^{(1)}(x) - \underline{\lim_{k\to\infty}} S_k^{(1)}(x), \quad \varepsilon_2^*(x) = \overline{\lim_{k\to\infty}} S_k^{(2)}(x) - \underline{\lim_{k\to\infty}} S_k^{(2)}(x)$$

положительны, измеримы и конечны, соответственно, на множестве $E_1^{(2)}$ и $E_2^{(2)}$. Положим

$$\varepsilon_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in E_1^{(1)}, \\ \dfrac{\varepsilon_1^*(x)}{2} & \text{при } x \in E_1^{(2)}, \end{cases}$$
$$\varepsilon_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in E_2^{(1)}, \\ \dfrac{\varepsilon_2^*(x)}{2} & \text{при } x \in E_2^{(2)}. \end{cases} \tag{25}$$

Пусть $P_1^{(i)}$ $(P_2^{(i)})$ — последовательность совершенных вложенных множеств таких, что

$$\begin{aligned} &P_1^{(1)} \subset P_1^{(2)} \subset \ldots \subset E_1, \quad mP_1^{(i)} > mE_1 - \frac{1}{i^2}, \\ &P_2^{(1)} \subset P_2^{(2)} \subset \ldots \subset E_2, \quad mP_2^{(i)} > mE_2 - \frac{1}{i^2}, \end{aligned} \tag{26}$$

и функции $f_k(x)$, $\varepsilon_1(x)$ непрерывны на $P_1^{(i)}$, а функции $\varphi_k(x)$, $\varepsilon_2(x)$ непрерывны на $P_2^{(i)}$. Положим

$$\eta_1^{(i)} = \min_{x \in P_1^{(i)}} \varepsilon_1(x), \quad \eta_2^{(i)} = \min_{x \in P_2^{(i)}} \varepsilon_2(x). \tag{27}$$

Из (25) и (26) вытекает, что числа $\eta_1^{(i)}$ и $\eta_2^{(i)}$ положительны. Пусть точка $x_0 \in P_1^{(i)}$. Так как ряд (20) расходится в точке x_0, то, согласно определению числа $\eta_1^{(i)}$ [см. (27)], найдется последовательность

$$\bar{\alpha}_1^{(i)}(x_0) < \bar{\beta}_1^{(i)}(x_0) < \ldots < \bar{\alpha}_k^{(i)}(x_0) < \bar{\beta}_k^{(i)}(x_0) < \ldots \tag{28}$$

такая, что

$$\left| \sum_{p=\bar{\alpha}_k^{(i)}(x_0)}^{\bar{\beta}_k^{(i)}(x_0)} f_p(x_0) \right| > \eta_1^{(i)} \text{ при } x_0 \in P_1^{(i)}. \tag{29}$$

Аналогично, найдется последовательность

$$\bar{\gamma}_1^{(i)}(x_0) < \bar{\delta}_1^{(i)}(x_0) < \ldots < \bar{\gamma}_k^{(i)}(x_0) < \bar{\delta}_k^{(i)}(x_0) < \ldots \tag{30}$$

такая, что

$$\left| \sum_{p=\bar{\gamma}_k^{(i)}(x_0)}^{\bar{\delta}_k^{(i)}(x_0)} \varphi_p(x_0) \right| > \eta_2^{(i)} \text{ при } x_0 \in P_2^{(i)}. \tag{31}$$

Отметим [см. (28), (30)], что

$$\bar{\alpha}_k^{(i)}(x_0) \geqslant k \text{ и } \bar{\gamma}_k^{(i)}(x_0) \geqslant k. \tag{32}$$

Пусть k_0 — некоторое фиксированное число. Берем любую точку $x_0 \in P_1^{(i)}$. В силу выбора множества $P_1^{(i)}$, из (29) вытекает, что для точки x_0 найдется окрестность $(x_0 - \eta_{x_0}, x_0 + \eta_{x_0})$ такая, что

$$\left| \sum_{p=\bar{\alpha}_{k_0}^{(i)}(x_0)}^{\bar{\beta}_{k_0}^{(i)}(x_0)} f_p(x) \right| > \eta_1^{(i)} \text{ при } x \in P_1^{(i)}(x_0 - \eta_{x_0}, x_0 + \eta_{x_0}). \tag{33}$$

Но множество $P_1^{(i)}$ совершенно и поэтому можно выбрать конечное число окрестностей, которые целиком покрывают множество $P_1^{(i)}$. Отметим, что в каждой окрестности на точках множества $P_1^{(i)}$ выполняется неравенство (33). А это и значит, что мы можем найти числа $\alpha_{k_0}^{(i)} < \beta_{k_0}^{(i)}$ такие, что для каждой точки $x_0 \in P_1^{(i)}$ найдутся целые числа $\alpha \leqslant \beta$, для которых

$$\left| \sum_{p=\alpha}^{\beta} f_p(x_0) \right| > \eta_1^{(i)}, \tag{34}$$

причем $\alpha_{k_0}^{(i)} \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \beta_{k_0}^{(i)}$. В силу же (32), не ограничивая общности, мы можем считать

$$\alpha_1^{(i)} < \beta_1^{(i)} < \ldots < \alpha_k^{(i)} < \beta_k^{(i)} < \ldots . \tag{35}$$

Аналогично, используя (31), мы можем построить последовательность

$$\gamma_1^{(i)} < \delta_1^{(i)} < \ldots < \gamma_k^{(i)} < \delta_k^{(i)} < \ldots,$$

которая обладает по отношению к ряду (21) таким же свойством, как последовательность (35) по отношению к ряду (20).

Подберем числа α, β, γ, δ так, чтобы

$$1 < \alpha_1^{(1)} < \beta_1^{(1)} < \alpha_{i_1}^{(2)} < \beta_{i_1}^{(2)} < \alpha_{i_2}^{(1)} < \beta_{i_2}^{(1)} < \alpha_{i_3}^{(2)} < \beta_{i_3}^{(2)} < \\ < \alpha_{i_4}^{(3)} < \beta_{i_4}^{(3)} < \alpha_{i_5}^{(1)} < \beta_{i_5}^{(1)} < \ldots \tag{36}$$

и

$$1 < \gamma_1^{(1)} < \delta_1^{(1)} < \gamma_{j_1}^{(2)} < \delta_{j_1}^{(2)} < \gamma_{j_2}^{(1)} < \delta_{j_2}^{(1)} < \ldots . \tag{37}$$

Образуем новый ряд следующим образом:

$$\sum_{p=1}^{\alpha_1^{(1)}-1} f_p(x) + \sum_{p=\alpha_1^{(1)}}^{\beta_1^{(1)}} f_p(x) + \sum_{p=1}^{\gamma_1^{(1)}-1} \varphi_p(x) + \sum_{p=\gamma_1^{(1)}}^{\delta_1^{(1)}} \varphi_p(x) + \sum_{p=\beta_1^{(1)}+1}^{\alpha_{i_1}^{(2)}-1} f_p(x) + \\ + \sum_{p=\alpha_{i_1}^{(2)}}^{\beta_{i_1}^{(2)}} f_p(x) + \sum_{p=\delta_1^{(1)}+1}^{\gamma_{j_1}^{(2)}-1} \varphi_p(x) + \sum_{p=\gamma_{j_1}^{(2)}}^{\delta_{j_1}^{(2)}} \varphi_p(x) + \ldots . \tag{38}$$

Покажем, что ряд (38) является искомым. В самом деле, пусть

$$M = \lim_{i\to\infty} P_1^{(i)} + \lim_{i\to\infty} P_2^{(i)} = M_1 + M_2.$$

Из (24) и (26) вытекает, что $mM = mE_1 + mE_2$. С другой стороны, если $x_0 \in M$, то $x_0 \in M_1$ или $x_0 \in M_2$. Пусть $x_0 \in M_1$. Из определения множества M_1 вытекает, что

$$x_0 \in P_1^{(i)} \quad \text{при} \quad i \geqslant i_0 = i_0(x_0). \tag{39}$$

А потому, на основании построения последовательности (36), в ряде (38) найдется бесконечно много пар $[\alpha(x_0), \beta(x_0)]$, для которых [см. (39), (34)]

$$\left| \sum_{p=\alpha(x_0)}^{\beta(x_0)} f_p(x_0) \right| > \eta_1^{(i_0)}.$$

А это и означает, что ряд (38) расходится в точках множества M_1. Аналогично, используя построение последовательности (37), мы получим, что ряд (38) расходится и в точках множества M_2, что и требовалось доказать.

Заметим, что содержание и доказательство леммы 4 остается справедливым и для счетного числа рядов

$$\sum_{p=1}^{\infty} f_p^{(i)}(x) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots), \tag{20'}$$

каждый из которых расходится, соответственно, на множестве E_i. Точнее, *ряд из* (20′) *при* $i = 0$ *можно «разбавить» всеми членами остальных ря-*

дов из (20′) *при* $i = 1, 2, \ldots$ *так, чтобы вновь полученный ряд был расходящимся почти всюду на множестве*

$$E = \sum_{i=0} E_i.$$

Легко видеть, что из леммы 4 вытекает

Следствие 1. *Если функциональный ряд* (20) *при некотором порядке членов расходится на множестве* E_1, *а при другом порядке — на множестве* E_2, *то найдется такая перестановка членов ряда* (20), *при которой вновь полученный ряд будет расходящимся почти всюду на* $E_1 + E_2$.

В самом деле, для этого сначала следует выделить из ряда (20) два «подряда», состоящих из разных членов и расходящихся, соответственно почти всюду на E_1 и E_2. После этого применяем к ним лемму 4, причем те члены из ряда (20), которые не вошли ни в один из «подрядо́в», следует помещать по одному между группами [см. (38)], образованными из «подрядо́в» ряда (20).

Отметим, что если использовать замечание, сделанное после леммы 4, то получим, что следствие справедливо не только для двух, но и для *счетного* числа множеств E_i, на каждом из которых ряд (20) расходится после некоторой перестановки членов.

Замечание 3. *Пусть* $f_k^{(h)}(x)$, $\varphi_k^{(h)}(x)$ — *функции, измеримые и конечные почти всюду на* [0,1]. *Тогда если ряд*

$$\sum_{p=1}^{\infty} f_p^{(h)}(x) \quad (h = 1, 2, \ldots) \tag{20''}$$

расходится на множестве $E_1^{(h)} \subset [0, 1]$, *а ряд*

$$\sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p^{(h)}(x) \quad (h = 1, 2, \ldots) \tag{21'}$$

расходится на множестве $E_2^{(h)} \subset [0, 1]$, *то ряд* (20″) *можно для каждого* h *«разбавить» всеми членами ряда* (21′) *при соответствующем* h *так, чтобы вновь полученный ряд был почти всюду расходящимся на* $E_1^{(h)} + E_2^{(h)}$. *При этом способ «разбавления» один и тот же для всех* h.

Доказательство сформулированного утверждения аналогично доказательству леммы 4.

Отметим, что как в лемме 4, так и в замечании 3, если один из данных рядов расходится неограниченно на некотором множестве M, то «разбавленный» ряд также можно сделать неограниченно расходящимся почти всюду на M.

§ 2. О безусловной сходимости и суммируемости тригонометрических рядов

В этом параграфе мы докажем основные результаты настоящей работы. Предварительно сделаем следующее замечание. Если мы имеем некоторый метод суммирования (T или $T^* = \|a_{n,m}\|$) и функциональный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ с $S_m(x) = \sum_{k=0}^{m} f_k(x)$, то под T-средним этого ряда будем

понимать

$$\sigma_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} S_m(x)\, a_{n,\, m} \tag{*}$$

для тех x, в которых написанный ряд сходится. В противном случае (т. е. когда $f_k(x)$ имеют смысл, но ряд (*) расходится) мы определяем абсолютное значение T-среднего. Именно, мы берем верхний предел

$$\overline{\lim_{M\to\infty}} \left| \sum_{m=0}^{M} S_m(x)\, a_{n,\, m} \right|$$

и обозначаем его через $|\sigma_n(x)|$. Ясно, что если $\sigma_n(x)$ имеет смысл, то абсолютная величина $\sigma_n(x)$ совпадает с

$$\overline{\lim_{M\to\infty}} \left| \sum_{m=0}^{M} S_m(x)\, a_{n,\, m} \right|.$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $T^* = \|a_{n,\, m}\|$ — *некоторый матричный метод суммирования Тёплица, а*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \cos(nx + \varphi_n) \tag{40}$$

— *тригонометрический ряд, обладающий следующим свойством: для каждой перестановки членов ряда* (40) *существует число* $A > 0$ *и множество* E *с* $mE > 0$ (*число* A *и множество* E *могут зависеть от перестановки*) *такие, что*

$$|\sigma_N(x)| = \overline{\lim_{k\to\infty}} \left| \sum_{m=0}^{k} S_m(x)\, a_{N,\, m} \right| \leqslant A < \infty \quad \text{для всех} \quad x \in E, \quad N \geqslant N_0, \tag{41}$$

или же

$$|\bar\sigma_N(x)| = \overline{\lim_{k\to\infty}} \left| \sum_{m=0}^{k} \bar S_m(x)\, a_{N,\, m} \right| \leqslant A < \infty \quad \text{для всех} \quad x \in E, \quad N \geqslant N_0, \tag{41'}$$

где

$$S_m(x) = \sum_{i=0}^{m} (a_{p_i} \cos p_i x + b_{p_i} \sin p_i x),$$

$$\bar S_m(x) = \sum_{i=0}^{m} (a_{p_i} \sin p_i x - b_{p_i} \cos p_i x).$$

Тогда:

1) *ряд* (40) *является рядом Фурье некоторой функции* $F(x) \in L^2(0, 2\pi)$,

2) *функция* $F(x)$ *может не принадлежать ни к какому* $L^p(0, 2\pi)$ *при* $p > 2$.

Доказательство разобьем на три пункта.

1°. Пусть

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, \rho_n = 0. \tag{42}$$

Предположим, что утверждение 1) не имеет места, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\infty. \tag{43}$$

В этом случае из метода доказательства одного нашего результата [см. ([9]), теорема 6] вытекает, что члены ряда (40) можно переставить так, чтобы у вновь полученного ряда

$$\sum_{i=0}^{\infty}(a_{k_i}\cos k_i x+b_{k_i}\sin k_i x), \tag{44}$$

а также у его сопряженного ряда, частные суммы были почти всюду на $[0,2\pi]$ не ограничены. Но так как

$$\int_0^{2\pi}|\cos k_i x|\,dx\leqslant 2\pi \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi}|\sin k_i x|\,dx\leqslant 2\pi,$$

то, в силу (42), к ряду (44) применимо замечание 2 и потому члены ряда (44) можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty}(a_{p_i}\cos p_i x+b_{p_i}\sin p_i x),$$

а также его сопряженный, имели почти всюду на $[0,2\pi]$ неограниченные T^*-средние. Но это противоречит условию (41) — (41′). Следовательно в этом случае ряд (40) есть ряд Фурье из L^2.

2°. Пусть теперь

$$\varlimsup_{n\to\infty}\rho_n>0. \tag{45}$$

Как будет видно из хода доказательства, не ограничивая общности можно считать, что ряд (40) имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx, \tag{46}$$

причем

$$\varlimsup_{n\to\infty}|b_n|>0. \tag{47}$$

Идея дальнейшего хода рассуждений примерно такая же, как идея доказательства одного из наших утверждений [см. ([9]), теорема 3].

Выберем последовательность номеров k_i так, чтобы уравнение

$$n=\pm k_i\pm k_j \quad (n\neq 0)$$

имело не более одного решения. Ясно [см. (47)], что

$$\sum_{i=1}^{\infty}b_{k_i}^2=\infty. \tag{48}$$

Обозначим через ν_i возрастающую последовательность всех натуральных чисел, среди которых нет чисел k_i. Возьмем последовательность

$$\varepsilon_0=\frac{1}{4}, \quad \varepsilon_k=\frac{1}{4k^2} \qquad (k=1,2,\ldots)$$

и положим

$$B_{n,m}=a_{n,m}+a_{n,m+1}+\ldots=\sum_{k=m}^{\infty}a_{n,k}. \tag{49}$$

Так как, по условию, матрица $\|a_{n,m}\|$ определяет метод суммирования T^*, то

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,m} = 0 \quad (m = 0, 1, \ldots), \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} = 1$$

и потому

$$\lim_{n\to\infty} B_{n,m} = 1 \quad (m = 0, 1, \ldots), \qquad \lim_{m\to\infty} B_{n,m} = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{50}$$

Определим две последовательности целых чисел $\{m_i\}$, $\{n_i\}$ рекуррентным образом так, чтобы $m_0 < n_0 < m_1 < n_1 < m_2 < \ldots$ и, кроме того, будем руководствоваться следующим правилом: по заданному $m_0 = 0$ найдем n_0 такое, что

$$|B_{m_0,i}| < \frac{\varepsilon_0}{1+|b_{\nu_0}|} \quad \text{при} \quad i \geqslant n_0$$

и

$$\sum_{i=0}^{n_0-1} b_{k_i}^2 > 1 \cdot b_{\nu_0}^2.$$

Такое n_0 существует в силу условий (48) и (50).

Теперь найдем $m_1 > n_0$ и $n_1 > \max\{m_1, n_0+1\}$ такие, что

$$B_{m_1,i} = 1 - \alpha_{1,i} \quad \text{с} \quad |\alpha_{1,i}| < \varepsilon_1 \qquad \text{при} \quad 0 \leqslant i \leqslant n_0,$$

$$|B_{m_0,i}| \leqslant \frac{\varepsilon_1}{1+|b_{\nu_1}|}, \quad |B_{m_1,i}| \leqslant \frac{\varepsilon_1}{1+|b_{\nu_1}|} \quad \text{при} \quad i \geqslant n_1$$

и

$$\sum_{i=n_0}^{n_1-2} b_{k_i}^2 > 2 \cdot \sum_{i=0}^{1} b_{\nu_i}^2.$$

Пусть $m_0 < n_0 < m_1 < n_1 < \ldots < m_{k-1} < n_{k-1}$ уже подобраны. Тогда определяем

$$m_k > n_{k-1} \quad \text{и} \quad n_k > \max\{m_k, n_{k-1}+k\} \tag{51}$$

так, чтобы [см. (48) и (50)]

$$B_{m_k,i} = 1 - \alpha_{k,i} \quad \text{с} \quad |\alpha_{k,i}| < \varepsilon_k \quad \text{при} \quad 0 \leqslant i \leqslant n_{k-1}, \tag{52}$$

$$|B_{m_j,i}| < \frac{\varepsilon_k}{1+|b_{\nu_k}|} \qquad \text{при} \quad i \geqslant n_k \quad \text{и} \quad j = 0, 1, \ldots, k, \tag{53}$$

$$\sum_{i=n_{k-1}}^{n_k-(k+1)} b_{k_i}^2 > (k+1) \sum_{i=0}^{k} b_{\nu_i}^2. \tag{54}$$

Определим перестановку ряда (46) следующим образом: члены $b_{\nu_i} \sin \nu_i x$ будем ставить соответственно на места n_i, а на оставшиеся места поставим члены $b_{k_i} \sin k_i x$ в порядке возрастания i. Тогда переставленный ряд (46) примет вид:

$$[b_{k_0} \sin k_0 x + b_{k_1} \sin k_1 x + \cdots + b_{k_{n_0-1}} \sin k_{n_0-1} x] + b_{\nu_0} \sin \nu_0 x +$$
$$+ [b_{k_{n_0}} \sin k_{n_0} x + b_{k_{n_0+1}} \sin k_{n_0+1} x + \cdots + b_{k_{n_1-2}} \sin k_{n_1-2} x] +$$
$$+ b_{\nu_1} \sin \nu_1 x + \cdots + [b_{k_{n_{i-1}-(i-1)}} \sin k_{n_{i-1}-(i-1)} x + \cdots$$
$$\cdots + b_{k_{n_i-(i+1)}} \sin k_{n_i-(i+1)} x] + b_{\nu_i} \sin \nu_i x + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} b_{p_i} \sin p_i x. \tag{55}$$

Обозначим через $S_j(x)$ частные суммы ряда (55). В силу условия теоремы [см. (41) — (41′)], найдется такое число A_1 и множество E_1 с $mE_1 > 0$, что, например *,

$$|\sigma_{m_\alpha}(x)| = \overline{\lim_{N\to\infty}} \left|\sum_{j=0}^{N} S_j(x)\, a_{m_\alpha j}\right| \leqslant A_1 \quad \text{при} \quad x \in E_1, \quad \alpha \geqslant \alpha_0. \tag{56}$$

Далее, рассуждая так же, как в теореме Зигмунда [см. ([10]), стр. 125], мы можем найти число A_2, множество $E_2 \subset E_1$ с $mE_2 > 0$ и целые числа γ_{m_α} такие, что

$$|\sigma^{(1)}_{m_\alpha}(x)| = \left|\sum_{j=0}^{\gamma_{m_\alpha}} S_j(x)\, a_{m_\alpha, j}\right| \leqslant A_2 \ \text{при} \ x \in E_2, \quad \alpha \geqslant \alpha_0 . \tag{57}$$

Кроме того, числа $\gamma_{m_0} < \gamma_{m_1} < \ldots < \gamma_{m_i} < \ldots$ подобраны так, что γ_{m_i} совпадает с одним из n_j и

$$\gamma_{m_i} > n_i . \tag{58}$$

Положим

$$B^{(1)}_{m_\alpha, j} = \sum_{i=j}^{\gamma_{m_\alpha}} a_{m_\alpha, i} \qquad (j \leqslant \gamma_{m_\alpha}) . \tag{59}$$

Из (57) и (59) вытекает, что

$$|\sigma^{(1)}_{m_\alpha}(x)| = \left|\sum_{j=0}^{\gamma_{m_\alpha}} b_{p_j} \sin p_j x B^{(1)}_{m_\alpha, j}\right| \leqslant A_2 \ \text{при} \ x \in E_2, \quad \alpha \geqslant \alpha_0 . \tag{60}$$

В силу выбора чисел k_i, мы можем найти такое k_0, что

$$\int_{E_2} \sin^2 k_i x\, dx \geqslant \frac{1}{4} mE_2 \ \text{при} \ i \geqslant n_{k_0} - k_0 \tag{61}$$

и

$$\left\{ \sum_{\substack{i,\, j \geqslant k_0 \\ i \neq j}} \left| \int_{E_2} \sin k_i x \sin k_j x\, dx \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{16} mE_2. \tag{62}$$

Из неравенства (60) следует, что найдется число A_3, для которого

$$\left|\sigma^{(2)}_{m_\alpha}(x)\right| = \left|\sigma^{(1)}_{m_\alpha}(x) - \sum_{j=0}^{n_{k_0}-1} b_{p_j} \sin p_j x B^{(1)}_{m_\alpha, j}\right| = \left|\sum_{j=n_{k_0}}^{\gamma_{m_\alpha}} b_{p_j} \sin p_j x B^{(1)}_{m_\alpha, j}\right| \leqslant A_3 \tag{62′}$$

при $x \in E_2$ и $\alpha \geqslant \alpha_0$.

Пусть C_α — число функций $b_{\nu_i} \sin \nu_i x$, попавших в частную сумму порядка γ_{m_α} ряда (55). Тогда из (62′) получаем:

$$A_3^2\, mE_2 \geqslant \int_{E_2} \left|\sigma^{(2)}_{m_\alpha}(x)\right|^2 dx \geqslant \int_{E_2} \left|\sum_{j=n_{k_0}}^{\gamma_{m_\alpha}} b_{p_j} \sin p_j x B^{(1)}_{m_\alpha, j}\right|^2 dx =$$

$$= \int_{E} \left| \sum_{i=n_{k_0}-k_0}^{\gamma_{m_\alpha}-C_\alpha-1} b_{k_i} \sin k_i x B^{(1)}_{m_\alpha, i_{k_i}} + \sum_{i=k_0}^{C_\alpha} b_{\nu_i} \sin \nu_i x B^{(1)}_{m_\alpha, n_i} \right|^2 dx , \tag{63}$$

* Исследование случая $|\bar{\sigma}_{m_\alpha}(x)| \leqslant A_1$ аналогично исследованию случая (56).

где номер i_{k_i} больше i на столько, сколько чисел n_j находится на отрезке $[0, i_{k_i}]$. Используя (61), (62) и производя такие же оценки, как в теореме 3 работы [9], мы из (63) получим:

$$A_3^2 mE_2 \geqslant \frac{1}{8} mE_2 \sum_{i=n_{k_0}-k_0}^{\gamma m_\alpha - C_\alpha - 1} b_{k_i}^2 [B_{m_\alpha, i_{k_i}}^{(1)}]^2 -$$

$$- 2\pi \Big\{ \sum_{i=n_{k_0}-k_0}^{\gamma m_\alpha - C_\alpha - 1} b_{k_i}^2 [B_{m_\alpha, i_{k_i}}^{(1)}]^2 \Big\}^{\frac{1}{2}} \Big\{ \sum_{i=k_0}^{C_\alpha} b_{\nu_i}^2 [B_{m_\alpha, n_i}^{(1)}]^2 \Big\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \Big\{ \sum_{i=n_{k_0}-k_0}^{\gamma m_\alpha - C_\alpha - 1} b_{k_i}^2 B_{m_\alpha, i_{k_i}}^{(1)2} \Big\}^{\frac{1}{2}} \Big\{ \frac{1}{8} mE_2 \Big[\sum_{i=n_{k_0}-k_0}^{\gamma m_\alpha - C_\alpha - 1} b_{k_i}^2 B_{m_\alpha, i_{k_i}}^{(1)2} \Big]^{\frac{1}{2}} -$$

$$- 2\pi \Big[\sum_{i=k_0}^{C_\alpha} b_{\nu_i}^2 B_{m_\alpha, n_i}^{(1)2} \Big]^{\frac{1}{2}} \Big\}. \qquad (64)$$

В силу (52), (53), (58) и (59),

$$4\pi^2 \sum_{i=k_0}^{C_\alpha} b_{\nu_i}^2 B_{m_\alpha, n_i}^{(1)2} = 4\pi^2 \sum_{i=k_0}^{\alpha-1} b_{\nu_i}^2 B_{m_\alpha, n_i}^{(1)2} + 4\pi^2 \sum_{i=\alpha}^{C_\alpha} b_{\nu_i}^2 B_{m_\alpha, n_i}^{(1)2} \leqslant$$

$$\leqslant 4\pi^2 (1 + 2\varepsilon_\alpha)^2 \sum_{i=0}^{\alpha-1} b_{\nu_i}^2 + 4\pi^2 \sum_{i=\alpha}^{C_\alpha} b_{\nu_i}^2 \Big(\frac{2\varepsilon_i}{1 + |b_{\nu_i}|} \Big)^2 \leqslant D_1 \sum_{i=0}^{\alpha-1} b_{\nu_i}^2 + D_2, \qquad (65)$$

где D_1 и D_2 — постоянные.

С другой стороны, так как [см. (58), (51)]

$$\gamma m_\alpha - C_\alpha - 1 \geqslant n_\alpha - (\alpha + 1) \geqslant n_{\alpha-1} > n_{\alpha-1} - \alpha,$$

то из (52), (59), (58), (53) и (54) вытекает, что

$$\frac{1}{128} (mE_2)^2 \sum_{i=n_{k_0}-k_0}^{\gamma m_\alpha - C_\alpha - 1} b_{k_i}^2 B_{m_\alpha, i_{k_i}}^{(1)2} \geqslant \frac{1}{128} (mE_2)^2 \sum_{i=n_{\alpha-2}}^{n_{\alpha-1}-\alpha} b_{k_i}^2 B_{m_\alpha, i_{k_i}}^{(1)2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{128} (mE_2)^2 \sum_{i=n_{\alpha-2}}^{n_{\alpha-1}-\alpha} b_{k_i}^2 (1 - 2\varepsilon_\alpha)^2 \geqslant \frac{1}{2^9} (mE_2)^2 \sum_{i=n_{\alpha-2}}^{n_{\alpha-1}-\alpha} b_{k_i}^2 \geqslant \frac{\alpha}{2^9} (mE_2)^2 \sum_{i=0}^{\alpha-1} b_{\nu_i}^2. \qquad (66)$$

Поэтому [см. (65), (66) и (47)]

$$\frac{1}{128} (mE_2)^2 \sum_{i=n_{k_0}-k_0}^{\gamma m_\alpha - C_\alpha - 1} b_{k_i}^2 B_{m_\alpha, i_{k_i}}^{(1)2} - 4\pi^2 \sum_{i=k_0}^{C_\alpha} b_{\nu_i}^2 B_{m_\alpha, n_i}^{(1)2} \to \infty \text{ при } \alpha \to \infty. \qquad (67)$$

Следовательно, из (64) и (67) вытекает, что при α достаточно больших

$$A_3^2 mE_2 \geqslant \Big\{ \sum_{i=n_{k_0}-k_0}^{\gamma m_\alpha - C_\alpha -} b_{k_i}^2 B_{m_\alpha, i_{k_i}}^{(1)2} \Big\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (68)$$

Но неравенство (68) невозможно, ибо его левая часть конечна, а правая стремится к бесконечности при $\alpha \to \infty$.

Следовательно, при предположении (41), (41′) случай (47) невозможен, а потому справедливо равенство (42). Но в этом случае мы доказали (см. п. 1°), что ряд (40) есть ряд Фурье из $L^2(0, 2\pi)$.

3°. Для доказательства утверждения 2) достаточно взять ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kx}{\sqrt{k}\,\ln^2 k} = F(x) \qquad (x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}) \tag{69}$$

и убедиться, что он безусловно почти всюду на $[0,2\pi]$ сходится (тем более суммируется) и тем не менее $F(x) \bar{\in} L^p(0,2\pi)$ ни для какого $p > 2$ (см. по этому поводу работу ([9]), теорема 9). Теорема 2 полностью доказана.

Если проанализировать ход рассуждений в п. 2° доказательства теоремы 2, то легко заметить, что мы, по существу, доказали следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{70}$$

— тригонометрический ряд такой, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_{k_i}^2 + b_{k_i}^2) = \infty, \tag{71}$$

где последовательность $\{k_i\}$ обладает тем свойством, что уравнение $n = \pm k_i \pm k_j$ $(n \neq 0)$ имеет не более C решений (C — постоянная). Тогда для любого метода T^* члены ряда (70) можно переставить так, чтобы он имел почти всюду на $[0, 2\pi]$ неограниченные T^*-средние, а также чтобы ни одна его подпоследовательность частных сумм не была сходящейся ни на каком множестве положительной меры. При этом сопряженный ряд (к переставленному ряду) обладает такими же свойствами.

Теорема 3 является обобщением одного нашего результата [см. ([9]), теорема 3].

Из теоремы 3 легко может быть получена

ТЕОРЕМА 4. *Если тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{40}$$

расходится на E, то для любого метода суммирования Тёплица T^* его члены можно переставить так, чтобы он почти всюду на E не суммировался методом T^*. Кроме того:

а) *если* $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \infty$ *и* $|a_k| + |b_k| \to 0$, *то переставленный ряд почти всюду на $[0, 2\pi]$ имеет неограниченные T^*-средние;*

б) *если* $\sum_{i=1}^{\infty} (a_{k_i}^2 + b_{k_i}^2) = \infty$ (*в частности* $|a_n| + |b_n| \not\to 0$), *где k_i — последовательность из теоремы 3, то переставленный ряд почти всюду на $[0, 2\pi]$ имеет неограниченные T^*-средние и ни одна подпоследовательност*

частных сумм переставленного ряда не является сходящейся ни на одном множестве положительной меры. При этом сопряженный ряд (к переставленному ряду) обладает такими же свойствами *.

Доказательство. Если $\lim_{k\to\infty}\{|a_k|+|b_k|\}=0$, то из теоремы Плеснера и из нашей теоремы 1 (для $h=1,2$) вытекает, что члены ряда (40) можно переставить так, чтобы он и его сопряженный ряд не суммировались методом T^* почти всюду на E.

Если же выполнено условие а), то, в силу одного нашего результата [см. ([9]), следствие 7], члены ряда (40) можно переставить так, чтобы он (а также его сопряженный ряд) неограниченно расходился почти всюду на $[0, 2\pi]$. Поэтому, на основании теоремы 1 (см. замечание 2 для $h=1,2$), члены этого переставленного ряда можно еще раз переставить так, чтобы новый ряд (а также его сопряженный) имел почти всюду на $[0, 2\pi]$ неограниченные T^*-средние.

Если же выполнено условие б), то наше утверждение непосредственно вытекает из теоремы 3.

Теорема 4 доказана.

Отметим ряд следствий.

Следствие 2. *Пусть T — некоторый метод суммирования. Тогда для того чтобы тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{40'}$$

при любом порядке членов имел почти всюду на $E\,(mE>0)$ ограниченные частные суммы, необходимо и достаточно, чтобы T-средние $|\sigma_k(x)$ любого переставленного ряда (40′) *удовлетворяли условию*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}|\sigma_k(x)|<\infty \text{ для почти всех } x\in E.$$

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Докажем достаточность. Пусть

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_{m_k}\cos m_kx+b_{m_k}\sin m_kx)$$

не ограничены на множестве $E_1\subset E$ с $mE_1>0$. Рассмотрим два случая:

1) Пусть

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\rho_n=\underline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt{a_n^2+b_n^2}=0\,.$$

Тогда, в силу еоремы 1 (см. замечание 2 при $h=1$), члены ряда (40′)

---

* Легко видеть, что в п. б) теоремы 4 (а также в теореме 3) переставленный ряд (и его сопряженный) имеет не только неограниченные T^*-средние $|\sigma_N(x)|$ $(|\bar\sigma_N(x)|)$, но даже не ограничены интегралы

$$\int_E|\sigma_N(x)|^2\,dx \text{ и } \int_E|\bar\sigma_N(x)|^2\,dx$$

для любого множества E с $mE>0$. То же самое имеет место и для подпоследовательностей частных сумм переставленных рядов.

можно переставить так, чтобы у вновь полученного ряда T-средние $\sigma_k(x)$ были не ограничены почти всюду на E_1. Мы получили противоречие.

2) Пусть $\overline{\lim_{n\to\infty}}\rho_n > 0$. Тогда, в силу теоремы 3, члены ряда (40′) можно переставить так, чтобы у этого ряда средние $|\sigma_k(x)|$ были не ограничены почти всюду на $[0, 2\pi]$. Тем более они будут не ограничены почти всюду на E. Мы получили опять противоречие. Следствие доказано.

Следствие 3. *Для того чтобы частные суммы ряда* (40′) *были ограничены почти всюду на E, достаточно, чтобы T^*-средние $|\sigma_k(x)|$ любого переставленного ряда* (40′) *были ограничены почти всюду на E.*

Это — частный случай следствия 2 (достаточность верна и для методов T^*.)

Следствие 4. *Если тригонометрический ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

после любой перестановки членов суммируется методом T^* почти всюду на множестве E с $mE > 0$, то он безусловно сходится почти всюду на E и

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \infty .$$

Доказательство. Из теоремы 2 вытекает, что в этом случае

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \infty$$

и, тем более,

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 0 . \qquad (16')$$

Предположим, что заданный тригонометрический ряд после некоторой перестановки членов расходится на множестве $E_1 \subset E$ с $mE_1 > 0$. Тогда, на основании (16′) и теоремы 1, его члены можно еще переставить так, чтобы вновь полученный ряд не был суммируем методом T^* почти всюду на E_1. Но это противоречит условию, что и требовалось доказать.

В работе А. Н. Колмогорова и Д. Е. Меньшова ([4]) имеется следующее утверждение (принадлежащее А. Н. Колмогорову)*:

существует функция $f(x) \in L^2(0,2\pi)$ такая, что члены ее ряда Фурье можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд расходился почти всюду на $[0,2\pi]$.

Если воспользоваться этим утверждением, то можно получить следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5. *Существует функция $F(x) \in L^p(0,2\pi)$ для всех $p > 0$ и такая, что для любого метода суммирования Тёплица T^* члены ряда Фурье функции $F(x)$ можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд не был суммируем методом T^* почти всюду на $[0, 2\pi]$, т. е. ряд Фурье функции $F(x)$ по переставленной тригонометрической системе будет почти всюду не суммируем методом T^*.*

---

* Пользуюсь случаем заметить, что в работе ([9]) на стр. 519 (12-я строка сверху) имеется неточность, а именно: вместо слова «доказывается» там следует читать «имеется».

Доказательство. Пусть

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,, \tag{72}$$

где

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \infty \tag{73}$$

и переставленный ряд (72)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{n_\nu} \cos n_\nu x + b_{n_\nu} \sin n_\nu x) \tag{74}$$

расходится на множестве $E \subset [0, 2\pi]$ с $mE = 2\pi$. В силу неравенства (73) и теоремы Пэли — Зигмунда, найдется такое иррациональное t_0, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\, \varphi_k(t_0) \tag{75}$$

будет рядом Фурье некоторой функции $F(x) \in L^p(0, 2\pi)$ для всех $p > 0$, где $\varphi_k(t)$ — функции Радемахера.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{n_\nu} \cos n_\nu x + b_{n_\nu} \sin n_\nu x)\, \varphi_{n_\nu}(t_0)\,. \tag{76}$$

Очевидно, что он разбивается на два ряда, в одном из которых

$$\varphi_{n'_\nu}(t_0) = +1\,,$$

а в другом

$$\varphi_{n''_\nu}(t_0) = -1\,.$$

Пусть $E_1 \subset [0, 2\pi]$ — множество всех точек расходимости ряда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{n'_\nu} \cos n_\nu' x + b_{n'_\nu} \sin n_\nu' x). \tag{77}$$

Тогда, поскольку на E расходится ряд (74), на множестве $E_2 = E - E$ обязан расходиться ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{n''_\nu} \cos n''_\nu x + b_{n''_\nu} \sin n''_\nu x). \tag{78}$$

Следовательно, на основании леммы 4, примененной к ряду (77) с множеством E_1 и к ряду (78) (взятому со знаком минус) с множеством E_2, мы получаем, что члены ряда (76) можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд почти всюду расходился на $E_1 + E_2 = E$. На основании же (73) и теоремы 1, мы можем еще раз сделать перестановку членов так, чтобы полученный ряд уже не был суммируем методом T^* почти всюду на $E \subset [0, 2\pi]$ с $mE = 2\pi$. В итоге мы получаем некоторую перестановку членов ряда (75), который был рядом Фурье функции $F(x)$, что и требовалось доказать.

Отметим, что если применить теорему 1 к нашему результату [см. ([9]), теорема 6], то получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6. *Для всякого метода суммирования* T^* *существует переставленная тригонометрическая система* $\{\cos m_\nu x,\ \sin m_\nu x\}$, *обладающая свойствами:*

1) *найдется функция* $f(x) \in L^p(0, 2\pi)$ *при* $1 \leqslant p < 2$, *обращающаяся в нуль на* $[1, 2\pi - 1]$ *и имеющая непрерывную производную любого порядка на* $(0, 2\pi)$, *ряд Фурье которой*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{m_\nu} \cos m_\nu x + b_{m_\nu} \sin m_\nu x)$$

почти всюду на $[0, 2\pi]$ *имеет неограниченные* T^*-*средние и не сходится в метрике* L *на* $[0,2\pi]$ *. *При этом ряд Фурье*

$$\bar{f}(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{m_\nu} \sin m_\nu x - b_{m_\nu} \cos m_\nu x)$$

также почти всюду на $[0, 2\pi]$ *имеет неограниченные* T^*-*средние и не сходится в метрике* L *на* $[0, 2\pi]$.

2) *Найдется непрерывная функция* $\varphi(x)$, *ряд Фурье которой по системе* $\{\cos m_\nu x, \sin m_\nu x\}$ *не сходится в метрике* L^p *на* $[0, 2\pi]$ *для любого* $p > 2$. *При этом функция* $\bar{\varphi}(x)$ *также непрерывна и ее ряд Фурье также не сходится в метрике* L^p *при* $p > 2$.

Следствие 5. *Если* $f(x) \in L^p(0, 2\pi)$ *при* $1 \leqslant p < 2$ *и* $f(x) \bar{\in} L^2(0, 2\pi)$, *то члены ряда Фурье функции* $f(x)$ *можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд (а также его сопряженный) имел почти всюду на* $[0, 2\pi]$ *неограниченные* T^*-*средние для наперед заданного метода* T^*.

Это вытекает из теоремы 1 при $h = 1$ и следствия 7 нашей работы (9).

Проводя такие же рассуждения, как при доказательстве теоремы 6 работы (9), мы, на основании замечания 3 и теоремы 1, можем получить следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6'. *Для любого метода суммирования* T^* (*в частности, для сходимости*) *существует такая переставленная тригонометрическая система* $\{\cos m_i x, \sin m_i x\}$, *что для любого* $[a, b] \subset [0,2\pi]$ (*с* $b - a < 2\pi$) *существует функция* $f(x) \in L^p(0, 2\pi)$ *для всех* $0 < p < 2$, *обращающаяся в нуль на* $[a, b]$ *и имеющая бесконечно много производных на* $[0, 2\pi)$ (*кроме одной точки*), *ряд Фурье которой по системе* $\{\cos m_i x, \sin m_i x\}$, *а также ряд Фурье функции* $\bar{f}(x)$ *по системе* $\{\cos m_i x, \sin m_i x\}$, *имеют неограниченные* T^*-*средние почти всюду на* $[0,2\pi]$.

Отметим, что перестановка тригонометрической системы зависит только от T^* и не зависит от выбираемых функций $f(x)$.

Если проанализировать доказательство следствия 5 (см. еще теорему 4), то из него можно вывести

Следствие 5'. *Если* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \infty$, *то члены ряда*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

можно переставить так, чтобы он и его сопряженный ряд имели почти всюду на $[0, 2\pi]$ *неограниченные* T^*-*средние.*

В частности, *члены всякого нуль-ряда* (существование которых было доказано Д. Е. Меньшовым [см. (10), стр. 288]) *можно переставить так, чтобы он почти всюду на* $[0,2\pi]$ *был неограниченно расходящимся.*

* Можно сделать даже так, чтобы не было сходимости в метрике L на любом отрезке $[a, b]$.

Общие замечания. A) Почти во всех результатах, которые мы излагаем в данной работе, перестановки членов ряда «не очень сильные». Иначе говоря, если некоторый ряд расходится, то чтобы сделать его несуммируемым, как правило, достаточно выделить из исходного ряда некоторый «подряд», у которого члены идут в порядке возрастания индексов, и потом обратно вставить в оставшийся «подряд». Таким образом, переставленный ряд является в некотором смысле суммой двух «подрядо́в» (с возрастающими индексами) исходного ряда.

B) Так же, как в работе (⁹), мы можем полученные в § 2 результаты сформулировать в терминах комплексных степенных рядов, у которых члены соответствующим образом переставлены.

§ 3. О безусловной сходимости и суммируемости ортогональных рядов

Как известно, Качмаж (³) доказал следующую теорему.

Если ортогональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \qquad \left(\int_0^1 \varphi_k \varphi_n \, dx = \delta_{k,n}\right) \tag{79}$$

с

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty \tag{80}$$

безусловно суммируем методом T почти всюду на [0,1], *то он безусловно сходится почти всюду на* [0,1].

Ясно, что теорема 1 является обобщением этой теоремы на неортогональные системы функций и на случай, когда условие (80) заменяется менее ограничительным условием:

$$\varlimsup_{k\to\infty} |c_k| = 0 .$$

Отметим, что если ортогональный ряд (79) расходится почти всюду на [0,1], то даже при условии (80) теорема Качмажа не позволяет заключить, что его члены можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд не суммировался почти всюду на [0,1] наперед заданным методом T, в то время как это утверждение сразу вытекает из теоремы 1. Более того, справедлива

ТЕОРЕМА 7.* *Если ортогональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \tag{81}$$

после некоторой перестановки членов расходится на множестве $E \subset [0,1]$ с $mE > 0$ и

$$\varlimsup_{n\to\infty} |c_n| = 0, \tag{82}$$

то члены ряда (81) *можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд не был суммируем наперед заданным методом T^* почти всюду на E.*

---

* Легко видеть, что большинство утверждений § 3 верны не только для ортонормированных систем, но и для нормированных.

Это непосредственно вытекает из теоремы 1.

Следствие 6. *Если ортогональный ряд* (81) *безусловно суммируем почти всюду на множестве* $E \subset [0,1]$ *некоторым методом* T^* *и справедливо равенство* (82), *то ряд* (81) *безусловно сходится почти всюду на* E.

Доказательство. Если бы это было не так, то после некоторой перестановки членов ряд (81) был бы расходящимся на множестве $E_1 \subset E$ с $mE_1 > 0$ и тогда, по теореме 7, можно было бы найти другую перестановку членов ряда (81), после которой полученный ряд был бы не суммируем методом T^* почти всюду на E_1. Мы получили противоречие, и следствие 6 доказано.

Замечание 4. Таким образом, *при условии* (82) *безусловная суммируемость* T *почти всюду на* E *ортогональных рядов эквивалентна безусловной сходимости почти всюду на* E. В частности, *всякий безусловно суммируемый* T^* *почти всюду на* E *ортогональный ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, является безусловно сходящимся почти всюду на* E.

Что касается тригонометрических рядов, то условие (82) является излишним, ибо оно вытекает из безусловной суммируемости T^* тригонометрических рядов (см. следствие 4).

Далее мы увидим, что для произвольных ортогональных рядов следствие 6, вообще говоря, перестает быть верным, если мы опустим условие (82).

Замечание 5. Легко убедиться, что, в силу теоремы Егорова и леммы Орлича, справедливо утверждение:

если нормированная на E *система функций* $f_k(x)$ *равномерно ограничена, то из того, что ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k f_k(x)$$

безусловно сходится почти всюду на E, *вытекает, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 < \infty.$$

Отметим, что сформулированное утверждение будет уже неверным даже для ограниченных в совокупности *ортонормированных* на $[0,1]$ систем функций, если мы будем требовать безусловную сходимость почти всюду лишь на некотором множестве $A \subset [0,1]$, где $mA < 1$. Точнее, в этом случае поведение коэффициентов ряда может быть самым произвольным, в чем нетрудно убедиться, взяв, например, произвольную ортонормированную систему функций на $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, доопределив ее нулем на $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ и положив $A = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$.

Из указанного утверждения и следствия 6 непосредственно вытекает, что *для того чтобы из безусловной суммируемости* T^* *почти всюду на* $[0,1]$ *ряда* (81) [система $\{\varphi_k\}$ равномерно ограничена] *вытекала безусловная сходимость почти всюду на* $[0,1]$, *необходимо и достаточно,*

чтобы выполнялось неравенство:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty.$$

Замечание 6. *Если $\psi_n(x)$ — любая полная в L^2 ортонормированная система функций на $[0,1]$ и $|d_n| \geqslant \alpha > 0$, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \psi_n(x)$$

не может быть безусловно сходящимся почти всюду ни на каком множестве положительной меры.

Доказательство. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d_n \psi_n(x)$ безусловно сходится почти всюду на множестве E с $mE > 0$. Тогда из леммы 2 вытекает, что каждый «подряд»

$$\sum_{i=1}^{\infty} d_{n_i} \psi_{n_i}(x) \quad (n_1 < n_2 < \ldots)$$

должен также сходиться почти всюду на E. Поэтому, на основании известной леммы Орлича, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \psi_n^2(x)$$

сходится почти всюду на E и, тем более, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^2(x)$$

сходится почти всюду на E. Но это противоречит полноте системы функций $\{\psi_n(x)\}$ [см. ([3]), теорема 513], что и требовалось доказать.

Отсюда, как следствие, получаем следующее утверждение:

для того чтобы из безусловной суммируемости T^* почти всюду на E $(mE > 0)$ ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x)$$

вытекала безусловная сходимость почти всюду на E, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (82).

Замечание 7. Ясно, что условие (80) тоже в некотором смысле необходимо для безусловной сходимости (суммируемости), так как даже при условии $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$ могут существовать ортогональные ряды, которые почти всюду на $[0,1]$ расходятся (не суммируются).

Одним из подтверждений вышесказанного является

ТЕОРЕМА 8. *Если ортогональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \tag{83}$$

почти всюду на некотором множестве E $(mE>0)$ безусловно суммируем некоторым методом T^* и

$$\varlimsup_{k\to\infty}|c_k|=0, \quad \varliminf_{k\to\infty}\int_M \varphi_k^2(x)\,dx>0 \tag{84}$$

для любого множества $M\subset E$ с $mM>0$, то ряд (83) безусловно сходится почти всюду на E и

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2<\infty. \tag{85}$$

Безусловная сходимость почти всюду на E вытекает из первого условия (84) и следствия 6. Неравенство же (85) вытекает из условий (84) [см. замечание 9 работы ([9])] и теоремы 1.

Замечание 8. Отметим, что *если ряд (83) безусловно сходится почти всюду на $E_1\subset E$ с $mE_1>0$ и*

$$\varliminf_{k\to\infty}\int_M \varphi_k^2(x)\,dx>0$$

для любого множества $M\subset E$ с $mM>0$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2<\infty.$$

С другой стороны, справедлива

ТЕОРЕМА 9. *Существует полная ортонормированная на $[0,1]$ система функций $\omega_n(x)$ такая, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\omega_n(x)$ абсолютно (тем более безусловно) сходится всюду на $[0,1]$ к функции $F(x)$ и вместе с тем*

$$F(x)\,\overline{\in}\,L^\alpha(0,1) \text{ при любом } \alpha>0 \text{ и } \varlimsup_{n\to\infty}|c_n|=\infty; \tag{86}$$

тем более

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2=\infty.$$

Доказательство. Положим

$$\psi_k(x)=\begin{cases}\sqrt{k(k+1)} & \text{при } \frac{1}{k+1}<x<\frac{1}{k},\\ 0 & \text{при } x\in[0,1]-\left(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right).\end{cases}$$

Очевидно, что система функций $\psi_k(x)$ ортогональна и нормирована на $[0,1]$. Пусть

$$d_k=\frac{1}{\sqrt{k}}(k+1)^{\frac{1}{2}+k}.$$

Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k\psi_k(x)$$

абсолютно сходится во всех точках $x\in[0,1]$ к функции

$$F(x)=(k+1)^{k+1} \quad \text{при } \frac{1}{k+1}<x<\frac{1}{k}.$$

Следовательно, почти всюду

$$F(x) \geqslant \frac{1}{x^{\frac{1}{x}}} \text{ и } F(x) \overline{\in} L^{\alpha}(0, 1) \text{ при } \alpha > 0.$$

Дополним (см. ([3]), теорема 353) систему функций $\psi_k(x)$ до полной и новую систему обозначим через $\omega_k(x)$. Пусть

$$c_n = \begin{cases} d_k, \text{ если } \omega_n(x) = \psi_k(x), \\ 0, \text{ если } \omega_n(x) \text{ не совпадает ни с какой функцией } \psi_k. \end{cases}$$

Ясно, что тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \omega_n(x)$ будет искомым, ибо он абсолютно сходится к $F(x)$ и для него справедливо условие (86), что и требовалось доказать.

С другой стороны, если мы положим

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \psi_{k^k}(x),$$

то легко проверить, что $\Phi(x) \in L^p(0,1)$ для всех $p \in (0,2)$ и поэтому справедливо утверждение:

существует функция $\Phi(x) \in L^p(0,1)$ *для всех* $p \in (0,2)$ *такая, что ее ортогональный ряд Фурье* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k \psi_{k^k}$ *абсолютно* (тем более безусловно) *сходится на* $[0,1]$ *и тем не менее коэффициенты Фурье функции* $\Phi(x)$ *стремятся к* $+\infty$ *при* $k \to \infty$.

Ясно, что для справедливости доказанного выше утверждения необходимо условие неограниченности в совокупности на $[0.1]$ ортонормированной системы $\{\psi_{k^k}(x)\}$. Это непосредственно вытекает из теоремы Мерсера [см. ([3]), теорема 524].

Отметим, что для системы функций $\{\omega_k(x)\}$ второе условие (84) не выполняется.

Банах ([1]) [см. также ([7])] доказал, что *для любой функции* $f(x) \in L^2(0,1)$, $f(x) \not\equiv 0$, *можно построить ортогональную систему функций* $\varphi_k(x)$ *такую, что ряд Фурье функции* $f(x)$ *по этой системе почти всюду на* $[0,1]$ *расходится.*

Таким образом, справедливо

Следствие 7. *Если* $f(x) \in L^2(0,1)$, $f(x) \not\equiv 0$ *и* T^* — *некоторый метод суммирования Тёплица, то можно построить ортонормированную систему функций* $\varphi_k(x)$ *такую, чтобы ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \quad \left(c_k = \int_0^1 f(x) \varphi_k(x)\, dx\right) \tag{87}$$

почти всюду на $[0,1]$ *не был суммируем методом* T^*.

Это непосредственно вытекает из теоремы 7.

Отметим, что построение ряда (87) очень «слабо зависит» от данного метода T^*. Именно, если мы будем менять методы суммирования, то нужные ряды, не суммируемые этими методами, можно получать простой перестановкой членов в одном ряде (87).

Далее, Д. Е. Меньшов (5) доказал, что *для любого метода суммирования T можно найти ортогональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty\right), \tag{88}$$

который не суммируется методом T всюду на $[0,1]$. При этом коэффициенты c_k зависят от метода T.

Из теоремы 7 следует, что, взяв *любой* расходящийся почти всюду на $[0,1]$ ортогональный ряд (88), мы за счет перестановки его членов и изменения функций $\varphi_k(x)$ на множестве меры нуль можем сделать его всюду не суммируемым наперед заданным методом T^*.

Замечание 9. И. И. Волков заметил, что числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \tag{89}$$

может быть суммируем некоторым методом T после любой перестановки членов и тем не менее ряд (89) будет расходиться. В качестве такого ряда он взял ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 1$.

Из теоремы 1 вытекает, что если $\varliminf\limits_{k\to\infty} |a_k| = 0$, то из безусловной суммируемости T^* ряда (89) будет вытекать сходимость ряда (89) после любой перестановки членов, т. е. его абсолютная сходимость.

Отметим, что замечание И. И. Волкова указывает на невозможность усиления теоремы 1. Точнее, теорема 1 становится неверной, если пренебречь условием (16). Именно, если взять $h = 1$, $f_k(x) \equiv 1$, $c_k = 1$ и множество $E = [0,1]$, то можно найти метод суммирования Тёплица такой, что он безусловно суммирует ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k f_k(x)$, который всюду расходится.

Из указанного выше факта можно получить следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 10. *Существует ортогональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(x) \quad \left(\int_0^1 \psi_k \psi_n \, dx = \delta_{k,n}\right), \tag{90}$$

который всюду на $[0,1]$ *безусловно суммируем некоторым методом Тёплица T и тем не менее расходится всюду на* $[0,1]$ *при любом порядке членов* *.

Доказательство. Пусть при $n \geqslant 1$

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}} & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1 - \dfrac{1}{n+1} \text{ и } x = 1, \\ -\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\,(n+2) & \text{при } 1 - \dfrac{1}{n+1} < x < 1 - \dfrac{1}{n+2}, \\ 0 & \text{при } 1 - \dfrac{1}{n+2} \leqslant x < 1. \end{cases} \tag{91}$$

---

* Эта теорема, в частности, решает проблему Орлича [см. (11)] о существовании функционального ряда (даже ортогонального ряда), который безусловно суммируем, но не является безусловно сходящимся.

Ясно, что

$$\int_0^1 \psi_n^2(x)\,dx = \frac{1}{n(n+1)}\frac{n}{(n+1)} + \frac{n}{(n+1)}(n+2)^2\frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1. \quad (92)$$

Если же $k < n$, то [см. (91)]

$$\int_0^1 \psi_k(x)\psi_n(x)\,dx = \int_0^{1-\frac{1}{k+2}} \psi_k(x)\psi_n(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\int_0^{1-\frac{1}{k+2}} \psi_k(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\left\{\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}\frac{k}{k+1} - \sqrt{\frac{k}{(k+1)}}(k+2)\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\} = 0. \quad (93)$$

Из (92) и (93) вытекает, что $\{\psi_n(x)\}$ — ортонормированная система на $[0,1]$.

Возьмем последовательность чисел $c_k = \sqrt{k(k+1)}$ и определим метод суммирования Тёплица $T = \|a_{n,m}\|$ следующим образом: $a_{n,n} = 1$, $a_{n,n^2} = -\frac{1}{n}$ и $a_{n,m} = 0$ при остальных n и m.

Покажем, что ряд (90) является искомым. Возьмем некоторую точку $x_0 \in [0,1)$. Очевидно,

$$S_N(x_0) = \sum_{n=1}^{N} c_n\psi_n(x_0) = N + A(x_0) \quad (94)$$

при $N \geqslant N_0 = N_0(x_0)$, где конечное число $A(x_0)$ зависит только от x и не зависит от N. Следовательно, при $k \geqslant N_0$

$$\sigma_k(x_0) = \sum_{N=1}^{\infty} a_{k,N}S_N(x_0) = a_{k,k}S_k(x_0) + a_{k,k^2}S_{k^2}(x_0) =$$

$$= k + A(x_0) - \frac{1}{k}(k^2 + A(x_0)),$$

т. е.

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_k(x_0) = A(x_0). \quad (95)$$

Очевидно также, что равенство (95) справедливо и в точке $x_0 = 1$, ибо $\psi_n(0) = \psi_n(1)$. Таким образом, ряд (90) всюду на $[0,1]$ суммируем T.

Если же члены ряда (90) переставить, то равенство (94) все равно будет справедливым, если выбрать $N_0(x_0)$ подходящим образом. Но соотношение (95) является следствием (94) и потому ряд (90) всюду на $[0,1]$ безусловно суммируем методом T.

С другой стороны, расходимость ряда (90) на $[0,1]$ при любом порядке членов не вызывает сомнения, так как в каждой точке x_0 бесконечно много членов $c_k\psi_k(x_0)$ равно единице, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е 10. В теореме 10 мы имели: $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$ и это частично объясняет причину возникновения такого рода результата (ср. со следствием 6). Кроме того, система функций $\{\psi_n(x)\}$ не полна, что также является причиной такого поведения ряда (90) (см. замечание 6).

З а м е ч а н и е 11. Легко видеть, что ряд (90) всюду на $[0,1]$ при любом порядке членов расходится к $+\infty$. Но можно даже доказать большее. Именно, справедлива

ТЕОРЕМА 11. *Существует функция $F(x)$ и ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$, состоящая из ограниченных функций на $[0,1]$, такие, что ортогональный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \varphi_n(x) \quad \left(d_n = \int_0^1 F(x)\varphi_n(x)\,dx\right) \tag{96}$$

обладает свойствами:

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^p < \infty \ \text{ для всех } p > 2; \tag{97}$$

б) *члены ряда* (96) *можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд всюду на* $[0,1]$ *расходился к* $+\infty$;

б′) *члены ряда* (96) *можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд всюду на* $[0,1]$ *расходился к* $-\infty$;

в) *ряд* (96) *сходится всюду на* $[0,1]$ *к функции* $F(x)$, *а после некоторой перестановки — к функции* $F_1(x)$ *и при этом* $F_1(x)-F(x)\neq 0$ *во всех точках* $x\in[0,1]$.

Доказательство. Положим для $n\geqslant 1$

$$\varphi_n(x)=\begin{cases} \left\{\dfrac{\ln(n+3)-\ln(n+2)}{[\ln(n+2)-1][\ln(n+3)-1]}\right\}^{\frac{1}{2}} & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 1-\dfrac{1}{\ln(n+2)} \text{ и } x=1, \\ -\ln(n+3)\left\{\dfrac{\ln(n+2)-1}{[\ln(n+3)-1][\ln(n+3)-\ln(n+2)]}\right\}^{\frac{1}{2}} & \\ & \text{при } 1-\dfrac{1}{\ln(n+2)}<x<1-\dfrac{1}{\ln(n+3)}, \\ 0 & \text{при } 1-\dfrac{1}{\ln(n+3)}\leqslant x<1. \end{cases} \tag{98}$$

Так же, как в теореме 10, легко проверить, что $\varphi_n(x)$ — ортонормированная система функций на $[0,1]$. Из определения функций $\varphi_n(x)$ [см. (98)] вытекает, что

$$\varphi_n(x)\sim\frac{1}{\sqrt{n}\ln n} \quad \text{при } n\to\infty. \tag{99}$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\varphi_n(x). \tag{100}$$

Ясно, что на $[0,1]$ он сходится к некоторой функции $F(x)$, ибо [см. (98)] при достаточно больших $n\geqslant n_0$ (n_0 зависит от x)

$$\frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\frac{\ln(n+3)-\ln(n+2)}{[\ln(n+2)-1][\ln(n+3)-1]}\right\}^{\frac{1}{2}}=c_n,$$

где числовая последовательность c_n убывает к нулю монотонно. Отметим [см. (99)], что

$$c_n\sim\frac{1}{n\ln n}. \tag{101}$$

Из (101) вытекает, что ряд (100) сходится к функции $F(x)$ в каждой точке $x \in [0,1]$ условно.

Так как

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \varphi_n(x),$$

то

$$F(x)\varphi_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \varphi_n(x)\varphi_m(x),$$

где последний ряд сходится равномерно на $[0,1]$, ибо $\varphi_m(x) = 0$ при $1 - \frac{1}{\ln(m+3)} \leqslant x < 1$. Поэтому

$$d_m = \int_0^1 F(x)\varphi_m(x)\,dx = \frac{(-1)^m}{\sqrt{m}}$$

и, следовательно, d_m удовлетворяют неравенству (97).

Убедимся, что ряд (100) удовлетворяет также требованиям б), б′) и в), т. е. в качестве ряда (96) можно взять ряд (100).

Так как все функции $\varphi_n(x)$ постоянны на $\left[0,1 - \frac{1}{\ln 3}\right]$, то

$$F(x) = \text{const} = A$$

при $x \in \left[0,1 - \frac{1}{\ln 3}\right]$. Из условной сходимости ряда (100) вытекает, что его члены можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k_\nu}}{\sqrt{k_\nu}} \varphi_{k_\nu}(x) \tag{102}$$

сходился на $\left[0,1 - \frac{1}{\ln 3}\right]$ к числу $A + 1$. Нетрудно видеть [см. (98)], что тогда и весь ряд (102) будет всюду на $[0,1]$ сходиться к функции $F_1(x) = F(x) + 1$. А это и означает, что ряд (100) удовлетворяет требованиям пункта в).

С другой стороны, если члены ряда (100) переставить так, чтобы вновь полученный ряд расходился к $+\infty$ (или к $-\infty$) на $\left[0,1 - \frac{1}{\ln 3}\right]$, то этот переставленный ряд будет всюду на $[0,1]$ автоматически расходиться к $+\infty$ (соответственно $-\infty$), ибо в каждой точке $x_0 \in \left(1 - \frac{1}{\ln 3}, 1\right]$ члены

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \varphi_n(x_0),$$

начиная с некоторого N, совпадают с членами ряда (100) при $x \in \left[0,1 - \frac{1}{\ln 3}\right]$. Теорема 11 доказана.

Следствие 8. *Существует ортогональный ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, который на* $[0,1]$ *расходится к* $+\infty$.

Это непосредственно вытекает из теоремы 11.

Следствие 9. *Существует ортогональный ряд, который при некоторых различных порядках членов сходится на* $[0,1]$ *к различным функциям.*

Это также является частным случаем теоремы 11.

Замечание 12. Теорема 11 в некотором смысле окончательная. Именно, если мы будем требовать, чтобы неравенство (97) выполнялось и для $p=2$, то свойства б), б′) и в) автоматически уже не могут выполняться.

В самом деле, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 < \infty,$$

то ряд (96) сходится на [0,1] в метрике L^2 при любом порядке членов, т. е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \varphi_n(x)$$

сходится безусловно на [0,1] в метрике L^2. А тогда, как нетрудно сообразить, он сходится на [0,1] в метрике L^2 при любом порядке членов к *одной и той же функции* $\Phi(x) \in L^2(0,1)$.

Но из сходимости к $\Phi(x)$ в метрике L^2 вытекает, что всегда найдется подпоследовательность частных сумм переставленного ряда, которая почти всюду на [0,1] сходится к функции $\Phi(x)$. А это и значит, что при

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 < \infty$$

условия б), б′) и в) не могут выполняться на множестве положительной меры.

Поступило
29.XI.1957

ЛИТЕРАТУРА

[1] Banach S., Sur la divergence des séries orthogonales, Studia Math., 9 (1940), 139—155.

[2] Даревский В. М., О некоторых вопросах в теории расходящихся рядов, Матем. сборн., 7 (49): 3 (1940), 549—587.

[3] Kaczmarz S., Steinhaus H., Theorie der Orthogonalreihen, Warszawa — Lwow, 1935.

[4] Колмогоров А. Н., Меньшов Д. Е., Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales, Math. Zeitschr., 26 (1927), 432—441.

[5] Меньшов Д. Е., Sur les séries de fonctions orthogonales, Fund. Math., 7 (1926), 56—108.

[6] Олевский А. М., О линейных методах суммирования, Доклады Ак. наук СССР, 120, № 4 (1958), 701—703.

[7] Талалян А. А., О сходимости ортогональных рядов, Доклады Ак. наук СССР, 110, № 4 (1956), 515—516.

[8] Ульянов П. Л., О перестановках тригонометрической системы, Доклады Ак. наук СССР, 116, № 4 (1957), 568—571.

[9] Ульянов П. Л., О рядах по перестановленной тригонометрической системе, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 22 (1958), 515—542.

[10] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.— Л., 1939.

[11] Orlicz W., Über die unabhängig von der Anordnung fast überall konvergenten Funktionenreihen, Bull. de l'Acad. Polonaise, (1927), 117—125.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 841—870

А. А. КОНЮШКОВ

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ. I

(*Представлено академиком* М. А. Лаврентьевым)

В работе вводятся некоторые классы функций с определенным поведением норм конечных разностей и изучаются категория и борелевский тип некоторых подмножеств функций. По типу результатов статья примыкает к работам Тарнавского [см. ([1]), ([2]), ([5]) и ([6])].

Введение

В работах ([1]) и ([2]) Тарнавский рассматривал: а) пространство H_ω непрерывных функций $f(x)$ периода l, для которых при всех x и h

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant \omega(|h|),$$

причем за метрику принималась метрика пространства C_l непрерывных функций периода l;

б) класс $H_{\omega_1}^{\infty}$ функций $f\in C_l$, для которых при всех x

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{|f(x+h)-f(x)|}{\omega_1(|h|)}=\infty.$$

Здесь $\omega(h)$ и $\omega_1(h)$ $(h>0)$ — положительные неубывающие функции, стремящиеся к нулю при $h\to+0$.

Тарнавский доказал [см. ([2]), теорема 1*], что если

$$\lim_{h\to+0}\frac{h}{\omega(h)}=0$$

и

$$\underline{\lim_{h\to+0}}\left[\frac{\omega_1(h)}{h}\sup_{0<t\leqslant h}\frac{t}{\omega(t)}\right]=0; \qquad (0.1)$$

то множество $H_\omega\cap H_{\omega_1}^{\infty}$ будет резидуальным в пространстве H_ω*.

Если же условие (0.1) не выполняется, то, как показал Орлич ([3]), множество $H_\omega\cap H_{\omega_1}^{\infty}$ пусто.

Отметим, что, как доказали Ауэрбах и Банах ([4]), множество $H_{\omega_1}^{\infty}$ будет резидуальным в пространстве C_l (неубывание функции $\omega_1(h)$ не предполагается).

Далее, в работах ([5]) и ([6]) Тарнавский рассматривал:

а) пространство D_w функций $f\in C_1$ (C_1, согласно предыдущему, — про-

---

* Это означает, что дополнение $H_\omega\setminus(H_\omega\cap H_{\omega_1}^{\infty})$ будет множеством 1-й категории в H_ω.

странство непрерывных функций периода 1), для которых при каждом (фиксированном) x

$$\int_0^1 \frac{|f(x+t)-f(x)|}{w(t)}\,dt \leqslant 1,$$

причем за метрику принималась метрика пространства C_1;

б) класс $D^{\infty}_{w_1}$ функций $f \in C_1$, для которых при всех x

$$\int_0^1 \frac{|f(x+t)-f(x)|}{w_1(t)}\,dt = \infty.$$

Здесь $w(t)$ и $w_1(t)$ $(t>0)$ — положительные неубывающие функции, стремящиеся к нулю при $t \to +0$.

Тарнавский доказал [см. ([6]), теорема 1], что если

$$\int_0^1 \frac{dt}{w_1(t)} = \infty, \quad \int_0^1 \frac{t}{w_1(t)}\,dt < \infty, \quad \overline{\lim_{t\to+0}}\, \frac{w_1(2t)}{w_1(t)} < \infty,$$

$$\lim_{t\to+0} \frac{w_1(t)}{w(t)} = 0, \quad \lim_{t\to+0}\left[\frac{w(t)}{t}\int_t^1 \frac{d\tau}{w(\tau)}\right] = g > 1,$$

то множество $D_w \cap D^{\infty}_{w_1}$ будет резидуальным в пространстве D_w.

Далее, теорема 2 работы ([6]) утверждает, что если

$$\int_0^1 \frac{dt}{w_1(t)} = \infty, \quad \overline{\lim_{t\to+0}}\, \frac{w_1(2t)}{w_1(t)} < \infty,$$

то множество $D^{\infty}_{w_1}$ будет резидуальным в пространстве C_1. Случай $w_1(t) = t$ этой теоремы рассматривался Качмажем ([7]), который установил аналогичные утверждения и для интегралов

$$\int_0^1 \frac{|f(x+t)-f(x-t)|}{t}\,dt, \quad \int_0^1 \frac{|f(x+t)-2f(x)+f(x-t)|}{t}\,dt.$$

Наконец, отметим работы ([8]) — ([13]), в которых рассматривались функции $f(x)$, удовлетворяющие условиям вида

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{w(t)} \int_0^{2\pi} |f(x+t)-f(x-t)|^p\,dx\,dt < \infty. \tag{0.2}$$

Так как эти работы не касаются вопросов категории или борелевского типа множеств, чему посвящена наша статья, то мы не будем приводить результаты этих работ. Заметим только, что в этих работах, кроме работы ([9]), $p=2$, а в работе ([9]) $1 \leqslant p < 2$; в работах ([8]) и ([9]) $w(t)=t$, в работе ([10]) $w(t)=t^2$, в работе ([11]) $w(t)=t^{1+\alpha}$ $(0<\alpha<1)$, в работе ([13]) $w(t)=t^{1+\alpha}$ $(0<\alpha<2)$, в работе ([12]) $w(t)$ подчинена некоторым дополнительным условиям (A) и (A′). В работе ([12]) речь идет также и об условиях, получающихся из условия (0.2) заменой разности $f(x+t)-f(x-t)$ конечной разностью более высокого порядка.

В настоящей работе вводятся некоторые классы периодических функций с определенным поведением норм конечных разностей и исследуются категория и борелевский тип некоторых подмножеств функций. При этом на функции, играющие роль функций $\omega(h)$, $\omega_1(h)$, $w(t)$ и $w_1(t)$ работ Тарнавского, накладывается меньше ограничений.

§ 1. Определения некоторых классов функций и лемма

Будем рассматривать классы функций с периодом 2π.

1.1. Пусть $\varphi(t)$ — положительная функция на $(0, 2\pi]$, и пусть фиксированы числа p, k и M, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, k — натуральное, $M > 0$. По определению,

1) $H_{\varphi, k, p}^{(M)}$ — класс всех функций $f \in L_p(0,2\pi)$ при $1 \leqslant p < \infty$ и класс всех функций $f \in C_{2\pi}$ при $p = \infty$, для которых

$$\frac{\| \Delta_t^{(k)} f(x) \|_{L_p}}{\varphi(t)} \leqslant M \quad (0 < t \leqslant 2\pi). \tag{1.1}$$

Здесь и ниже через $\Delta_t^{(k)} f(x)$ обозначается симметрическая разность k-го порядка функции f, т. е.

$$\Delta_t^{(k)} f(x) = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} f[x + (k-2m)t]. \tag{1.2}$$

При $p = \infty$ числитель в левой части неравенства (1.1) есть норма функции $\Delta_t^{(k)} f(x)$ (с аргументом x) в пространстве $C_{2\pi}$.

Примем в классе $H_{\varphi, k, p}^{(M)}$ метрику пространства $L_p(0,2\pi)$, если $1 \leqslant p < \infty$, и метрику пространства $C_{2\pi}$, если $p = \infty$. Тогда $H_{\varphi, k, p}^{(M)}$ окажется полным метрическим пространством (ибо $H_{\varphi, k, p}^{(M)}$ — замкнутое подмножество L_p или $C_{2\pi}$).

2) $H_{\varphi, k, p}$ — класс всех функций $f \in L_p(0, 2\pi)$ при $1 \leqslant p < \infty$ и класс всех функций $f \in C_{2\pi}$ при $p = \infty$, для которых

$$\varlimsup_{t \to +0} \frac{\| \Delta_t^{(k)} f(x) \|_{L_p}}{\varphi(t)} < \infty.$$

Если предположить функцию $\varphi(t)$ неубывающей, то при обычных действиях над функциями класс $H_{\varphi, k, p}$ становится банаховым пространством при следующем способе введения нормы: *

$$\| f \|_{H_{\varphi, k, p}} = \| f \|_{L_p} + \sup_{0 < t \leqslant 2\pi} \frac{\| \Delta_t^{(k)} f(x) \|_{L_p}}{\varphi(t)}. \tag{1.3}$$

Отметим, что классы $H_{\varphi, k, \infty}$ при неубывающей функции $\varphi(t)$ рассматривались С. Б. Стечкиным ([14]) с точки зрения свойств тригонометрических полиномов, аппроксимирующих функции.

3) $H_{\varphi, k, p}^{\infty} = L_p(0, 2\pi) \diagdown H_{\varphi, k, p} \quad (1 \leqslant p < \infty)$,

$H_{\varphi, k, \infty}^{\infty} = C_{2\pi} \diagdown H_{\varphi, k, \infty}$.

1.2. Пусть $w(t)$ — положительная функция на $(0, 2\pi]$, и пусть фиксированы числа p, k, β и M, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, k — натуральное число, $\beta > 0$ и $M > 0$. По определению,

1) $D_{w, k, p, \beta}^{(M)}$ — класс всех функций $f \in L_p(0, 2\pi)$ при $1 \leqslant p < \infty$ и класс всех функций $f \in C_{2\pi}$ при $p = \infty$, для которых

$$\int_0^{2\pi} \frac{\| \Delta_t^{(k)} f(x) \|_{L_p}^{\beta}}{w(t)} dt \leqslant M.$$

* Напомним, что при $f \in C_{2\pi}$ $\| f \|_{L_\infty} = \| f \|_{C_{2\pi}}$.

Примем в классе $D^{(M)}_{w,k,p,\beta}$ метрику пространства $L_p(0, 2\pi)$, если $1 \leqslant p < \infty$, и метрику пространства $C_{2\pi}$, если $p = \infty$. Тогда $D^{(M)}_{w,k,p,\beta}$ окажется полным метрическим пространством.

2) $D_{w,k,p,\beta}$ — класс всех функций $f \in L_p(0, 2\pi)$ при $1 \leqslant p < \infty$ и класс всех функций $f \in C_{2\pi}$ при $p = \infty$, для которых

$$\int_0^{2\pi} \frac{\| \Delta_t^{(k)} f(x) \|_{L_p}^{\beta}}{w(t)} \, dt < \infty.$$

При обычных действиях над функциями класс $D_{w,k,p,\beta}$ становится пространством типа (F) [см. ([17]), стр. 30] при следующем способе введения метрики:

$$\rho(f_1, f_2)_{D_{w,k,p,\beta}} = \| f_1 - f_2 \|_{L_p} + \int_0^{2\pi} \frac{\| \Delta_t^{(k)} (f_1 - f_2)(x) \|_{L_p}^{\beta}}{w(t)} \, dt \quad (0 < \beta \leqslant 1), \quad (1.4)$$

$$\rho(f_1, f_2)_{D_{w,k,p,\beta}} = \| f_1 - f_2 \|_{L_p} + \left[\int_0^{2\pi} \frac{\| \Delta_t^{(k)} (f_1 - f_2)(x) \|_{L_p}^{\beta}}{w(t)} \, dt \right]^{\frac{1}{\beta}} \quad (\beta > 1), \quad (1.5)$$

3) $D^{\infty}_{w,k,p,\beta} = L_p(0, 2\pi) \setminus D_{w,k,p,\beta} \quad (1 \leqslant p < \infty)$,
$D^{\infty}_{w,k,\infty,\beta} = C_{2\pi} \setminus D_{w,k,\infty,\beta}$.

1.3. ЛЕММА *. *Пусть* $\varphi(t)$ *и* $w(t)$ — *положительные функции на* $(0, 2\pi]$, *и пусть фиксированы числа* k *и* β, *где* k — *натуральное число и* $\beta > 0$. *Пусть функция* $f \in C_{2\pi}$ *имеет лакунарный ряд Фурье*

$$f(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cos n_i x,$$

причем $\frac{n_{i+1}}{n_i} \geqslant \lambda > 1$, $i = 1, 2, \ldots$. *Тогда имеют место неравенства:*

$$\frac{\| \Delta_t^{(k)} f(x) \|_L}{\varphi(t)} \geqslant B_{\lambda,k} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 \frac{\sin^{2k} n_i t}{\varphi^2(t)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.6)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\| \Delta_t^{(k)} f(x) \|_{C_{2\pi}}^{\beta}}{w(t)} \, dt \leqslant 2^{k\beta} \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^{\beta} \int_0^{2\pi} \frac{|\sin n_i t|^{k\beta}}{w(t)} \, dt \quad \text{при } 0 < \beta \leqslant 1, \quad (1.7)$$

$$\left(\int_0^{2\pi} \frac{\| \Delta_t^{(k)} f(x) \|_{C_{2\pi}}^{\beta}}{w(t)} \, dt \right)^{\frac{1}{\beta}} \leqslant 2^k \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \left(\int_0^{2\pi} \frac{|\sin n_i t|^{k\beta}}{w(t)} \, dt \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad \text{при } \beta > 1, \quad (1.8)$$

$$\left(\int_0^{2\pi} \frac{\| \Delta_t^{(k)} f(x) \|_{L}^{\beta}}{w(t)} \, dt \right)^{\frac{2}{\beta}} \geqslant B^2_{\lambda,k} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 \left(\int_0^{2\pi} \frac{|\sin n_i t|^{k\beta}}{w(t)} \, dt \right)^{\frac{2}{\beta}} \quad \text{при } 0 < \beta \leqslant 2, \quad (1.9)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\| \Delta_t^{(k)} f(x) \|_{L}^{\beta}}{w(t)} \, dt \geqslant B^{\beta}_{\lambda,k} \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^{\beta} \int_0^{2\pi} \frac{|\sin n_i t|^{k\beta}}{w(t)} \, dt \quad \text{при } \beta > 2, \quad (1.10)$$

где $B_{\lambda,k}$ — *положительная постоянная, зависящая только от* λ *и* k.

---

* Мы лишь ради краткости записи привели лемму для рядов с косинусами. Фактически лемма распространяется и на ряды вида $\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i \cos n_i x + \beta_i \sin n_i x)$, где последовательность $\{n_i\}$ разбивается на конечное число лакунарных последовательностей.

Доказательство. Рядом Фурье для симметрической разности $\Delta_t^{(k)} f(x)$ (как функции от x) будет ряд

$$(-1)^{\frac{k+1}{2}} 2^k \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \sin^k n_i t \cdot \sin n_i x \quad (k \text{ нечетное}),$$

или ряд

$$(-1)^{\frac{k}{2}} 2^k \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \sin^k n_i t \cdot \cos n_i x \quad (k \text{ четное}).$$

Следовательно [см. ([15]), § 9.602],

$$\|\Delta_t^{(k)} f(x)\|_L \geqslant B_{\lambda, k} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 \sin^{2k} n_i t \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.11}$$

причем можно считать $B_{\lambda,\,k} = 2^k \pi B_\lambda$, где B_λ — константа, указанная в § 9.602 книги ([15]).

Очевидно, что

$$\|\Delta_t^{(k)} f(x)\|_{C_{2\pi}} \leqslant 2^k \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| |\sin^k n_i t|. \tag{1.12}$$

Таким образом, неравенство (1.6) будет следовать из неравенства (1.11).

Докажем неравенство (1.7). Из неравенства (1.12) вытекает, что при $0 < \beta \leqslant 1$ *

$$\|\Delta_t^{(k)} f(x)\|_{C_{2\pi}}^\beta \leqslant 2^{k\beta} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| |\sin^k n_i t| \right)^\beta \leqslant 2^{k\beta} \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^\beta |\sin n_i t|^{k\beta},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\|\Delta_t^{(k)} f(x)\|_{C_{2\pi}}^\beta}{w(t)}\, dt \leqslant 2^{k\beta} \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^\beta \int_0^{2\pi} \frac{|\sin n_i t|^{k\beta}}{w(t)}\, dt.$$

Неравенство (1.7) доказано.

Докажем неравенство (1.8). Из неравенства (1.12), применяя неравенство Минковского, получаем, что при $\beta > 1$

$$\|\Delta_t^{(k)} f(x)\|_{C_{2\pi}}^\beta \leqslant 2^{k\beta} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| |\sin^k n_i t| \right)^\beta,$$

$$\left(\int_0^{2\pi} \frac{\|\Delta_t^{(k)} f(x)\|_{C_{2\pi}}^\beta}{w(t)}\, dt \right)^{\frac{1}{\beta}} \leqslant 2^k \left[\int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \frac{|\sin^k n_i t|}{w^{1/\beta}(t)} \right)^\beta dt \right]^{\frac{1}{\beta}} \leqslant$$

$$\leqslant 2^k \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} |\alpha_i|^\beta \frac{|\sin n_i t|^{k\beta}}{w(t)}\, dt \right)^{\frac{1}{\beta}} = 2^k \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \left(\int_0^{2\pi} \frac{|\sin n_i t|^{k\beta}}{w(t)}\, dt \right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Неравенство (1.8) доказано.

---

* Пользуемся тем, что при $0 < \gamma \leqslant 1$, $a_n \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ имеем:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right)^\gamma \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n^\gamma$$

[см. ([16]), § 2.12].

Докажем неравенство (1.9). Из неравенства (1.11), применяя аналог неравенства Минковского для показателя степени под знаком интеграла, меньшего 1 *, получаем, что при $0<\beta\leqslant 2$

$$\|\Delta_t^{(k)} f(x)\|_L^\beta \geqslant B_{\lambda,k}^\beta \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 \sin^{2k} n_i(t)\Big)^{\frac{\beta}{2}},$$

$$\Big(\int_0^{2\pi} \frac{\|\Delta_t^{(k)} f(x)\|_L^\beta}{w(t)}\,dt\Big)^{\frac{2}{\beta}} \geqslant B_{\lambda,k}^2 \Big[\int_0^{2\pi} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 \frac{\sin^{2k} n_i t}{w^{\frac{2}{\beta}}(t)}\Big)^{\frac{\beta}{2}} dt\Big]^{\frac{2}{\beta}} \geqslant$$

$$\geqslant B_{\lambda,k}^2 \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\int_0^{2\pi} |\alpha_i|^\beta \frac{|\sin n_i t|^{k\beta}}{w(t)}\,dt\Big)^{\frac{2}{\beta}} = B_{\lambda,k}^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 \Big(\int_0^{2\pi} \frac{|\sin n_i t|^{k\beta}}{w(t)}\,dt\Big)^{\frac{2}{\beta}}.$$

Неравенство (1.9) доказано.

Докажем, наконец, неравенство (1.10).

Из неравенства (1.11) следует при $\beta>2$, что **

$$\|\Delta_t^{(k)} f(x)\|_L^\beta \geqslant B_{\lambda,k}^\beta \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 \sin^{2k} n_i t\Big)^{\frac{\beta}{2}} \geqslant B_{\lambda,k}^\beta \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^\beta |\sin n_i t|^{k\beta},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\|\Delta_t^{(k)} f(x)\|_L^\beta}{w(t)}\,dt \geqslant B_{\lambda,k}^\beta \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^\beta \int_0^{2\pi} \frac{|\sin n_i t|^{k\beta}}{w(t)}\,dt.$$

Лемма доказана.

§ 2. Теоремы о классах H и D

ТЕОРЕМА 1. А. *Пусть $\varphi(t)$ — положительная функция на $(0, 2\pi]$, и пусть p, k — фиксированные числа, причем $1\leqslant p\leqslant\infty$, k — натуральное. Тогда:*

1) *для того чтобы $H_{\varphi,k,p}^\infty \neq 0$ ***, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{t\to+0} \varphi(t) = 0. \tag{2.1}$$

---

* Этот аналог состоит в том, что при $0<\gamma<1$, $f_n(x)\geqslant 0$ имеем:

$$\Big[\int\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Big)^\gamma dx\Big]^{\frac{1}{\gamma}} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\int f_n^\gamma\,dx\Big)^{\frac{1}{\gamma}}$$

[см. ([16]), § 6.13].

** Пользуемся тем, что при $\gamma\geqslant 1$, $a_n\geqslant 0$ $(n=1, 2, \ldots)$ имеем:

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big)^\gamma \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n^\gamma$$

[см. ([16]), § 2.12].

*** Знак 0 обозначает здесь пустое множество.

При выполнении условия (2.1) *множество* $H^{\infty}_{\varphi, k, p}$ *будет резидуальным в пространстве* $L_p(0, 2\pi)$ *при* $1 \leqslant p < \infty$ *и в пространстве* $C_{2\pi}$ *при* $p = \infty$.

2) *Для того чтобы в класс* $H_{\varphi, k, p}$ *входили не только функции, эквивалентные константам, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\lim_{t \to +0}} \frac{t^k}{\varphi(t)} < \infty. \tag{2.2}$$

Множество $H_{\varphi, k, p}$ *будет либо совпадать с* L_p $(0, 2\pi)$ *при* $1 \leqslant p < \infty$ *и с* $C_{2\pi}$ *при* $p = \infty$ (*когда не выполняется условие* (2.1)), *либо будет подмножеством первой категории в* L_p *при* $1 \leqslant p < \infty$ *и в* $C_{2\pi}$ *при* $p = \infty$ (*когда выполняется условие* (2.1)), *причем будет замкнутым подмножеством в случае, когда не выполняется условие* (2.2), *и подмножеством типа* F_σ, *но не типа* G_δ (*а значит не будет замкнутым подмножеством*) *в случае, когда выполняется условие* (2.2).

Б. *Пусть* $w(t)$ — *положительная неубывающая функция, и пусть кроме чисел* p *и* k *фиксировано число* $\beta > 0$. *Если всюду в пункте* А *теоремы заменить классы* $H_{\varphi, k, p}$ *и* $H^{\infty}_{\varphi, k, p}$ *соответственно классами* $D_{w, k, p, \beta}$ *и* $D^{\infty}_{w, k, p, \beta}$, *а условия* (2.1) *и* (2.2) — *соответственно условиями*

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{w(t)} = \infty, \tag{2.1'}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{t^{k\beta}}{w(t)} dt < \infty, \tag{2.2'}$$

то утверждения 1) *и* 2) *останутся справедливыми.*

Доказательство. А. 1а) Докажем необходимость условия (2.1). Если оно не выполняется, то существуют такие числа a и t_0, что $\varphi(t) \geqslant a > 0$ при $0 < t \leqslant t_0$ и, следовательно,

$$H_{\varphi, k, p} = L_p \quad (1 \leqslant p < \infty), \quad H_{\varphi, k, \infty} = C_{2\pi};$$

таким образом,

$$H^{\infty}_{\varphi, k, p} = 0.$$

1б) Докажем достаточность условия (2.1). Пусть оно выполняется. Покажем, что в этом случае $H^{\infty}_{\varphi, k, p} \neq 0$.

Построим функцию $f \in C_{2\pi} \cap H^{\infty}_{\varphi, k, 1}$; тогда при любом p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, она будет принадлежать $H^{\infty}_{\varphi, k, p}$.

Из условия (2.1) следует существование такой последовательности $\{t_m\}$, $t_m \downarrow 0$ *, $t_m \leqslant \frac{1}{2}$, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varphi^{\frac{1}{2}}(t_m) < \infty.$$

* Стрелки ↓ и ↑ обозначают соответственно невозрастание и неубывание.

Выберем из $\left\{\left[\frac{1}{t_m}\right]\right\}$ $(m=1,\ 2,\ldots)$* лакунарную подпоследовательность $\left\{\left[\frac{1}{t_{m_i}}\right]\right\}$ $(i=1,\ 2,\ldots)$ и положим

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi^{\frac{1}{2}}(t_{m_i})\cos\left[\frac{1}{t_{m_i}}\right]x.$$

Тогда функция f будет принадлежать $C_{2\pi}$, в силу того, что

$$\sum_{m=1}^{\infty}\varphi^{\frac{1}{2}}(t_m)<\infty.$$

Далее, по формуле (1.6), при $i=1,\ 2,\ldots$ имеем:

$$\frac{\left\|\Delta_{t_{m_i}}^{(k)}f(x)\right\|_L}{\varphi(t_{m_i})}\geqslant B_{\lambda,\,k}\varphi^{\frac{1}{2}}(t_{m_i})\frac{\sin^k\left(\left[\frac{1}{t_{m_i}}\right]t_{m_i}\right)}{\varphi(t_{m_i})}\geqslant aB_{\lambda,\,k}\frac{1}{\varphi^{\frac{1}{2}}(t_{m_i})},$$

где a — положительная постоянная, не зависящая от i $\left(\text{так как } \frac{1}{2}<\left[\frac{1}{t_{m_i}}\right]t_{m_i}\leqslant 1, \text{ то } \inf\sin^k\left(\left[\frac{1}{t_{m_i}}\right]t_{m_i}\right)>0\right)$.

Из предыдущего следует, что

$$\overline{\lim_{t\to+0}}\frac{\left\|\Delta_t^{(k)}f(x)\right\|_L}{\varphi(t)}=\infty,$$

т. е. $f\in H_{\varphi,\,k,\,1}^{\infty}$.

1в) Докажем резидуальность множества $H_{\varphi,\,k,\,p}^{\infty}$ в пространстве L_p при $1\leqslant p<\infty$ и в пространстве $C_{2\pi}$ при $p=\infty$ в случае выполнения условия (2.1). Так как, по доказанному, $H_{\varphi,\,k,\,p}^{\infty}\neq 0$, то $H_{\varphi,\,k,\,p}$ будет собственным подмножеством пространства L_p при $1\leqslant p<\infty$ и пространства $C_{2\pi}$ при $p=\infty$. Очевидно, что $H_{\varphi,\,k,\,p}$ — линейное подмножество. Далее имеем:

$$H_{\varphi,\,k,\,p}=\bigcup_{m,\,n=1}^{\infty}H_{\varphi,\,k,\,p}^{(n,\,m)},$$

где $H_{\varphi,\,k,\,p}^{(n,\,m)}$ — множество всех функций $f\in H_{\varphi,\,k,\,p}$, для которых

$$\frac{\left\|\Delta_t^{(k)}f(x)\right\|_{L_p}}{\varphi(t)}\leqslant n \quad \text{при } 0<t\leqslant\frac{1}{m}.$$

Множества $H_{\varphi,\,k,\,p}^{(n,\,m)}$ замкнуты в пространстве L_p при $1\leqslant p<\infty$ и в пространстве $C_{2\pi}$ при $p=\infty$. Следовательно, $H_{\varphi,\,k,\,p}$ есть собственное линейное борелевское (типа F_σ) подмножество. Применим теорему Банаха [см. ([17]), стр. 31], согласно которой собственное линейное борелевское подмножество пространства типа (F) будет множеством первой категории в этом пространстве. В силу этой теоремы, $H_{\varphi,\,k,\,p}$ — множество 1-й категории, а $H_{\varphi,\,k,\,p}^{\infty}$ — резидуальное множество в пространстве L_p при $1\leqslant p<\infty$ и в пространстве $C_{2\pi}$ при $p=\infty$.

* Скобки [ ] обозначают целую часть числа.

2а) Докажем достаточность условия (2.2). Пусть оно выполняется; тогда из него следует, что при достаточно малых t, $0<t\leqslant t_0$,

$$\frac{t^k}{\varphi(t)}\leqslant C,$$

где C — постоянная. Поэтому в $H_{\varphi,k,p}$ входят, например, все функции с

$$\omega_k(t,f)_{L_p}=O(t^k)\ ^*,$$

в частности, все тригонометрические полиномы.

2б) Докажем необходимость условия (2.2). Пусть (2.2) не выполняется, т. е.

$$\overline{\lim_{t\to+0}}\frac{t^k}{\varphi(t)}=\infty.$$

Покажем сначала, что в этом случае в класс $H_{\varphi,k,p}$ не входит никакой тригонометрический полином, отличный от константы. Это достаточно доказать для $p=1$.

Пусть

$$T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx+b_m\sin mx),$$

$$\sum_{m=1}^{n}(|a_m|+|b_m|)>0,\quad n\geqslant 2.$$

Тогда формула (1.6) при $\lambda=\frac{n}{n-1}$ дает:

$$\frac{\|\Delta_t^{(k)}T_n(x)\|_L}{\varphi(t)}\geqslant B_{\frac{n}{n-1},\,k}\left[\sum_{m=1}^{n}(a_m^2+b_m^2)\frac{\sin^{2k}mt}{\varphi^2(t)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

При фиксированном m получаем:

$$\overline{\lim_{t\to+0}}\frac{\sin^k mt}{\varphi(t)}=\overline{\lim_{t\to+0}}\left[\frac{\sin^k mt}{(mt)^k}\,m^k\,\frac{t^k}{\varphi(t)}\right]=m^k\,\overline{\lim_{t\to+0}}\frac{t^k}{\varphi(t)},$$

откуда следует, что

$$\overline{\lim_{t\to+0}}\frac{\|\Delta_t^{(k)}T_n(x)\|_L}{\varphi(t)}=\infty.$$

Покажем теперь, что в $H_{\varphi,k,p}$ не входит никакая функция f, не эквивалентная константе. Пусть $\sigma_n(x)=\sigma_n(x,f)$ — сумма Фейера для некоторой функции $f\in L_p$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$, т. е.

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+u)K_n(u)\,du,$$

---

* Здесь $\omega_k(t,f)_{L_p}$ — модуль непрерывности k-го порядка функции f в метрике L_p, т. е.

$$\omega_k(t,f)_{L_p}=\max_{|h|\leqslant t}\left\|\sum_{m=0}^{k}(-1)^{k-m}\binom{k}{m}f(x+mh)\right\|_{L_p}.$$

где $K_n(u)$ — ядро Фейера. Тогда имеем:

$$\Delta_t^{(k)}\sigma_n(x) = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} \sigma_n[x + (k-2m)t] =$$

$$= \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[x + (k-2m)t + u] K_n(u)\, du =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(u) \left\{ \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} f[x + (k-2m)t + u] \right\} du =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_t^{(k)} f(x+u) K_n(u)\, du.$$

Мы получили:

$$\Delta_t^{(k)}\sigma_n(x) = \sigma_n(x, \Delta_t^{(k)} f).$$

Пользуясь тем, что

$$\|\sigma_n\|_{L_p} \leqslant \|f\|_{L_p},$$

находим:

$$\|\Delta_t^{(k)}\sigma_n(x)\|_{L_p} \leqslant \|\Delta_t^{(k)} f(x)\|_{L_p}. \tag{2.3}$$

Если бы в $H_{\varphi, k, p}$ входила некоторая функция f, не эквивалентная константе, то, в силу неравенства (2.3), в $H_{\varphi, k, p}$ входили бы некоторые отличные от постоянной тригонометрические полиномы (суммы Фейера). Но это, по доказанному выше, невозможно. Следовательно, классу $H_{\varphi, k, p}$ не принадлежит никакая функция f, не эквивалентная константе.

2в) Выясним борелевский тип множества $H_{\varphi, k, p}$ при выполнении условия (2.1) (если условие (2.1) не выполняется, то $H_{\varphi, k, p} = L_p$ при $1 \leqslant p < \infty$ и $H_{\varphi, k, \infty} = C_{2\pi}$). То, что $H_{\varphi, k, p}$ есть множество 1-й категории, доказано в пункте 1в). Если условие (2.2) не выполняется, то, по доказанному в пункте 2б), класс $H_{\varphi, k, p}$ состоит из всех функций, эквивалентных константам. А множество всех функций, эквивалентных константам, замкнуто в L_p и в $C_{2\pi}$. Следовательно, в этом случае множество $H_{\varphi, k, p}$ замкнуто в L_p при $1 \leqslant p < \infty$ и в $C_{2\pi}$ при $p = \infty$.

Пусть условие (2.2) выполняется. Тот факт, что множество $H_{\varphi, k, p}$ будет типа F_σ, доказан в пункте 1в). Покажем, что в этом случае множество $H_{\varphi, k, p}$ не будет типа G_δ. Множество $H_{\varphi, k, p}$ при выполнении условия (2.2) будет всюду плотным в пространстве L_p при $1 \leqslant p < \infty$ и в пространстве $C_{2\pi}$ при $p = \infty$, так как в $H_{\varphi, k, p}$ входят все тригонометрические полиномы. Далее, по доказанному, при выполнении условия (2.1) множество $H_{\varphi, k, p}$ будет 1-й категории. Из этого следует, что множество $H_{\varphi, k, p}$ не может быть типа G_δ, так как известна теорема [см. ([18]), § 28], в силу которой в полном метрическом пространстве всюду плотное множество типа G_δ будет непременно 2-й категории.

Б. Если условие (2.1′) не выполняется, то $D_{w, k, p, \beta} = L_p$ при $1 \leqslant p < \infty$, $D_{w, k, \infty, \beta} = C_{2\pi}$ и, следовательно, $D^{\infty}_{w, k, p, \beta} = 0$. Таким образом мы доказали необходимость условия (2.1′) для того, чтобы $D^{\infty}_{w, k, p, \beta} \neq 0$.

Докажем достаточность условия (2.1′). Рассмотрим два случая.

1-й случай. Пусть не выполняется условие (2.2′). Тогда из неравенств (1.9) и (1.10) следует, что каждая функция, не эквивалентная константе, с лакунарным рядом Фурье принадлежит $D^{\infty}_{w,\,k,\,1,\,\beta}$.

2-й случай. Пусть выполняется условие (2.2′). Построим функцию $f \in C_{2\pi} \cap D^{\infty}_{w,\,k,\,1,\,\beta}$; тогда она будет принадлежать $D^{\infty}_{w,\,k,\,p,\,\beta}$ при любом p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. При этом можно считать, что $\beta > 2$, ибо из выполнения условия (2.2′) при $\beta \leqslant 2$ следует его выполнение при $\beta > 2$ и, кроме того, $D^{\infty}_{w,\,k,\,p,\,\beta_1} \supset D^{\infty}_{w,\,k,\,p,\,\beta_2}$, если $\beta_1 < \beta_2$.

Положим

$$\nu_n = \int_0^{2\pi} \frac{|\sin nt|^{k\beta}}{w(t)}\, dt.$$

Имеем:

$$\nu_n \geqslant C_1(k\beta) \int_{\frac{1}{n}}^{2\pi} \frac{dt}{w(t)},$$

где C_1 — положительная постоянная, не зависящая от n *. Отсюда, в силу условия (2.1′), следует, что $\nu_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Выберем лакунарную последовательность $\{n_i\}$ так, чтобы

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_{n_i}^{\frac{1}{\beta}}} < \infty.$$

Положим

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_{n_i}^{\frac{1}{\beta}}} \cos n_i x.$$

Тогда $f \in C_{2\pi}$. Докажем, что $f \in D^{\infty}_{w,\,k,\,1,\,\beta}$. Так как $\beta > 2$, то из формулы (1.10) получим:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\|\Delta_t^{(k)} f(x)\|_L^{\beta}}{w(t)}\, dt \geqslant B^{\beta}_{\lambda,\,k} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu_{n_i}^{\frac{1}{\beta}}}\right)^{\beta} \nu_{n_i} = \infty.$$

Мы доказали, что $f \in C_{2\pi} \cap D^{\infty}_{w,\,k,\,1,\,\beta}$.

При выполнении условия (2.1′) множество $D^{\infty}_{w,\,k,\,p,\,\beta}$ будет резидуальным в пространстве L_p при $1 \leqslant p < \infty$ и в пространстве $C_{2\pi}$ при $p = \infty$, так как его дополнение $D_{w,\,k,\,p,\,\beta}$ будет собственным линейным борелевским подмножеством типа F_σ. Именно,

$$D_{w,\,k,\,p,\,\beta} = \bigcup_{n=1}^{\infty} D^{(n)}_{w,\,k,\,p,\,\beta}.$$

---

* Вообще, если $\gamma > 0$ и $w(t)$ — положительная неубывающая функция, то

$$\int_0^{2\pi} \frac{|\sin nt|^{\gamma}}{w(t)}\, dt \geqslant C_1(\gamma) \int_{\frac{1}{n}}^{2\pi} \frac{dt}{w(t)}.$$

При $\gamma = 2$ это доказано в работе ([12]), в общем случае можно рассуждать аналогично.

При выполнении условия (2.2′) в класс $D_{w,k,p,\beta}$ входят, в частности, все функции с $\omega_k(t,f)_{L_p} = O(t^k)$. Если условие (2.2′) не выполняется, то из неравенств (1.9) и (1.10) следует, что в класс $D_{w,k,p,\beta}$ не входит никакой тригонометрический полином, отличный от константы. При помощи неравенства (2.3) получаем, что к $D_{w,k,p,\beta}$ не принадлежит никакая функция, не эквивалентная константе.

Борелевский тип множества $D_{w,k,p,\beta}$ в пространстве L_p при $1 \leqslant p < \infty$ и в пространстве $C_{2\pi}$ при $p = \infty$ можно выяснить аналогично тому, как это было сделано для пункта А теоремы.

Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. 1) *Пусть функции $\varphi(t)$ и $\varphi_1(t)$ положительны на $(0, 2\pi]$ и $\varphi(t)$ не убывает, и пусть p, k — фиксированные числа, причем $1 \leqslant p \leqslant \infty$, k — натуральное. Тогда для того чтобы $H_{\varphi,k,p} \cap H^{\infty}_{\varphi_1,k,p} \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

$$\varlimsup_{t\to+0} \frac{t^k}{\varphi(t)} < \infty, \tag{2.2}$$

$$\varliminf_{t\to+0} \frac{\varphi_1(t)}{t^k \inf\limits_{0<\tau\leqslant t} [\tau^{-k}\varphi(\tau)]} = 0. \tag{2.4}$$

При выполнении этих условий множество $H_{\varphi,k,p} \cap H^{\infty}_{\varphi_1,k,p}$ будет резидуальным в пространстве $H_{\varphi,k,p}$ с нормой (1.3).

Множество $H_{\varphi,k,p} \cap H^{\infty}_{\varphi_1,k,p}$ будет в пространстве $H_{\varphi,k,p}$ открытым в случае, когда выполняется условие

$$\varlimsup_{t\to+0} \frac{t^k}{\varphi_2(t)} = \infty, \tag{2.5}$$

и типа G_δ, но не типа F_σ (значит, не дудет открытым) в противном случае.

2) *Если в п. 1) теоремы 2 класс $H_{\varphi,k,p}$ заменить классом $H^{(1)}_{\varphi,k,p}$ с метрикой L_p при $1 \leqslant p < \infty$ и метрикой $C_{2\pi}$ при $p = \infty$, то утверждения теоремы останутся справедливыми.*

Доказательство. 1а) Докажем необходимость условий. Необходимость условия (2.2) следует из теоремы 1, ибо условие (2.2) необходимо для того, чтобы в класс $H_{\varphi,k,p}$ входили не только функции, эквивалентные константам (последние, очевидно, не принадлежат $H^{\infty}_{\varphi_1,k,p}$).

Докажем необходимость условия (2.4). В знаменателе формулы (2.4) стоит не функция $\varphi(t)$, а ее «исправленная» функция в смысле работы С. Б. Стечкина ([19]):

$$\varphi_k^{**}(t) = t^k \inf_{0<\tau\leqslant t} [\tau^{-k}\varphi(\tau)] \quad (0 < t \leqslant 2\pi).$$

Из условия (2.2) следует, что для некоторых $b > 0$ и t_0

$$\frac{t^k}{\varphi(t)} \leqslant b, \quad 0 < t \leqslant t_0,$$

или

$$\frac{\varphi(t)}{t^k} \geqslant \frac{1}{b}.$$

Поэтому

$$\varphi_k^{**}(t) > 0,$$

Убедимся сначала, что $H_{\varphi, k, p} = H_{\varphi_k^{**}, k, p}$ (в теоретико-множественном смысле).

Так как $\varphi_k^{**}(t) \leqslant \varphi(t)$ [см. ([19])], то ясно, что

$$H_{\varphi_k^{**}, k, p} \subseteq H_{\varphi, k, p}.$$

Пусть теперь $f \in H_{\varphi, k, p}$. Тогда при некоторой постоянной $M > 0$

$$\| \Delta_t^{(k)} f(x) \|_{L_p} \leqslant M \varphi(t) \quad (0 < t \leqslant 2\pi).$$

Отсюда следует:

$$\omega_k(2t, f)_{L_p} \leqslant M\varphi(t), \quad \omega_k(t, f)_{L_p} \leqslant M\varphi(t).$$

По свойству 4) исправленной функции [см. ([19])] получаем, что

$$\omega_k(t, f)_{L_p} \leqslant 2^k M \varphi_k^{**}(t).$$

Далее,

$$\omega_k(2t, f)_{L_p} \leqslant 2^{2k} M \varphi_k^{**}(t)$$

и, следовательно, $f \in H_{\varphi_k^{**}, k, p}$.

Таким образом мы доказали, что

$$H_{\varphi, k, p} = H_{\varphi_k^{**}, k, p}.$$

Если бы условие (2.4) не выполнялось, то при некоторых числах $a > 0$ и t_0 имело бы место неравенство

$$\frac{\varphi_1(t)}{\varphi_k^{**}(t)} \geqslant a, \quad 0 < t \leqslant t_0,$$

или

$$\varphi_1(t) \geqslant a\varphi_k^{**}(t), \quad 0 < t \leqslant t_0,$$

откуда следует:

$$H_{\varphi, k, p} = H_{\varphi_k^{**}, k, p} \subseteq H_{\varphi_1, k, p} \text{ и } H_{\varphi, k, p} \cap H^{\infty}_{\varphi_1, k, p} = 0.$$

1б) Докажем достаточность условий (2.2) и (2.4). Рассмотрим два случая.

1-й случай. Пусть выполняется условие (2.5). Тогда, по теореме 1, классу $H^{\infty}_{\varphi_1, k, p}$ принадлежат все функции из L_p при $1 \leqslant p < \infty$ и все функции из $C_{2\pi}$ при $p = \infty$, не эквивалентные константам. Так как у нас выполняется условие (2.2), то, по теореме 1, классу $H_{\varphi, k, p}$ принадлежат не только функции, эквивалентные константам. Поэтому ясно, что

$$H_{\varphi, k, p} \cap H^{\infty}_{\varphi_1, k, p} \neq 0.$$

2-й случай. Пусть условие (2.5) не выполняется.

α) Пусть $\lim\limits_{t \to +0} \varphi(t) > 0$. Тогда, по теореме 1, $H_{\varphi, k, p} = L_p$ при $1 \leqslant p < \infty$ и $H_{\varphi, k, \infty} = C_{2\pi}$. Убедимся, что при выполнении условия (2.4)

$$\varliminf_{t \to +0} \varphi_1(t) = 0. \tag{2.6}$$

Действительно,

$$\varphi_1(t) = \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_k^{**}(t)} \varphi_k^{**}(t)$$

и дробь в правой части, по условию (2.4), имеет нижний предел, равный нулю.

Непустота класса $H_{\varphi, k, p} \cap H^{\infty}_{\varphi_1, k, p}$ следует, по теореме 1, из условия (2.6).

β) Пусть $\lim\limits_{t\to+0} \varphi(t) = 0$ (тогда и подавно $\lim\limits_{t\to+0} \overset{**}{\varphi}_k(t) = 0$). Убедимся, что во втором случае

$$\lim_{t\to+0} \frac{t^k}{\overset{**}{\varphi}_k(t)} = 0. \tag{2.7}$$

Предварительно заметим, что функция $\dfrac{t^k}{\overset{**}{\varphi}_k(t)}$ не убывает [см. ([19])].

Пусть соотношение (2.7) не выполняется. Тогда существует такое число $a > 0$, что

$$\frac{t^k}{\overset{**}{\varphi}_k(t)} \geqslant a, \quad 0 < t \leqslant 2\pi,$$

т. е.

$$\overset{**}{\varphi}_k(t) \leqslant \frac{1}{a} t^k.$$

В силу условия (2.4), отсюда следует, что

$$\varliminf_{t\to+0} \frac{\varphi_1(t)}{t^k} = 0,$$

или

$$\varlimsup_{t\to+0} \frac{t^k}{\varphi_1(t)} = \infty.$$

А у нас во втором случае последнее соотношение не имеет места.

Построим функцию $f \in H_{\varphi, k, \infty} \cap H^{\infty}_{\varphi_1, k, 1}$ с $\omega_k(t, f)_{C_{2\pi}} = o[\overset{**}{\varphi}_k(t)]$.

Из условия (2.4) следует существование такой последовательности $\{t_n\}$, $t_n \downarrow 0$, что

$$\frac{\varphi_1(t_n)}{\overset{**}{\varphi}_k(t_n)} \to 0.$$

Имеем:

$$\varphi_1(t_n) = \frac{\varphi_1(t_n)}{\overset{**}{\varphi}_k(t_n)} \overset{**}{\varphi}_k(t_n) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Положим $t_n = \dfrac{1}{\tau_n}$. Тогда $\tau_n \uparrow \infty$ и

$$\frac{\overset{**}{\varphi}_k\left(\frac{1}{\tau_n}\right)}{\varphi_1\left(\frac{1}{\tau_n}\right)} \to \infty \quad (n \to \infty). \tag{2.8}$$

Из условия (2.7) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\tau_n^k}}{\overset{**}{\varphi}_k\left(\frac{1}{\tau_n}\right)} = 0,$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n^k \overset{**}{\varphi}_k\left(\frac{1}{\tau_n}\right) = \infty, \tag{2.9}$$

Кроме того, имеет место равенство:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_1\left(\frac{1}{\tau_n}\right) = 0. \tag{2.10}$$

Положим $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = 1$. Числа γ с последующими индексами будем выбирать из последовательности $\{\tau_n\}$ так, чтобы последовательность $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ была возрастающей. Именно, пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ уже определены. Выберем число γ_{m+1} так, чтобы $\gamma_{m+1} \in \{\tau_n\}$, $\gamma_{m+1} > \gamma_m$ и

$$\gamma_{m+1}^k \varphi_k^{**}\left(\frac{1}{\gamma_{m+1}}\right) > 2^k \gamma_m^k \varphi_k^{**}\left(\frac{1}{\gamma_m}\right), ^* \tag{2.11}$$

$$\varphi_1^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\gamma_{m+1}}\right)\left[\varphi_k^{**}\left(\frac{1}{\gamma_{m+1}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{2}\varphi_1^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\gamma_m}\right)\left[\varphi_k^{**}\left(\frac{1}{\gamma_m}\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.12}$$

Такой выбор γ_{m+1} возможен в силу условий (2.9) и (2.10). Отметим, что $\gamma_{m+1} > 2\gamma_m$.

Из соотношения (2.8) следует, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\varphi_k^{**}\left(\frac{1}{\gamma_m}\right)}{\varphi_1\left(\frac{1}{\gamma_m}\right)} = \infty. \tag{2.13}$$

Положим $\psi_0 = \psi_1 = \varphi_k^{**}(1)$. Пусть n — натуральное число > 1 и пусть $\gamma_l < n \leqslant \gamma_{l+1}$ $(l \geqslant 1)$. Положим $\psi_n = \varphi_k^{**}\left(\frac{1}{\gamma_{l+1}}\right)$ и покажем, что

$$\sum_{m=1}^{n} m^{k-1}\psi_m = O\,[n^k \varphi_k^{**}(n^{-1})]^{**}. \tag{2.14}$$

Пусть $n > 1$ и $\gamma_{l-1} < n \leqslant \gamma_l$ $(l \geqslant 2)$. Имеем:

$$\sum_{m=1}^{n} m^{k-1}\psi_m = \sum_{\mu=1}^{l-1} \sum_{m\in(\gamma_{\mu-1},\, \gamma_\mu]} m^{k-1}\psi_m +$$

$$+ \sum_{m\in(\gamma_{l-1},\, n]} m^{k-1}\psi_m \leqslant \sum_{\mu=1}^{l-1} \gamma_\mu \gamma_\mu^{k-1} \varphi_k^{**}\left(\frac{1}{\gamma_\mu}\right) + n n^{k-1}\varphi_k^{**}\left(\frac{1}{\gamma_l}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\mu=1}^{l-1} \gamma_\mu^k \varphi_k^{**}\left(\frac{1}{\gamma_\mu}\right) + n^k \varphi_k^{**}\left(\frac{1}{n}\right).$$

В силу неравенства (2.11),

$$2^k \gamma_{l-2}^k \varphi_k^{**}\left(\frac{1}{\gamma_{l-2}}\right) < \gamma_{l-1}^k \varphi_k^{**}\left(\frac{1}{\gamma_{l-1}}\right),$$

или

$$\gamma_{l-2}^k \varphi_k^{**}\left(\frac{1}{\gamma_{l-2}}\right) < 2^{-k} \gamma_{l-1}^k \varphi_k^{**}\left(\frac{1}{\gamma_{l-1}}\right).$$

---

* Выбор последовательности, удовлетворяющей неравенству типа (2.11), проводился в работах С. Б. Стечкина ([19]), ([20]).

** Употребляемый ниже метод для вывода оценки (2.14) применялся С. Б. Стечкиным в работах ([19]), ([20]).

Далее,

$$\gamma_{l-3}^{k}\varphi_{k}^{**}\left(\frac{1}{\gamma_{l-3}}\right) < 2^{-2k}\gamma_{l-1}^{k}\varphi_{k}^{**}\left(\frac{1}{\gamma_{l-1}}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\gamma_{1}^{k}\varphi_{k}^{**}\left(\frac{1}{\gamma_{1}}\right) \leqslant 2^{-k(l-2)}\gamma_{l-1}^{k}\varphi_{k}^{**}\left(\frac{1}{\gamma_{l-1}}\right).$$

Поэтому с учетом неубывания функции $\dfrac{t^k}{\varphi_k^{**}(t)}$ имеем:

$$\sum_{m=1}^{n} m^{k-1}\psi_m \leqslant 2\gamma_{l-1}^{k}\varphi_{k}^{**}\left(\frac{1}{\gamma_{l-1}}\right) + n^k\varphi_k^{**}\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant 3n^k\varphi_k^{**}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Таким образом, оценка (2.14) доказана. Учитывая соотношени (2.14), получаем:

$$\sum_{m=1}^{n} m^{k-1}\psi_{m-1} = \psi_0 + \sum_{m=2}^{n} m^{k-1}\psi_{m-1} =$$

$$= \varphi_k^{**}(1) + \sum_{m=1}^{n-1}(m+1)^{k-1}\psi_m = O\left[n^k\varphi_k^{**}\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Следовательно,

$$\sum_{m=1}^{n} m^{k-1}\psi_{m-1} = O\left[n^k\varphi_k^{**}\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \quad (2.15)$$

Для дальнейшего заметим, что если функция $f \in C_{2\pi}$ имеет лакунарный ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty}(a_{n_i}\cos n_i x + b_{n_i}\sin n_i x), \quad (2.16)$$

где $\dfrac{n_{i+1}}{n_i} \geqslant \lambda > 1$ (общее, если $\{n_i\}$ разбивается на конечное число лакунарных последовательностей), то

$$E_n(f)_{C_{2\pi}} \sim \sum_{n_i > n}(|a_{n_i}| + |b_{n_i}|) = r_n(f)^*. \quad (2.17)$$

Положим

$$\varepsilon_m = \frac{\varphi_1\left(\frac{1}{\gamma_m}\right)}{\varphi_k^{**}\left(\frac{1}{\gamma_m}\right)} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

---

* Здесь $E_n(f)_{C_{2\pi}}$ — наилучшее приближение функции f в метрике $C_{2\pi}$ тригонометрическими полиномами порядка $\leqslant n$, а запись $E_n(f) \sim r_n(f)$ означает, что существуют такие постоянные M_1, $M_2 > 0$, при которых

$$M_1 r_n(f) \leqslant E_n(f) \leqslant M_2 r_n(f) \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Соотношение (2.17) доказано в работе С. Б. Стечкина ([21]).

($\varepsilon_m \to 0$ в силу соотношения (2.13)),

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varepsilon_m^{\frac{1}{2}} \varphi_k^{**}\left(\frac{1}{\gamma_m}\right) - \varepsilon_{m+1}^{\frac{1}{2}} \varphi_k^{**}\left(\frac{1}{\gamma_{m+1}}\right) \right\} \cos\{[\gamma_m]+1\} x, \qquad (2.18)$$

$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_k^{**}\left(\frac{1}{\gamma_m}\right) - \varphi_k^{**}\left(\frac{1}{\gamma_{m+1}}\right) \right\} \cos\{[\gamma_m]+1\} x^*. \qquad (2.19)$$

Заметим, что последовательность $\{[\gamma_m]+1\}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ лакунарная. Действительно, так как $\frac{\gamma_{m+1}}{\gamma_m} > 2$ $(m = 1, 2, \ldots)$, то при $m \geqslant 2$ будем иметь:

$$\frac{[\gamma_{m+1}]+1}{[\gamma_m]+1} > \frac{\gamma_{m+1}}{\frac{3}{2}\gamma_m} > \frac{4}{3}.$$

При $l \geqslant 1$ получаем:

$$r_{[\gamma_l]+1}(f) = r_{[\gamma_l]+2}(f) = \ldots = r_{[\gamma_{l+1}]}(f) =$$
$$= \sum_{m=l+1}^{\infty} \left\{ \varepsilon_m^{\frac{1}{2}} \varphi_k^{**}\left(\frac{1}{\gamma_m}\right) - \varepsilon_{m+1}^{\frac{1}{2}} \varphi_k^{**}\left(\frac{1}{\gamma_{m+1}}\right) \right\} = \varepsilon_{l+1}^{\frac{1}{2}} \varphi_k^{**}\left(\frac{1}{\gamma_{l+1}}\right).$$

Таким образом, для любого n, $\gamma_l < n \leqslant \gamma_{l+1}$ $(l \geqslant 1)$,

$$r_n(f) = \varepsilon_{l+1}^{\frac{1}{2}} \psi_n.$$

В силу (2.17), отсюда следует, что

$$E_n(f)_{C_{2\pi}} \sim \varepsilon_{l+1}^{\frac{1}{2}} \psi_n \quad (\gamma_l < n \leqslant \gamma_{l+1}, \quad n = 2, 3, \ldots).$$

Поэтому

$$E_n(f)_{C_{2\pi}} = o(\psi_n) \quad (n \to \infty).$$

Аналогично можно получить, что

$$E_n(F)_{C_{2\pi}} \sim \psi_n \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Оценим модуль непрерывности функции f. Предварительно докажем, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} \psi_{m-1} = \infty \qquad (2.20)$$

Как известно [см. ([24]), стр. 15, и ([14])],

$$\omega_k(n^{-1}, F)_{C_{2\pi}} \leqslant C_1(k) n^{-k} \sum_{m=1}^{n} m^{k-1} E_{m-1}(F)_{C_{2\pi}}$$

(для пространств L_p, $1 < p < \infty$, такое неравенство приведено в работе ([25])).

Поэтому если бы (2.20) не имело места, то, учитывая соотношение $E_n(F)_{C_{2\pi}} \sim \psi_n$, мы имели бы:

$$\omega_k(n^{-1}, F)_{C_{2\pi}} \leqslant C_2 n^{-k},$$

* В равенствах (2.18) и (2.19) квадратные скобки [ ] обозначают целую часть числа.

откуда следует *:

$$E_n(F)_{C_{2\pi}} \leqslant C_3 n^{-k}.$$

При $l \geqslant 2$

$$\frac{E_{[\gamma_l]}(F)_{C_{2\pi}}}{[\gamma_l]^{-k}} \geqslant [\gamma_l]^k C_5 \psi_{[\gamma_l]} = C_5 [\gamma_l]^k \overset{**}{\varphi_k}\left(\frac{1}{\gamma_l}\right) =$$

$$= C_5 2^{-k} (2[\gamma_l])^k \overset{**}{\varphi_k}\left(\frac{1}{\gamma_l}\right) > C_5 2^{-k} \gamma_l^k \overset{**}{\varphi_k}\left(\frac{1}{\gamma_l}\right).$$

Но, в силу (2.9),

$$\gamma_l^k \overset{**}{\varphi_k}\left(\frac{1}{\gamma_l}\right) \to \infty \quad (l \to \infty).$$

Поэтому не может быть, чтобы $E_n(F)_{C_{2\pi}} = O(n^{-k})$ и, значит, имеет место соотношение (2.20). Учитывая (2.20) и (2.15), получаем:

$$\omega_k(n^{-1}, f)_{C_{2\pi}} \leqslant C_1'(k)\, n^{-k} \sum_{m=1}^{n} m^{k-1} E_{m-1}(f)_{C_{2\pi}} =$$

$$= o\left(n^{-k} \sum_{m=1}^{n} m^{k-1} \psi_{m-1}\right) = o\left[n^{-k} n^k \overset{**}{\varphi_k}\left(\frac{1}{n}\right)\right] = o\left[\overset{**}{\varphi_k}\left(\frac{1}{n}\right)\right] \quad (n \to \infty).$$

Покажем, что

$$\omega_k(t, f)_{C_{2\pi}} = o[\overset{**}{\varphi_k}(t)] \quad (t \to +0). \tag{2.21}$$

Пусть $t \leqslant 1$, причем $\frac{1}{n+1} < t \leqslant \frac{1}{n}$. Тогда

$$\frac{\omega_k(t, f)_{C_{2\pi}}}{\overset{**}{\varphi_k}(t)} \leqslant \frac{\omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right)_{C_{2\pi}}}{\overset{**}{\varphi_k}\left(\frac{1}{n+1}\right)} \leqslant \frac{2^{2k}\omega_k\left(\frac{1}{n+1}, f\right)_{C_{2\pi}}}{\overset{**}{\varphi_k}\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

и ясно, что (2.21) имеет место. Из соотношения (2.21) следует, в частности, что $f \in H_{\varphi,k,\infty}$**.

Покажем, что $f \in H^{\infty}_{\varphi_1,k,1}$. Соотношение (2.12) можно переписать так:

$$\varepsilon_{m+1}^{\frac{1}{2}} \overset{**}{\varphi_k}\left(\frac{1}{\gamma_{m+1}}\right) \leqslant \frac{1}{2} \varepsilon_m^{\frac{1}{2}} \overset{**}{\varphi_k}\left(\frac{1}{\gamma_m}\right).$$

Тогда при $m = 1, 2, \ldots$ формула (1.6) дает:

$$\frac{\frac{\|\Delta^{(k)}_{\frac{1}{\gamma_m}} f(x)\|_L}{\gamma_m}}{\varphi_1\left(\frac{1}{\gamma_m}\right)} \geqslant B_{\lambda,k}\left\{\varepsilon_m^{\frac{1}{2}} \overset{**}{\varphi_k}\left(\frac{1}{\gamma_m}\right) - \varepsilon_{m+1}^{\frac{1}{2}} \overset{**}{\varphi_k}\left(\frac{1}{\gamma_{m+1}}\right)\right\} \times$$

$$\times \frac{\sin^k\left\{\frac{[\gamma_m]+1}{\gamma_m}\right\}}{\varphi_1\left(\frac{1}{\gamma_m}\right)} \geqslant B_{\lambda,k}\,\frac{1}{2}\,\varepsilon_m^{\frac{1}{2}} \overset{**}{\varphi_k}\left(\frac{1}{\gamma_m}\right) \frac{a}{\varphi_1\left(\frac{1}{\gamma_m}\right)} = B_{\lambda,k}\,\frac{a}{2}\,\frac{1}{m^{\frac{1}{2}}},$$

* Как известно [см. ([14])], $E_n(F)_{C_{2\pi}} \leqslant C_4(k)\,\omega_k(n^{-1}, F)_{C_{2\pi}}$.

** В полном объеме соотношение (2.21) будет использовано ниже в пункте 1 доказательства.

где a — положительная постоянная, не зависящая от m $\left(\text{так как } 1 < \frac{[\gamma_m]+1}{\gamma_m} \leqslant 2, \text{ то } \inf\limits_m \sin^k\left\{\frac{[\gamma_m]+1}{\gamma_m}\right\} > 0\right)$. Таким образом,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\frac{\left\|\Delta^{(k)}_{\frac{1}{\gamma_m}} f(x)\right\|_L}{}}{\varphi_1\left(\frac{1}{\gamma_m}\right)} = \infty,$$

т. е. $f \in H^{\infty}_{\varphi_1,k,1}$.

1в) Докажем резидуальность множества $H_{\varphi,k,p} \cap H^{\infty}_{\varphi_1,k,p}$ в пространстве $H_{\varphi,k,p}$ с нормой (1.3) при выполнении условий (2.2) и (2.4). Так как, по доказанному,

$$H_{\varphi,k,p} \cap H^{\infty}_{\varphi_1,k,p} \neq 0,$$

то $H_{\varphi,k,p} \cap H_{\varphi_1,k,p}$ есть собственное подмножество пространства $H_{\varphi,k,p}$.

Далее,

$$H_{\varphi,k,p} \cap H_{\varphi_1,k,p} = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} (H_{\varphi,k,p} \cap H^{(n,m)}_{\varphi_1,k,p}),$$

где $H^{(n,m)}_{\varphi_1,k,p}$ — множества, определенные аналогично множествам $H^{(n,m)}_{\varphi,k,p}$ при доказательстве теоремы 1. Из замкнутости множеств $H_{\varphi,k,p} \cap H^{(n,m)}_{\varphi_1,k,p}$ в пространстве $H_{\varphi,k,p}$ следует, что множество $H_{\varphi,k,p} \cap H_{\varphi_1,k,p}$ типа F_σ. Таким образом, $H_{\varphi,k,p} \cap H_{\varphi_1,k,p}$ есть собственное линейное борелевское подмножество пространства $H_{\varphi,k,p}$. А тогда, по теореме Банаха, цитированной при доказательстве теоремы 1, множество $H_{\varphi,k,p} \cap H_{\varphi_1,k,p}$ будет 1-й категории и, следовательно, множество $H_{\varphi,k,p} \cap H^{\infty}_{\varphi_1,k,p}$ будет резидуальным.

Исследуем борелевский тип множества $H_{\varphi,k,p} \cap H^{\infty}_{\varphi_1,k,p}$ в пространстве $H_{\varphi,k,p}$. При выполнении условия (2.5) множество $H_{\varphi,k,p} \cap H^{\infty}_{\varphi_1,k,p}$ открыто, ибо оно получается из $H_{\varphi,k,p}$ выбрасыванием функций, эквивалентных константам, т. е. выбрасыванием замкнутого множества.

Пусть теперь условие (2.5) не выполняется. По доказанному, множество $H_{\varphi,k,p} \cap H_{\varphi_1,k,p}$ типа F_σ, поэтому множество $H_{\varphi,k,p} \cap H^{\infty}_{\varphi_1,k,p}$ будет типа G_δ. Покажем, что оно не будет типа F_σ. Для этого достаточно доказать, что множество $H_{\varphi,k,p} \cap H_{\varphi_1,k,p}$ не будет типа G_δ. Так как это множество является линейным подмножеством, то, по теореме Мазура и Штернбаха ([22])*, достаточно доказать, что множество $H_{\varphi,k,p} \cap H_{\varphi_1,k,p}$ не будет замкнутым в пространстве $H_{\varphi,k,p}$. Рассмотрим два случая:

α) Пусть $\lim\limits_{t\to+0} \varphi(t) > 0$. Тогда $H_{\varphi,k,p} = L_p$ при $1 \leqslant p < \infty$ и $H_{\varphi,k,\infty} = C_{2\pi}$, и из сходимости по норме $L_p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ следует сходимость по норме пространства $H_{\varphi,k,p}$. Так как у нас выполняется условие (2.6), то мы можем построить функцию $f \in H^{\infty}_{\varphi_1,k,1}$ с абсолютно сходящимся рядом Фурье (см. пункт 1б) доказательства теоремы 1). Пусть s_n — частные

* Эта теорема состоит в том, что линейное подмножество типа G_δ в банаховом пространстве будет необходимо и замкнутым подмножеством.

суммы ряда Фурье f. Тогда

$$\|f - s_n\|_{C_{2\pi}} \to 0,$$

а значит, и

$$\|f - s_n\|_{H_{\varphi,k,\infty}} \to 0.$$

В силу условия

$$\overline{\lim_{t\to+0}} \frac{t^k}{\varphi_1(t)} < \infty,$$

все $s_n \in H_{\varphi,k,p} \cap H_{\varphi_1,k,p}$. Но s_n сходятся к функции

$$f \notin H_{\varphi,k,p} \cap H_{\varphi_1,k,p} \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty).$$

β) Пусть $\lim\limits_{t\to+0} \varphi(t) = 0$ и пусть σ_n — суммы Фейера функции $f \in H_{\varphi,k,\infty} \cap H^{\infty}_{\varphi_1,k,1}$, причем

$$\omega_k(t, f)_{C_{2\pi}} = o\,[\varphi_k^{**}(t)]$$

(см. равенство (2.21)). В силу условия

$$\overline{\lim_{t\to+0}} \frac{t^k}{\varphi_1(t)} < \infty,$$

имеем:

$$\sigma_n \in H_{\varphi,k,\infty} \cap H_{\varphi_1,k,\infty}.$$

Покажем, что

$$\|f - \sigma_n\|_{\varphi,k,\infty} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Этим будет доказана незамкнутость множества $H_{\varphi,k,p} \cap H_{\varphi_1,k,p}$. Тот факт, что $\|f - \sigma_n\|_{C_{2\pi}} \to 0$ при $n \to \infty$, известен. Остается показать, что

$$\sup_{0<t\leqslant 2\pi} \frac{\|\Delta_t^{(k)}(f - \sigma_n)(x)\|_{C_{2\pi}}}{\varphi(t)} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Это будет сделано ниже, при доказательстве теоремы 3.

2) Необходимость и достаточность условий (2.2) и (2.4) для того чтобы $H^{(1)}_{\varphi,k,p} \cap H^{\infty}_{\varphi_1,k,p} \neq 0$, следует из доказанного выше для $H_{\varphi,k,p} \cap H^{\infty}_{\varphi_1,k,p}$, так как $H^{(1)}_{\varphi,k,p} \subset H_{\varphi,k,p}$ (в теоретико-множественном смысле) и, кроме того, если $f \in H_{\varphi,k,p} \cap H^{\infty}_{\varphi_1,k,p}$, то при некоторой постоянной c функция

$$cf \in H^{(1)}_{\varphi,k,p} \cap H^{\infty}_{\varphi_1,k,p}.$$

Докажем резидуальность множества $H^{(1)}_{\varphi,k,p} \cap H^{\infty}_{\varphi_1,k,p}$ в пространстве $H^{(1)}_{\varphi,k,p}$ при выполнении условий (2.2) и (2.4). Имеем:

$$H^{(1)}_{\varphi,k,p} \cap H_{\varphi_1,k,p} = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} (H^{(1)}_{\varphi,k,p} \cap H^{(n,m)}_{\varphi_1,k,p}),$$

где $H^{(n,m)}_{\varphi_1,k,p}$ определены в пункте 1в) доказательства теоремы 2. Для доказательства резидуальности достаточно показать, что замкнутые множества

$$\Phi_{n,m} = H^{(1)}_{\varphi,k,p} \cap H^{(n,m)}_{\varphi_1,k,p}$$

нигде не плотны в пространстве $H^{(1)}_{\varphi,k,p}$. Предположим, что некоторое множество Φ_{n_0,m_0} не будет нигде не плотным в $H^{(1)}_{\varphi,k,p}$. Тогда (с учетом замкнутости Φ_{n_0,m_0}) в пространстве $H^{(1)}_{\varphi,k,p}$ существует шар $O_{r_0}(f_0)$ с центром f_0 и радиусом $r_0>0$, целиком принадлежащий Φ_{n_0,m_0}. Пусть $0<\theta<1$ таково, что

$$(1-\theta)\,\|f_0\|_{L_p}<\frac{r_0}{2}\,.$$

Положим $f_1=\theta f_0$. Тогда $f_1\in H^{(\theta)}_{\varphi,k,p}$ и

$$O_{\frac{r_0}{2}}(f_1)\subseteq O_{r_0}(f_0)\subseteq \Phi_{n_0,m_0}.$$

Далее, построим функцию $f_2\in H^{(1-\theta)}_{\varphi,k,p}\cap H^{\infty}_{\varphi_1,k,p}$ так, чтобы

$$\|f_2\|_{L_p}<\frac{r_0}{2}\,.$$

С этой целью построим функцию $f\in H_{\varphi,k,p}\cap H^{\infty}_{\varphi_1,k,p}$ и в качестве f_2 возьмем cf при достаточно малом $c>0$.

Пусть

$$f^*(x)=f_1(x)+f_2(x).$$

Тогда $f^*\in H^{(1)}_{\varphi,k,p}$. Далее,

$$\|f^*-f_1\|_{L_p}=\|f_2\|_{L_p}<\frac{r_0}{2}\,.$$

Поэтому $f^*\in O_{\frac{r_0}{2}}(f_1)$ и, значит, $f^*\in H^{(n_0,m_0)}_{\varphi_1,k,p}$. Таким образом,

$$f^*\in H_{\varphi_1,k,p}.$$

Кроме того, мы имеем:

$$f_1\in H_{\varphi_1,k,\,p}.$$

Но тогда из равенства $f_2=f^*-f_1$ будет следовать, что $f_2\in H_{\varphi_1,k,p}$, что противоречит выбору f_2 из $H^{\infty}_{\varphi_1,k,p}$. Мы получили противоречие, доказывающее резидуальность множества $H^{(1)}_{\varphi,k,p}\cap H^{\infty}_{\varphi_1,k,p}$.

Борелевский тип множества $H^{(1)}_{\varphi,k,p}\cap H^{\infty}_{\varphi_1,k,p}$ в пространстве $H^{(1)}_{\varphi,k,p}$ можно выяснить подобно тому, как это было сделано в пунктах 2в) и 3в) доказательств теорем 1 и 2.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть функция* $f\in L_p$ $(1\leqslant p<\infty)$ *или* $f\in C_{2\pi}$ (*при* $p=\infty$).

1) *Если* $\varphi(t)$ — *положительная функция на* $(0,2\pi]$ *и* $\frac{t^k}{\varphi(t)}\to 0$ *при* $t\to+0$, *то для того чтобы*

$$\inf_T\ \overline{\lim_{t\to+0}}\ \frac{\|\Delta_t^{(k)}(f-T)(x)\|_{L_p}}{\varphi(t)}=0, \tag{2.22}$$

где T — *любой тригонометрический полином, необходимо, чтобы*

$$\frac{\|\Delta_t^{(k)}f(x)\|_{L_p}}{\varphi(t)}\to 0\quad(t\to+0). \tag{2.23}$$

2) *Условие* (2.23), *где функция* $\varphi(t)$ *такова, что при каждом* ε, $0<\varepsilon<2\pi$, $\inf\limits_{\varepsilon\leqslant t\leqslant 2\pi}\varphi(t)>0$, *достаточно для того, чтобы*

$$\sup_{0<t\leqslant 2\pi}\frac{\|\Delta_t^{(k)}(f-\sigma_n)x\|_{L_p}}{\varphi(t)}\to 0\quad (n\to\infty), \tag{2.24}$$

где σ_n — *суммы Фейера функции* f.

3) *При неубывающей функции* $\varphi(t)$ *с* $\overline{\lim\limits_{t\to+0}}\frac{t^k}{\varphi(t)}<\infty$ *условие* (2.23) *эквивалентно условию:*

$$\frac{\omega_k(t,f)_{L_p}}{\varphi_k^{**}(t)}\to 0\quad (t\to+0). \tag{2.25}$$

Доказательство. 1) Пусть выполняется условие (2.22). Возьмем $\varepsilon>0$. Выберем такой тригонометрический полином T_0, что

$$\overline{\lim_{t\to+0}}\frac{\|\Delta_t^{(k)}(f-T_0)(x)\|_{L_p}}{\varphi(t)}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда существует такое t_0, что при $0<t\leqslant t_0$

$$\frac{\|\Delta_t^k(f-T_0)(x)\|_{L_p}}{\varphi(t)}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

При $0<t\leqslant t_0$ имеем:

$$\frac{\|\Delta_t^{(k)}f(x)\|_{L_p}}{\varphi(t)}\leqslant\frac{\|\Delta_t^{(k)}(f-T_0)(x)\|_{L_p}}{\varphi(t)}+\frac{\|\Delta_t^{(k)}T_0(x)\|_{L_p}}{\varphi(t)}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{Mt^k}{\varphi(t)}.$$

Так как $\frac{t^k}{\varphi(t)}\to 0$, то выполнение условия (2.23) очевидно.

2) Пусть выполняется (2.23). Докажем (2.24). Возьмем $\varepsilon>0$ и положим, что

$$\frac{\|\Delta_t^{(k)}f(x)\|_{L_p}}{\varphi(t)}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\quad (0<t\leqslant t_0).$$

Тогда для $0<t\leqslant t_0(<2\pi)$ и любого n, в силу неравенства (2.3), имеем:

$$\frac{\|\Delta_t^{(k)}(f-\sigma_n)(x)\|_{L_p}}{\varphi(t)}\leqslant\frac{2\|\Delta_t^{(k)}f(x)\|_{L_p}}{\varphi(t)}\leqslant\varepsilon.$$

Для $f\in L_p$ $(1\leqslant p<\infty)$ и $f\in C_{2\pi}$ (при $p=\infty$) будет:

$$\|f-\sigma_n\|_{L_p}\to 0 \text{ при } n\to\infty,$$

а значит, и

$$\|\Delta_t^{(k)}(f-\sigma_n)(x)\|_{L_p}\to 0$$

равномерно относительно t.

Пусть при $n>N(\varepsilon)$ и $t\in(0,2\pi]$

$$\|\Delta_t^{(k)}(f-\sigma_n)(x)\|_{L_p}\leqslant\varepsilon\inf_{t_0\leqslant t\leqslant 2\pi}\varphi(t).$$

Тогда при $t_0\leqslant t\leqslant 2\pi$ и $n>N(\varepsilon)$ будем иметь:

$$\frac{\|\Delta_t^{(k)}(f-\sigma_n)(x)\|_{L_p}}{\varphi(t)}\leqslant\varepsilon$$

и, значит, при $n > N(\varepsilon)$

$$\sup_{0<t\leqslant 2\pi} \frac{\| \Delta_t^{(k)} (f - \sigma_n)(x) \|_{L_p}}{\varphi(t)} \leqslant \varepsilon.$$

3) Так как

$$\| \Delta_t^{(k)} f(x) \|_{L_p} \leqslant \omega_k(2t, f)_{L_p} \leqslant 2^k \omega_k(t, f)_{L_p}$$

и $\varphi(t) \geqslant \varphi_k^{**}(t)$, то из (2.25) следует (2.23).

Пусть имеет место (2.23). Выведем (2.25). Возьмем $\varepsilon > 0$ и положим

$$\| \Delta_t^{(k)} f(x) \|_{L_p} \leqslant \varepsilon \varphi(t), \quad 0 < t \leqslant t_0.$$

Отсюда, в силу неубывания $\varphi(t)$, следует, что

$$\omega_k(t, f)_{L_p} \leqslant \varepsilon \varphi(t) \quad (0 < t \leqslant t_0),$$

а в силу свойства 4) исправленной функции [см. ([19])], из этого вытекает, что

$$\omega_k(t, f)_{L_p} \leqslant 2^k \varepsilon \varphi_k^{**}(t) \qquad (0 < t \leqslant t_0).$$

Соотношение (2.25) установлено.

ТЕОРЕМА 4. 1) *Пусть функции $w(t)$ и $w_1(t)$ положительны на $(0, 2\pi]$, причем $w_1(t)$ не убывает, и пусть фиксированы числа p, k и β, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, k — натуральное и $\beta > 0$. Тогда для того чтобы $D_{w,k,p,\beta} \cap D^{\infty}_{w_1,k,p,\beta} \neq 0$, необходимо, чтобы выполнялись условия:*

$$\int_0^{2\pi} \frac{t^{k\beta}}{w(t)} dt < \infty, \tag{2.2'}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{w_1(t)} = \infty, \tag{2.1''}$$

$$\varliminf_{t\to+0} \frac{w_1(t)}{w(t)} = 0, \tag{2.4'}$$

и достаточно, чтобы выполнялись условия (2.2′), (2.1″) и условие

$$\lim_{t\to+0} \frac{w_1(t)}{w(t)} = 0\,^*. \tag{2.4''}$$

При выполнении условий (2.2′), (2.1″) и (2.4″) множество $D_{w,k,p,\beta} \cap D^{\infty}_{w_1,k,p,\beta}$ будет резидуальным в пространстве $D_{w,k,p,\beta}$ с метрикой (1.4) или (1.5).

Множество $D_{w,k,p,\beta} \cap D^{\infty}_{w_1,k,p,\beta}$ будет в пространстве $D_{w,k,p,\beta}$ открытым в случае, когда выполняется условие

$$\int_0^{2\pi} \frac{t^{k\beta}}{w_1(t)} dt = \infty, \tag{2.5'}$$

и типа G_δ, но не типа F_σ (значит оно не будет открытым) в противном случае.

---

* Можно показать, что выполнения условий (2.2′), (2.1″) и (2.4′) недостаточно для того, чтобы $D_{w,k,p,\beta} \cap D^{\infty}_{w_1,k,p,\beta} \neq 0$.

2) *Если в п. 1) теоремы 4 класс* $D_{w,k,p,\beta}$ *заменить классом* $D^{(1)}_{w,k,p,\beta}$ *с метрикой* L_p *при* $1 \leqslant p < \infty$ *и метрикой* $C_{2\pi}$ *при* $p = \infty$, *то утверждения теоремы останутся справедливыми.*

Доказательство. 1а) Для того чтобы $D_{w,k,p,\beta} \cap D^{\infty}_{w_1,k,p,\beta} \neq 0$, необходимо, чтобы $D^{\infty}_{w_1,k,p,\beta} \neq 0$ и чтобы в $D_{w,k,p,\beta}$ входили не только функции, эквивалентные константам. А для этого, по теореме 1, необходимы условия (2.1″) и (2.2′). Если условие (2.4′) не выполняется, то существуют такие числа $a > 0$ и t_0, что

$$\frac{w_1(t)}{w(t)} \geqslant a, \quad 0 < t \leqslant t_0,$$

т. е.

$$w_1(t) \geqslant a w(t), \quad 0 < t \leqslant t_0.$$

А тогда $D_{w,k,p,\beta} \subseteq D_{w_1,k,p,\beta}$ и, значит,

$$D_{w,k,p,\beta} \cap D^{\infty}_{u_1,k,p,\beta} = 0.$$

1б) Докажем достаточность условий.

1-й случай. Пусть выполняется условие (2.5′). Тогда, по теореме 1, каждая функция из $D_{w,k,p,\beta}$, не эквивалентная константе, принадлежит и $D^{\infty}_{w_1,k,p,\beta}$.

2-й случай. Пусть не выполняется условие (2.5′). Установим, что при условиях (2.2′), (2.1″) и (2.4″)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int\limits_0^{2\pi} \frac{|\sin nt|^{k\beta}}{w(t)}\,dt}{\int\limits_0^{2\pi} \frac{|\sin nt|^{k\beta}}{w_1(t)}\,dt} = 0. \tag{2.26}$$

Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Из условия (2.4″) следует, что

$$\frac{w_1(t)}{w(t)} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 < t \leqslant t_0 \ (< 2\pi).$$

Тогда при этих t и любом натуральном n

$$\frac{|\sin nt|^{k\beta}}{w(t)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \frac{|\sin nt|^{k\beta}}{w_1(t)}.$$

Далее (для краткости не переписываем подынтегральные выражения), имеем:

$$\frac{\int\limits_0^{2\pi} \frac{|\sin nt|^{k\beta}}{w(t)}\,dt}{\int\limits_0^{2\pi} \frac{|\sin nt|^{k\beta}}{w_1(t)}\,dt} = \frac{\int\limits_0^{t_0} + \int\limits_{t_0}^{2\pi}}{\int\limits_0^{2\pi}} \leqslant \frac{\int\limits_0^{t_0}}{\int\limits_0^{t_0}} + \frac{\int\limits_{t_0}^{2\pi}}{\int\limits_0^{2\pi}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\int\limits_{t_0}^{2\pi} \frac{dt}{w(t)}}{C_1(k\beta) \int\limits_{\frac{1}{n}}^{2\pi} \frac{dt}{w_1(t)}}.$$

Здесь

$$\int_{t_0}^{2\pi} \frac{dt}{w(t)} < \infty ,$$

что следует из условия (2.2′). Кроме того, мы воспользовались тем, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{|\sin nt|^{k\beta}}{w_1(t)} dt \geqslant C_1(k\beta) \int_{\frac{1}{n}}^{2\pi} \frac{dt}{w_1(t)} \qquad (2.27)$$

(см. сноску на стр. 851). Пусть при $n > N$

$$\frac{\int\limits_{t_0}^{2\pi} \frac{dt}{w(t)}}{C_1 \int\limits_{\frac{1}{n}}^{2\pi} \frac{dt}{w_1(t)}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда при $n > N$ выражение под знаком предела в равенстве (2.26) будет меньше ε, и равенство (2.26) доказано.

Положим

$$\delta_n = \int_0^{2\pi} \frac{|\sin nt|^{k\beta}}{w_1(t)} dt , \qquad \varepsilon_n \delta_n = \int_0^{2\pi} \frac{|\sin nt|^{k\beta}}{w(t)} dt .$$

В силу неравенства (2.27) и условия (2.1″), $\delta_n \to \infty$, а в силу равенства (2.26), $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Выберем лакунарную последовательность $\{n_i\}$ так, чтобы

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\varepsilon_{n_i}^{\min\left(1, \frac{1}{\beta}\right)} + \frac{1}{\delta_{n_i}^{\frac{1}{\beta}}} \right) < \infty .$$

Положим

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_{n_i}^{\frac{1}{\beta}}} \cos n_i x .$$

Тогда $f \in C_{2\pi}$. По формуле (1.7), при $0 < \beta \leqslant 1$ имеем:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\| \Delta_t^{(k)} f(x) \|_{C_{2\pi}}^{\beta}}{w(t)} dt \leqslant 2^{k\beta} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\delta_{n_i}^{\frac{1}{\beta}}} \right)^{\beta} \varepsilon_{n_i} \delta_{n_i} = 2^{k\beta} \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{n_i} < \infty .$$

Формула (1.8) при $\beta > 1$ дает:

$$\left(\int_0^{2\pi} \frac{\| \Delta_t^{(k)} f(x) \|_{C_{2\pi}}^{\beta}}{w(t)} dt \right)^{\frac{1}{\beta}} \leqslant 2^k \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_{n_i}^{\frac{1}{\beta}}} (\varepsilon_{n_i} \delta_{n_i})^{\frac{1}{\beta}} = 2^k \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{n_i}^{\frac{1}{\beta}} < \infty .$$

Следовательно, $f \in D_{w,k,\infty,\beta}$. Покажем, что $f \in D_{w_1,k,1,\beta}^{\infty}$.

Пусть $0 < \beta \leqslant 2$. По формуле (1.9) получим:

$$\left(\int\limits_0^{2\pi} \frac{\| \Delta_t^{(k)} f(x) \|_L^\beta}{w_1(t)}\, dt\right)^{\frac{2}{\beta}} \geqslant B_{\lambda,k}^2 \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\delta_{n_i}^{\frac{1}{\beta}}}\right)^2 \delta_{n_i}^{\frac{2}{\beta}} = \infty .$$

Пусть $\beta > 2$. По формуле (1.10) имеем:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\| \Delta_t^{(k)} f(x) \|_L^\beta}{w_1(t)}\, dt \geqslant B_{\lambda,k}^\beta \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\delta_{n_i}^{\frac{1}{\beta}}}\right)^\beta \delta_{n_i} = \infty .$$

Мы построили функцию f, принадлежащую множеству $D_{w,k,\infty,\beta} \cap D^{\infty}_{w_1,k,1,\beta}$; но тогда она будет принадлежать множеству $D_{w,k,p,\beta} \cap D^{\infty}_{w_1,k,p,\beta}$ при любом p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Для доказательства резидуальности множества $D_{w,k,p,\beta} \cap D^{\infty}_{w_1,k,p,\beta}$ в пространстве $D_{w,k,p,\beta}$ воспользуемся представлением

$$D_{w,k,p,\beta} \cap D_{w_1,k,p,\beta} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (D_{w,k,p,\beta} \cap D^{(n)}_{w_1 k,p,\beta}) \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n,$$

в остальном рассуждая так же, как при доказательстве предыдущих теорем. При доказательстве того факта, что при выполнении условий (2.2′), (2.1″), (2.4″) и невыполнении условия (2.5′) множество $D_{w,k,p,\beta} \cap \cap D_{w_1,k,p,\beta}$ не будет типа G_δ в пространстве $D_{w,k,p,\beta}$, можно использовать теорему работы ([18]), цитированную при доказательстве теоремы 1, и следующее утверждение: *тригонометрические полиномы лежат всюду плотно в пространстве* $D_{w,k,p,\beta}$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ *с метрикой* (1.4) *или* (1.5).

Докажем последнее утверждение. Будем считать, что выполняется условие (2.2′), ибо в противном случае утверждение очевидно. Пусть f — любая функция из $D_{w,k,p,\beta}$. Обозначим через σ_n суммы Фейера ряда Фурье функции f. Тогда все $\sigma_n \in D_{w,k,p,\beta}$ (это следует из условия (2.2′)). Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем $t_0 > 0$ столь малым, чтобы

$$\int\limits_0^{t_0} \frac{\| \Delta_t^{(k)} f(x) \|_{L_p}^\beta}{w(t)}\, dt < \frac{\varepsilon}{2^{\beta+1}} .$$

Тогда (для краткости подынтегральное выражение не переписываем)

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\| \Delta_t^{(k)} (f - \sigma_n)(x) \|_{L_p}^\beta}{w(t)}\, dt = \int\limits_0^{t_0} + \int\limits_{t_0}^{2\pi} \leqslant \int\limits_0^{t_0} \frac{2^\beta \| \Delta_t^{(k)} f(x) \|_{L_p}^\beta}{w(t)}\, dt +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{2\pi} \frac{2^{k\beta} \| f - \sigma_n \|_{L_p}^\beta}{w(t)}\, dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \| f - \sigma_n \|_{L_p}^\beta 2^{k\beta} \int\limits_{t_0}^{2\pi} \frac{dt}{w(t)} .$$

Поэтому при достаточно больших n имеем:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\| \Delta_t^{(k)} (f - \sigma_n)(x) \|_{L_p}^\beta}{w(t)}\, dt < \varepsilon .$$

п. 2) теоремы доказывается аналогично п. 2) теоремы 2.

В заключение докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть фиксированы числа p, k и β, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, k — натуральное и $\beta > 0$.*

1) *Пусть функция $\varphi(t)$ определена на $(0,2\pi]$, $\varphi(t) \downarrow 0$ при $t \to +0$ и пусть выполняется условие*

$$\overline{\lim_{t\to+0}} \frac{t^k}{\varphi(t)} < \infty. \tag{2.2}$$

Тогда множество $\underline{H}_{\varphi,k,p} = \bigcup_{\varphi_1} H_{\varphi_1,k,p}$, где сумма распространяется на все положительные функции $\varphi_1(t) = o[\overset{**}{\varphi_k}(t)]$ $(t \to +0)$, будет замкнутым подмножеством 1-й категории в пространстве $H_{\varphi,k,p}$ с нормой (1.3).

2) *Пусть $w(t)$ — положительная функция на $(0,2\pi]$. Тогда*

$$\bigcup_{w_1} D_{w_1,k,p,\beta} = D_{w,k,p,\beta},$$

где сумма распространяется на все положительные функции $w_1(t)$ такие, что

$$\frac{w_1(t)}{w(t)} \downarrow 0 \text{ при } t \to +0.$$

В силу доказательства теоремы 2, $H_{\varphi,k,p} = H_{\overset{**}{\varphi_k},k,p}$. Поэтому класс $H_{\varphi,k,p}$ совпадает с классом функций $f \in L_p(0,2\pi)$ при $1 \leqslant p < \infty$ и классом функций $f \in C_{2\pi}$ при $p = \infty$, для которых

$$\| \Delta_t^k f(x) \|_{L_p} = O[\overset{**}{\varphi_k}(t)] \quad (0 < t \leqslant 2\pi).$$

Множество же $\underline{H}_{\varphi,k,p}$ состоит из всех функций $f \in L_p(0,2\pi)$ при $1 \leqslant p < \infty$ и всех $f \in C_{2\pi}$ при $p = \infty$, для которых

$$\| \Delta_t^{(k)} f(x) \|_{L_p} = o[\overset{**}{\varphi_k}(t)] \quad (t \to +0). \tag{2.28}$$

Отсюда следует, что в п. 1) теоремы 5 содержится теорема 4 работы ([23]), согласно которой множество $\mathrm{lip}\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ будет множеством 1-й категории типа $F_{\sigma\delta}$ в пространстве $\mathrm{Lip}\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

Доказательство. 1) Из соотношения (2.28) следует, что $\underline{H}_{\varphi,k,p}$ является линейным подмножеством пространства $H_{\varphi,k,p}$. Докажем, что $\underline{H}_{\varphi,k,p}$ будет собственным замкнутым подмножеством пространства $H_{\varphi,k,p}$.

1-й случай. Пусть для каждой положительной функции $\varphi_1(t) = o[\overset{**}{\varphi_k}(t)]$

$$\overline{\lim_{t\to+0}} \frac{t^k}{\varphi_1(t)} = \infty$$

(так будет в том и только в том случае, когда $\overset{**}{\varphi_k}(t) = O(t^k)$). В этом случае, по теореме 1, $\underline{H}_{\varphi,k,p}$ есть замкнутое подмножество пространства $H_{\varphi,k,p}$, состоящее из функций, эквивалентных константам. Это подмножество собственное, что следует из условия (2.2) и теоремы 1.

2-й случай. Пусть для некоторой функции $\varphi_1(t) = o[\overset{**}{\varphi_k}(t)]$

$$\overline{\lim_{t\to+0}} \frac{t^k}{\varphi_1(t)} < \infty.$$

В этом случае необходимо выполняется условие (2.7), т. е.

$$\lim_{t\to+0} \frac{t^k}{\overset{**}{\varphi_k}(t)} = 0$$

(см. доказательство теоремы 2). Кроме того, из условия $\varphi(t) \downarrow 0$ следует, что

$$\overset{**}{\varphi_k}(t) \to 0.$$

Возьмем в качестве последовательности $\{\tau_n\}$ последовательность натуральных чисел и, как в доказательстве теоремы 2, построим функцию F с

$$E_n(F)_{C_{2\pi}} \sim \psi_n \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

и рядом Фурье (2.19), т. е.

$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \overset{**}{\varphi_k}\left(\frac{1}{\gamma_m}\right) - \overset{**}{\varphi_k}\left(\frac{1}{\gamma_{m+1}}\right) \right\} \cos(\gamma_m + 1)x.$$

При этом построении вместо условия (2.12) введем условие

$$\overset{**}{\varphi_k}\left(\frac{1}{\gamma_{m+1}}\right) \leqslant \frac{1}{2} \overset{**}{\varphi_k}\left(\frac{1}{\gamma_m}\right) \quad (m = 1, 2, \ldots) \tag{2.12'}$$

и покажем, что $F \in H_{\varphi,k,p} \setminus \underline{H}_{\varphi,k,p}$. Из соотношения $E_n(F)_{C_{2\pi}} \sim \psi_n$ и оценки (2.15) следует, что

$$\omega_k(t, F)_{C_{2\pi}} = O[\overset{**}{\varphi_k}(t)];$$

значит, $F \in H_{\varphi,k,p}$ при любом p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Покажем, что $F \in H^{\infty}_{\varphi_1,k,1}$ при каждой функции

$$\varphi_1(t) = o[\overset{**}{\varphi_k}(t)].$$

По формуле (1.6), при $m = 1, 2, \ldots$ имеем:

$$\frac{\left\| \Delta^{(k)}_{\frac{1}{\gamma_m}} F(x) \right\|_L}{\varphi_1\left(\frac{1}{\gamma_m}\right)} \geqslant B_{\lambda,k} \left\{ \overset{**}{\varphi_k}\left(\frac{1}{\gamma_m}\right) - \overset{**}{\varphi_k}\left(\frac{1}{\gamma_{m+1}}\right) \right\} \frac{\sin^k \frac{\gamma_{m+1}}{\gamma_m}}{\varphi_1\left(\frac{1}{\gamma_m}\right)} \geqslant$$

$$\geqslant B_{\lambda,k} \cdot \frac{1}{2} \overset{**}{\varphi_k}\left(\frac{1}{\gamma_m}\right) \cdot \frac{a}{\varphi_1\left(\frac{1}{\gamma_m}\right)} = \frac{a}{2} B_{\lambda,k} \frac{\overset{**}{\varphi_k}\left(\frac{1}{\gamma_m}\right)}{\varphi_1\left(\frac{1}{\gamma_m}\right)}.$$

Здесь $a > 0$ — постоянная, так как $1 < \frac{\gamma_m + 1}{\gamma_m} \leqslant 2$. Мы получили, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\left\| \Delta^{(k)}_{\frac{1}{\gamma_m}} F(x) \right\|_L}{\varphi_1\left(\frac{1}{\gamma_m}\right)} = \infty.$$

Таким образом, $F \in H^{\infty}_{\varphi_1,k,p}$ при любом p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Покажем теперь, что $\underline{H}_{\varphi,k,p}$ будет замкнутым подмножеством в пространстве $H_{\varphi,k,p}$.

Пусть $\{f_n\} \subset \underline{H}_{\varphi,k,p}$ и

$$\|f_n - f\|_{H_{\varphi,k,p}} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Установим, что $f \in \underline{H}_{\varphi,k,p}$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Из условия $f_n \to f$ в $H_{\varphi,k,p}$ следует, что при некоторой функции f_{n_0}

$$\sup_{0<t\leqslant 2\pi} \frac{\|\Delta_t^{(k)}(f - f_{n_0})(x)\|_{L_p}}{\varphi(t)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, при $0 < t \leqslant 2\pi$ имеем:

$$\frac{\|\Delta_t^{(k)} f(x)\|_{L_p}}{\varphi(t)} \leqslant \frac{\|\Delta_t^{(k)}(f - f_{n_0})(x)\|_{L_p}}{\varphi(t)} + \frac{\|\Delta_t^{(k)} f_{n_0}(x)\|_{L_p}}{\varphi(t)} < $$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|\Delta_t^{(k)} f_{n_0}(x)\|_{L_p}}{\varphi(t)}.$$

Значит при достаточно малых t, $0 < t \leqslant t_0$,

$$\frac{\|\Delta_t^{(k)} f(x)\|_{L_p}}{\varphi(t)} < \varepsilon.$$

Отсюда получаем (см. доказательство теоремы 3), что

$$\|\Delta_t^{(k)} f(x)\|_{L_p} = o[\varphi_k^{**}(t)],$$

т. е. $f \in \underline{H}_{\varphi,k,p}$. Итак, в обоих случаях множество $\underline{H}_{\varphi,k,p}$ оказывается собственным линейным замкнутым подмножеством пространства $H_{\varphi,k,p}$. Поэтому по теореме Банаха (см. доказательство теоремы 1), множество $\underline{H}_{\varphi,k,p}$ будет 1-й категории в $H_{\varphi,k,p}$.

2) Пусть $f \in D_{w,k,p,\beta}$, т. е.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\|\Delta_t^{(k)} f(x)\|_{L_p}^{\beta}}{w(t)} dt < \infty,$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{2\pi}{n+1}}^{\frac{2\pi}{n}} \frac{\|\Delta_t^{(k)} f(x)\|_{L_p}^{\beta}}{w(t)} dt < \infty.$$

Тогда, как известно, существует такая последовательность $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n \downarrow 0$, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{2\pi}{n+1}}^{\frac{2\pi}{n}} \frac{\|\Delta_t^{(k)} f(x)\|_{L_p}^{\beta}}{\varepsilon_n w(t)} dt < \infty.$$

Положим

$$w_1(t) = \varepsilon_n w(t), \quad \frac{2\pi}{n+1} < t \leqslant \frac{2\pi}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Тогда $\frac{w_1(t)}{w(t)} \downarrow 0$ при $t \to +0$ и

$$\int_0^{2\pi} \frac{\| \Delta_t^{(k)} f(x) \|_{L_p}^{\beta}}{w_1(t)} dt < \infty .$$

Мы получили, что $f \in D_{w_1,k,p,\beta}$. Теорема доказана.

Поступило
7.X.1957

ЛИТЕРАТУРА

[1] Tarnawski E., Continuous functions in the logarithmic-power classification according to Hölder's conditions, Fundam. math., 42, № 1 (1955), 11—37.

[2] Tarnawski E., On the spaces of functions satisfying Hölder's condition, Fundam. math., 42, № 2 (1955), 207—214.

[3] Orlicz W., Sur les fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz généralisée, I, Studia math., 10 (1948), 21—39.

[4] Auerbach H., Banach S., Über die Höldersche Bedingung, Studia math., 3 (1931), 180—184.

[5] Tarnawski E., Continuous functions considered from the standpoint of Dini's conditions, Fundam. math., 43, № 1 (1956), 3—22.

[6] Tarnawski E., On the spaces of functions satisfying Dini's condition, Fundam. math., 43, № 2 (1956), 141—147.

[7] Kaczmarz S., Integrale vom Dini'schen Typus, Studia math., 3 (1931), 189—19

[8] Plessner A., Über Konvergenz von trigonometrischen Reihen, J. reine und angew. Math., 155 (1925), 15—25.

[9] Marcinkiewicz J., Sur une nouvelle condition pour la convergence presque partout des séries de Fourier, Ann. Scuola norm. supér. Pisa, 8 (1939), 239-240.

[10] Beurling A., Ensembles exceptionnels, Acta math., 72 (1939), 1—13.

[11] Broman A., On two classes of trigonometric series, Thesis, Uppsala, 1947.

[12] Ульянов П. Л., О некоторых эквивалентных условиях сходимости рядов и интегралов, Успехи матем. наук, 8, № 6 (1953), 133—141.

[13] Freud G., Králik D., Über die Anwendbarkeit des Dirichletschen Prinzips für den Kreis, Acta math. Acad. sci. hung., 7, № 3—4 (1956), 411—418.

[14] Стечкин С. Б., О порядке наилучших приближений непрерывных функций, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 15 (1951), 219—242.

[15] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.— Л., 1939.

[16] Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г., Неравенства, М., 1948.

[17] Банах С., Курс функціонального аналізу, Київ, 1948.

[18] Хаусдорф Ф., Теория множеств, М.— Л., 1937.

[19] Стечкин С. Б., Об абсолютной сходимости рядов Фурье (Второе сообщение), Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 19 (1955), 221—246.

[20] Стечкин С. Б., Об абсолютной сходимости рядов Фурье, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 17 (1953), 87—98.

[21] Стечкин С. Б., Об абсолютной сходимости рядов Фурье (Третье сообщение), Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 20 (1956), 385—412.

[22] Mazur S., Sternbach L., Über die Borelschen Typen von linearen Mengen, Studia math., 4 (1933), 48—53.

[23] Конюшков А. А., Об одном классе функций, Успехи матем. наук., 12, № 4 (1957), 177—180.

[24] Тиман А. Ф., Исследования по теории приближения функций, Автореферат диссертации, Днепропетровск, 1951.

[25] Тиман А. Ф., Тиман М. Ф., Обобщенный модуль непрерывности и наилучшее приближение в среднем, Доклады Ак. наук СССР, 71, № 1 (1950), 17—20

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 871—872

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 22

Бабенко К. И. О наилучших приближениях одного класса аналитических функций . . . 631—640
Боголюбов Н. Н. и Владимиров В. С. Об аналитическом продолжении обобщенных функций . . . 15—48
Боярский Б. В. и Векуа И. Н. Доказательство жесткости кусочно-регулярных замкнутых выпуклых поверхностей неотрицательной кривизны . . . 165—176
Брудно А. Л. Пример двух матриц Тёплица, ограниченно не противоречивых и ограниченно не покрываемых . . . 309—320
Бугров Я. С. Свойства полигармонических функций . . . 491—514
Виноградов И. М. Особый случай оценки тригонометрических сумм с простыми числами . . . 3—14
Виноградов И. М. Новая оценка функции $\zeta(1+it)$ . . . 161—164
Виноградов И. М. Об одном кратном интеграле . . . 577—584
Владимиров В. С. Об уравнении переноса частиц . . . 475—490
Гамкрелидзе Р. В. Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах . . . 449—474
Ганзбург И. М. и Тиман А. Ф. Линейные процессы приближения функций, удовлетворяющих условию Липшица, алгебраическими многочленами 771—810
Глускин Л. М. О матричных полугруппах . . . 439—448
Дзядык В. К. О приближении функций обыкновенными многочленами на конечном отрезке вещественной оси . . . 337—354
Дубовицкий А. Я. О точках полного вырождения матрицы Якоби . . . 705—716
Ефимов А. В. О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера . . . 81—116
Ильин В. А. О разложимости функций, обладающих особенностями, в условно сходящийся ряд по собственным функциям . . . 49—80
Карманов В. Г. О существовании решений некоторых краевых задач для уравнений смешанного типа . . . 117—134
Конюшков А. А. О некоторых классах функций. I . . . 841—870
Королюк В. С. Письмо в редакцию . . . 735
Лапчик И. П. О множестве предельных точек рядов с комплексными членами 641—666
Лебедев В. И. О методе сеток для одной системы уравнений в частных производных . . . 717—734
Леонтьев А. Ф. О последовательностях линейных агрегатов, образованных из решений дифференциальных уравнений . . . 201—242
Леонтьев А. Ф. О значениях целой функции конечного порядка в заданных точках . . . 387—394
Малышев А. В. Письмо в редакцию . . . 735
Манин Ю. И. Алгебраические кривые над полями с дифференцированием . . 737—756
Масленникова В. Н. Решение в явном виде задачи Коши для одной системы уравнений с частными производными . . . 135—160
Масленникова В. Н. Смешанные задачи для одной системы уравнений с частными производными первого порядка . . . 271—298
Минеев М. П. Диофантово уравнение с показательной функцией и его приложение к изучению эргодической суммы . . . 585—598

Никольский С. М. Теорема вложения для функций с частными производными, рассматриваемыми в различных метриках . . . . 321—336

Никольский С. М. Вариационная задача Гильберта . . . . 599—630

Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юй-линь. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации . . . . . . 667—704

Постников А. Г. Усиленный закон больших чисел для выборки из равномерно распределенной случайной величины . . . . 433—438

Сахнович Л. А. Спектральный анализ операторов вида $Kf = \int_0^x f(t)k(x-t)dt$ 299—308

Синдаловский Г. Х. Некоторые вопросы непрерывности и дифференцируемости измеримых функций . . . . 395—432

Старченко Л. П. О построении последовательностей, совместно нормальных с данной . . . . 757—770

Тер-Крикоров А. М. Точное решение задачи о движении вихря под поверхностью жидкости . . . . 177—200

Тиман А. Ф. О наилучшем приближении дифференцируемых функций алгебраическими многочленами на конечном отрезке вещественной оси . . 355—360

Тумаркин Г. Ц. и Хавинсон С. Я. Аналитические функции в многосвязных областях класса В. И. Смирнова (класса S) . . . . 379—386

Тумаркин Г. Ц. и Хавинсон С. Я. О существовании в многосвязных областях однозначных аналитических функций с заданным модулем граничных значений . . . . 543—562

Ульянов П. Л. О рядах по переставленной тригонометрической системе . . 515—542

Ульянов П. Л. О безусловной сходимости и суммируемости . . . . 811—840

Фельдман Н. И. О совместных приближениях периодов эллиптической функции алгебраическими числами . . . . 563—576

Хавинсон С. Я. О единственности функции наилучшего приближения в метрике пространства L_1 . . . . 243—270

Черский Ю. И. Об уравнениях типа свертки . . . . 361—378